Die p-lokale K-Homologie und K-Kohomologie des Bottspektrums

Diplomarbeit

von Vanessa Krummeck

Fachbereich Mathematik
Bergische Universität Gesamthochschule Wuppertal

Wuppertal, November 1999

Einleitung

K-Theorie läßt sich auf zwei Arten definieren: Einerseits führt die Grothendieck-Konstruktion angewendet auf die Halbgruppe der Vektorbündel zu einer geometrischen Definition von K-Kohomologie. Diese ist zunächst nur für kompakte topologische Räume erklärt, läßt sich dann aber auf CW-Komplexe erweitern. Andererseits ist mithilfe des Bottspektrums K sowohl K-Kohomologie als auch zusätzlich K-Homologie definierbar. Diese zweite Definition kann dann auch auf Spektren angewendet werden, insbesondere auch auf das die K-Theorie definierende Bottspektrum K.

Beide Definitionen stimmen auf der Schnittmenge ihrer Definitionsbereiche überein. Ebenso läßt sich in beiden Fällen reduzierte und unreduzierte K-Theorie von CW-Komplexen definieren.

Ziel dieser Diplomarbeit ist es, die beiden reduzierten K-Gruppen $\widetilde{K}_*(K)$ und $\widetilde{K}^*(K;\mathbb{Z}_{(p)})$ zu berechnen.

Dazu wird in Kapitel 1 ein kurzer Überblick über die zum Verständnis dieser Diplomarbeit notwendigen Grundlagen gegeben. Da verschiedene Quellen oft gleiche Notationen für leicht verschiedene Sachverhalte verwenden, sind in Kapitel 1.2 die in dieser Arbeit verwendeten Notationen aufgeführt. Wem die Theorie der Spektren geläufig ist, den sollte Kapitel 1.2 ausreichend informieren. Der Vollständigkeit halber befindet sich jedoch in Anhang A eine Aufstellung der wichtigsten Definitionen und Sätze der Theorie der Spektren sowie in Anhang B eine Liste aller verwendeten Symbole zur schnellen Referenz.

Kapitel 2 soll alle Voraussetzungen zur Berechnung der K-Gruppen bereitstellen. Dazu gehören die Beschreibung des Bottspektrums K, der dadurch induzierten K-Homologie- und K-Kohomologietheorie sowie eine Auflistung aller verwendeten Produkte in den Kapiteln 2.1-2.3. Weiterhin wird die Torsionsfreiheit aller K-Homologiegruppen der klassifizierenden Räume $BU(n)$ nachgewiesen sowie die K-Homologie $\widetilde{K}_*(P_\infty\mathbb{C}_+)$ des unendlich-dimensionalen komplex-projektiven Raumes mit zusätzlichem Basispunkt $P_\infty\mathbb{C}_+$ berechnet. $\widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+)$ entspricht - wie gezeigt werden wird - dem Ring N der numerischen Polynome.

In Kapitel 3 wird die Berechnung der K-Homologie $\widetilde{K}_*(K)$ des Bottspektrums K durchgeführt. Kapitel 3.1 liefert neben der Berechnung der gewöhnlichen Homologie

$\widetilde{H}_*(K;\mathbb{Q})$ noch das überraschende Ergebnis, daß die gewöhnliche Homologie $\widetilde{H}_*(K;\mathbb{Q})$ mit $\mathbb{Q}$-Koeffizienten mit der *ganzzahligen* gewöhnlichen Homologie $\widetilde{H}_*(K)$ übereinstimmt.

Die Idee bei der Berechnung von $\widetilde{K}_*(K)$ ist, zunächst eine Teilmenge von $\widetilde{K}_*(K)$ zu finden, so daß auf diese Art eine „Abschätzung nach unten" gegeben ist. Anschließend wird eine „Abschätzung nach oben" gesucht. Dies wird durch den Nachweis der Torsionsfreiheit von $\widetilde{K}_*(K)$ in Kapitel 3.3 erreicht: Die gewünschte übergeordnete Menge ist dann $\widetilde{K}_*(K;\mathbb{Q})$, welche in Kapitel 3.4 mithilfe des Cherncharakters berechnet wird.

In Kapitel 3.5 wird die Ganzzahligkeitseigenschaft bestimmt, die die Elemente aus $\widetilde{K}_*(K)$ genau klassifiziert.

Mithilfe dieser Ganzzahligkeitseigenschaft wird in Kapitel 3.6 die K-Homologie $\widetilde{K}_0(K)$ explizit berechnet und in Kapitel 3.7 mit einer Basis versehen.

Der Inhalt von Kapitel 4 ist die Berechnung der nullten K-Kohomologiegruppe $\widetilde{K}^0(K;\mathbb{Z}_{(p)})$ des Bottspektrums K mit $\mathbb{Z}_{(p)}$-Koeffizienten. Dazu wird in Kapitel 4.1 die Adamsperiodizität mit Koeffizienten beschrieben. In Kapitel 4.2 wird der durch diese Adams-Operation definierte Homomorphismus $\psi^k_{Hom} : B[\omega^{-1}] \longrightarrow \mathbb{Z}_{(p)}$ definiert. Der Zusammenhang von Operationen auf K-Homologie-Ebene, ihren zugehörigen Spektrenabbildungen, die sich als Elemente der K-Kohomologie auffassen lassen, sowie der dadurch definierten Homomorphismen von der K-Homologie in den verwendeten Ring R werden in Kapitel 4.3 näher erläutert.

In Kapitel 4.4 wird die K-Kohomologiegruppe $\widetilde{K}^0(K;\mathbb{Z}_{(p)})$ mithilfe dieser Überlegungen berechnet und somit durch Operationen beschrieben.

Diese Diplomarbeit hat die Intention, die Berechnung der K-Gruppen des Bottspektrums umfassend und soweit als möglich in sich geschlossen zu präsentieren. Sie ist an einigen Stellen sehr ausführlich gehalten, um die doch sehr komplexen Sachverhalte einmal genauer zu beleuchten und transparenter werden zu lassen.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Übersicht

In dieser Diplomarbeit werden neben grundlegenden Kenntnissen aus der Topologie und K-Theorie Kenntnisse über Spektren und die durch sie definierbaren Homologie- und Kohomologie-Theorien vorausgesetzt. Damit aber alle Schritte eines Beweises vollständig nachvollziehbar sind, sind in Anhang A die wichtigsten Definitionen und Sätze der Theorie der Spektren aufgelistet und zusammengefaßt. Werden diese verwendet, so gibt es in der Regel einen Verweis auf den entsprechenden Eintrag im Anhang.

Das Bottspektrum K und seine induzierte K-Homologie- und K-Kohomologietheorie $\widetilde{K}_*(-)$ bzw. $\widetilde{K}^*(-)$ sowie alle in dieser Diplomarbeit verwendeten Produkte werden in Kapitel 2.1 - 2.3 beschrieben.

Sofern innerhalb eines Kapitels in größerem Ausmaß auf Definitionen und Sätze eines Teilgebiets der Topologie, K-Theorie oder allgemein der Mathematik zurückgegriffen wird, werden diese verwendeten Sätze und Definitionen zu Beginn des jeweiligen Kapitels - meist in einem eigenen Paragraphen - nochmals vorgestellt.

In Anhang B findet sich eine Liste aller verwendeten Symbole zur schnellen Referenz.

1.2 Notationen und Konventionen

Die Kategorie der CW-Komplexe und der zellulären Abbildungen zwischen diesen CW-Komplexen wird mit $\mathcal{CW}$, die Kategorie der CW-Komplexe mit Basispunkt und der basispunkterhaltenden zellulären Abbildungen wird mit $\mathcal{CW}_0$ bezeichnet. Einzelne CW-Komplexe werden in der Regel X, Y oder Z genannt.
Um die Gruppe der Homotopieklassen der Abbildungen aus $\mathcal{CW}_0$ zwischen zwei CW-Komplexen $X, Y \in \mathcal{CW}_0$ zu kennzeichnen, wird die Notation $[X, Y]_0$ verwendet. Die Homotopieklasse einer Abbildung $f \in \mathcal{CW}_0$ wird mit $[f]_0$ bezeichnet.

Die Kategorie der CW-Komplexe mit Basispunkt und der *Homotopieklassen* der Abbildungen aus $\mathcal{CW}_0$ erhält die Notation $\mathcal{CW}_0^H$.

Wenn von Spektren gesprochen wird, sind immer CW-Spektren gemeint (s. A.1.1). Sie werden meistens E, F oder G genannt. Zwischen Spektren gibt es sogenannte Spektren-Funktionen sowie Spektren-Morphismen (s. A.1.9 und A.1.11). Letztere bilden zusammen mit den Spektren die Kategorie der Spektren, die mit $\mathcal{SP}$ bezeichnet wird. Mit Spektren-Abbildungen sind immer Spektren-Morphismen gemeint.
Die Gruppe der Homotopieklassen von Spektren-Morphismen zwischen zwei Spektren $E, F \in \mathcal{SP}$ erhält die Notation $[E, F]$. Die Homotopieklasse eines Spektren-Morphismus $f \in \mathcal{SP}$ wird mit $[f]$ bezeichnet.
Die Kategorie der Spektren zusammen mit den *Homotopieklassen* der Spektren-Morphismen aus $\mathcal{SP}$ wird mit $\mathcal{SP}^H$ notiert.

Die reduzierte Einhängung eines CW-Komplexes $X \in \mathcal{CW}_0$ wird mit SX bezeichnet; es ist also $SX := (X \times I)/_{(X\times\{0\})\cup(\{x_0\}\times I)\cup(X\times\{1\})}$.

Die n-fache reduzierte Einhängung eines CW-Komplexes $X \in \mathcal{CW}_0$ wird durch S^nX dargestellt, und es gilt $S^nX \approx S^n \wedge X$, wobei $S^n \wedge X$ das Smashprodukt der n-Sphäre S^n und des CW-Komplexes X ist.

Die Notation S^n als alleinstehender Term ist für alle $n \in \mathbb{N}$ ausschließlich für die n-Sphäre reserviert. Die Bezeichnung für das Sphärenspektrum ist S (s. A.1.14 c).

Das Einhängungsspektrum eines CW-Komplexes X wird mit $\Sigma^\infty X$ bezeichnet (s. A.1.14 a).

Für ein Spektrum E steht $\Sigma^n E$ für das um $n \in \mathbb{Z}$ nach links verschobene Spektrum (s. A.1.14 b), d. h. es ist $(\Sigma^n E)_k = E_{n+k}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Es gilt $\Sigma^n E \simeq \Sigma^n S \wedge E \simeq S^n \wedge E$ (s. A.2.8).

Die von einem Spektrum E induzierte Homologie- bzw. Kohomologietheorie wird mit $E_*(-)$ bzw. $E^*(-)$ bezeichnet (s. A.3.1 und A.4.3). Da von Spektren induzierte Homologie- und Kohomologietheorien immer reduziert sind, wird hier auf die für reduzierte Theorien häufig verwendete Schreibweise $\widetilde{E}_*(-)$ bzw. $\widetilde{E}^*(-)$ verzichtet.

Eine Ausnahme bilden allerdings die vom Bottspektrum K induzierte K-Homologie und K-Kohomologie. Sie werden als reduzierte Theorien mit $\widetilde{K}_*(-)$ und $\widetilde{K}^*(-)$ bezeichnet. Dies geschieht, um Ergebnisse, die mithilfe der geometrischen Definition von K-Theorie in unreduzierter Form berechnet worden sind, sauber verwenden zu können.

Aus denselben Gründen wird auch die reduzierte gewöhnliche Homologie und Kohomologie mit $\widetilde{H}_*(-)$ bzw. $\widetilde{H}^*(-)$ bezeichnet.

Ist $E \in \mathcal{SP}$ ein Spektrum und $E_*(-)$ bzw. $E^*(-)$ die von diesem Spektrum induzierte Homologie- bzw. Kohomologietheorie, dann induziert jede Abbildung f zwischen zwei CW-Komplexen $X, Y \in \mathcal{CW}_0$ oder zwischen zwei Spektren $F, G \in \mathcal{SP}$ jeweils eine Abbildung in E-Homologie bzw. in E-Kohomologie. Diese induzierten Abbildungen werden mit $E_*(f) : E_*(-) \longrightarrow E_*(-)$ bzw. mit $E^*(f) : E^*(-) \longrightarrow E^*(-)$ bezeichnet.

Die abkürzende Schreibweise f_* ist zur Kennzeichnung der von der Abbildung f in *Homotopie* induzierten Abbildung $f_* : \pi_*(-) \longrightarrow \pi_*(-)$ reserviert.

Um eine überfrachtete Notation zu vermeiden, wird in Ausnahmefällen die Kurzschreibweise f_* bzw. f^* auch für induzierte Abbildungen in Spektrenhomologie bzw. Spektrenkohomologie verwendet, es ist dann aber ausdrücklich vermerkt.

Kapitel 2

Das Bottspektrum $\boldsymbol{K}$ und seine induzierten Theorien $\widetilde{\boldsymbol{K}}_*(-)$ und $\widetilde{\boldsymbol{K}}^*(-)$

Ziel dieses Kapitels ist es, die Voraussetzungen zur Berechnung der K-Homologie $\widetilde{K}_*(K)$ des Bottspektrums K und der K-Kohomologie $\widetilde{K}^*(K;\mathbb{Z}_{(p)})$ des Bottspektrums K mit $\mathbb{Z}_{(p)}$-Koeffizienten zu schaffen.

So werden in den ersten beiden Kapiteln 2.1 und 2.2 das Bottspektrum K sowie die dadurch induzierte K-Homologie- und K-Kohomologietheorie $\widetilde{K}_*(-)$ bzw. $\widetilde{K}^*(-)$ beschrieben. Anschließend wird in Kapitel 2.3 auf die Produkte in K-Homologie und K-Kohomologie eingegangen.

In Kapitel 2.4 wird die Torsionsfreiheit aller K-Homologiegruppen $\widetilde{K}_i(BU(n))$ der klassifizierenden Räume $BU(n)$ nachgewiesen, worauf in späteren Kapiteln wieder zurückgegriffen werden wird.

Kapitel 2.5 beinhaltet die Berechnung der K-Homologiegruppen $\widetilde{K}_n(P_\infty\mathbb{C}_+)$ des unendlich-dimensionalen komplex-projektiven Raumes mit zusätzlichem Basispunkt $P_\infty\mathbb{C}_+$ sowie die Konstruktion einer Basis von $\widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+)$.

2.1 Das Bottspektrum $\boldsymbol{K}$

Die Familie $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ von CW-Komplexen K_n, die das Bottspektrum K definiert, besteht aus nur zwei CW-Komplexen, die sich periodisch wiederholen: Alle CW-Komplexe des Bottspektrums K mit geradem Index sind gleich $\mathbb{Z}\times BU$; die mit ungeradem Index sind gleich U.

Definition 2.1.1: *Das Bottspektrum K wird durch folgende Familie $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ von CW-Komplexen K_n definiert:*

$$\begin{array}{lcc} K_{2n} & = & \mathbb{Z}\times BU \\ K_{2n+1} & = & U \quad . \end{array}$$

Die Abbildungen

$$\begin{array}{lcccc} \varepsilon^K_{2n} & : & S(\mathbb{Z}\times BU) & \longrightarrow & U \\ \varepsilon^K_{2n+1} & : & S(U) & \longrightarrow & \mathbb{Z}\times BU \end{array}$$

werden als adjungierte Abbildungen der Abbildungen

$$\begin{array}{lcccc} h_2 & : & \mathbb{Z}\times BU & \longrightarrow & \Omega U \\ h_1 & : & U & \longrightarrow & \Omega(\mathbb{Z}\times BU) \end{array}$$

definiert.

Bemerkung: Die beiden Abbildungen h_1 und h_2 heißen neben der eigentlichen Bottabbildung $\mathbb{Z}\times BU \xrightarrow{\simeq} \Omega^2 BU$ [6, Theorem 11.60] zuweilen auch Bottabbildungen und sind in [4, §8.1] genau konstruiert worden.

Das Bottspektrum K ist ein Ringspektrum mit Einheit $\iota_K : S \longrightarrow K$. Seine multiplikative Struktur $\mu_K : K\wedge K \longrightarrow K$ bzw. $\mu_K : K_n \wedge K_m \longrightarrow K_{n+m}$ ist anschaulich als Repräsentation des äußeren Produkts von virtuellen Bündeln der Dimension n und m gegeben.

Sei R ein Ring mit $\mathbb{Z}\subset R\subseteq\mathbb{Q}$ und MR das zugehörige Moore-Spektrum mit Multiplikation $\mu_{MR} : MR\wedge MR \longrightarrow MR$ (s. A.6).

Dann läßt sich zum Ring R das Spektrum KR durch

$$KR := K\wedge MR$$

definieren.

Die Multiplikation $\mu_K : K\wedge K \longrightarrow K$ läßt sich dann einerseits via

$$K\wedge KR = K\wedge K\wedge MR \xrightarrow{\mu_k\wedge id_{MR}} K\wedge MR = KR$$

zu einer Multiplikation

$$\mu : K\wedge KR \longrightarrow KR$$

und andererseits via

$$KR\wedge KR = K\wedge MR\wedge K\wedge MR \simeq K\wedge K\wedge MR\wedge MR \xrightarrow{\mu_k\wedge\mu_{MR}} K\wedge MR = KR$$

zu einer Multiplikation

$$\mu_{KR} : KR \wedge KR \longrightarrow KR$$

erweitern.

2.2 Die vom Bottspektrum induzierte *K*-Homologie- und *K*-Kohomologietheorie

Das Bottspektrum K induziert die (reduzierte) K-Homologie- und K-Kohomologietheorie $\widetilde{K}_*(-)$ und $\widetilde{K}^*(-)$. Für einen Ring R mit $\mathbb{Z} \subset R \subseteq \mathbb{Q}$ induziert das Spektrum $KR = K \wedge MR$ die (reduzierte) K-Homologie- und K-Kohomologietheorie mit R-Koeffizienten $\widetilde{K}_*(-;R)$ und $\widetilde{K}^*(-;R)$.

Definition 2.2.1: *Das Bottspektrum K induziert für alle $n \in \mathbb{Z}$*

a.) K-Homologie und K-Kohomologie für CW-Komplexe $X \in \mathcal{CW}_0$:

$$\begin{aligned} \widetilde{K}_n(X) &:= \pi_n(K \wedge X) &&= [\Sigma^n S, K \wedge X] \\ \widetilde{K}^n(X) &:= [\Sigma^\infty X, \Sigma^n K] &&\cong [\Sigma^{-n} S \wedge X, K] \quad , \end{aligned}$$

b.) K-Homologie und K-Kohomologie für Spektren $F \in \mathcal{SP}$:

$$\begin{aligned} \widetilde{K}_n(F) &:= \pi_n(K \wedge F) &&= [\Sigma^n S, K \wedge F] \\ \widetilde{K}^n(F) &:= [F, \Sigma^n K] &&\cong [\Sigma^{-n} S \wedge F, K] \quad . \end{aligned}$$

Zu einem Ring R mit $\mathbb{Z} \subset R \subseteq \mathbb{Q}$ induziert das Spektrum KR für alle $n \in \mathbb{Z}$

c.) K-Homologie mit R-Koeffizienten für CW-Komplexe $X \in \mathcal{CW}_0$ und Spektren $F \in \mathcal{SP}$:

$$\widetilde{K}_n(-;R) := \widetilde{KR}_n(-) \quad ,$$

d.) K-Kohomologie mit R-Koeffizienten für CW-Komplexe $X \in \mathcal{CW}_0$ und Spektren $F \in \mathcal{SP}$:

$$\widetilde{K}^n(-;R) := \widetilde{KR}^n(-) \quad .$$

Das Bottspektrum K ist ein Ω-Spektrum. Darum gilt folgendes Lemma (s. A.3.2):

Lemma 2.2.2: *Für die n-te Kohomologiegruppe $\widetilde{K}^n(X)$ eines CW-Komplexes $X \in \mathcal{CW}_0$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:*

$$\widetilde{K}^n(X) = [X, K_n]_0 \quad . \qquad \square$$

Bemerkung: Wird für einen beliebigen CW-Komplex $X \in \mathcal{CW}$ der CW-Komplex $X_+ := X \cup \{$*zusätzlicher Basispunkt*$\}$ definiert, dann ist $X_+ \in \mathcal{CW}_0$. Mithilfe der *reduzierten* K-Homologie und K-Kohomologie von $X_+ \in \mathcal{CW}_0$ läßt sich dann auch die *unreduzierte* K-Homologie und K-Kohomologie von $X \in \mathcal{CW}$ definieren:

$$\begin{aligned} K_n(X) &:= \widetilde{K}_n(X_+) \\ K^n(X) &:= \widetilde{K}^n(X_+) \quad . \end{aligned}$$

Diese stimmt mit der geometrischen Definition von K-Homologie und K-Kohomologie überein.

Alle geraden und alle ungeraden K-Homologiegruppen sind jeweils zueinander isomorph. Gleiches gilt für die K-Kohomologiegruppen:

Satz 2.2.3: *Für alle K-Homologie- und K-Kohomologiegruppen $\widetilde{K}_n(-)$ bzw. $\widetilde{K}^n(-)$ gilt für alle CW-Komplexe $X \in \mathcal{CW}_0$ und alle Spektren $F \in \mathcal{SP}$:*

$$\begin{aligned} \beta &: \widetilde{K}_n(-) \xrightarrow{\cong} \widetilde{K}_{n+2}(-) \\ \beta &: \widetilde{K}^n(-) \xrightarrow{\cong} \widetilde{K}^{n-2}(-) \quad . \end{aligned}$$

Der Isomorphismus β heißt Bottperiodizität.

Beweis: Das Spektrum $\Omega^2 K$ werde durch $(\Omega^2 K)_n = \Omega^2 K_n$ definiert. Mit der Bottabbildung $\mathbb{Z} \times BU \xrightarrow{\simeq} \Omega^2 BU = \Omega^2(\mathbb{Z} \times BU)$ (s. z. Bsp. [6, Theorem 11.60]) gilt dann:

$$g : K \xrightarrow{\simeq} \Omega^2 K$$

ist eine Homotopieäquivalenz.

Daraus folgt in K-Kohomologie für CW-Komplexe $X \in \mathcal{CW}_0$ (und genauso für Spektren $F \in \mathcal{SP}$):

$$\widetilde{K}^n(X) \cong [\Sigma^{-n} S \wedge X, K] \cong [\Sigma^{-n} S \wedge X, \Omega^2 K] \cong [\Sigma^{-n+2} S \wedge X, K] \cong \widetilde{K}^{n-2}(X) \quad .$$

Da nun aber $\Omega^2 K \wedge X \not\simeq \Omega^2(K \wedge X)$, wohl aber $\Sigma^2 K \wedge X \simeq \Sigma^2(K \wedge X)$ gilt, muß in K-Homologie wie folgt vorgegangen werden:

Es gibt eine Klasse

$$u \in \widetilde{K}_2(S^0) \cong \widetilde{K}_2(S) = \pi_2(K \wedge S) \cong \pi_2(K) = [\Sigma^2 S, K]$$

mit zugehöriger Abbildung $f_u : \Sigma^2 S \longrightarrow K$, so daß die zur Abbildung

$$\Sigma^2 K \simeq \Sigma^2 S \wedge K \xrightarrow{f_u \wedge id_K} K \wedge K \xrightarrow{\mu_K} K$$

adjungierte Abbildung gerade die Homotopieäquivalenz $g : K \xrightarrow{\simeq} \Omega^2 K$ ist. Diese (bis auf Homotopie) eindeutige Klasse $u \in \widetilde{K}_2(S^0)$ heißt Bottelement.

Dann läßt sich die Abbildung

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^2(K \wedge X) \simeq \Sigma^2 S \wedge K \wedge X \arrow[r, "f_u \wedge id_K \wedge id_X"] & K \wedge K \wedge X \arrow[r, "\mu_k \wedge id_X"] & K \wedge X \arrow[d, equal] \\
\Sigma^2 K \wedge X \arrow[u, "\cong"] \arrow[rr, "ad(g) \wedge id_X"] & & K \wedge X
\end{tikzcd}$$

so konstruieren, daß ihre adjungierte Abbildung

$$K \wedge X \xrightarrow{\simeq} \Omega^2(K \wedge X)$$

eine Homotopieäquivalenz ist. Diese induziert dann für CW-Komplexe $X \in \mathcal{CW}_0$ (und ebenso für Spektren $F \in \mathcal{SP}$) den Isomorphismus

$$[\Sigma^n S, (K \wedge X)] \cong [\Sigma^n S, \Omega^2(K \wedge X)]$$

in Homotopie, und somit gilt in K-Homologie für CW-Komplexe $X \in \mathcal{CW}_0$ (und wieder ebenso für Spektren $F \in \mathcal{SP}$):

$$\begin{aligned}
\widetilde{K}_n(X) \quad &= \pi_n(K \wedge X) = [\Sigma^n S, (K \wedge X)] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \cong \\
&[\Sigma^n S, \Omega^2(K \wedge X)] \cong [\Sigma^{n+2} S, K \wedge X] = \widetilde{K}_{n+2}(X) \quad .
\end{aligned}$$

$\square$

2.3 Produkte

Das Bottspektrum K ist ein kommutatives Ringspektrum mit Einheit $\iota_K : S \longrightarrow K$. Deshalb existieren für die dadurch definierte K-Homologie- und K-Kohomologietheorie fast alle Produkte, die von der gewöhnlichen Homologie und Kohomologie her bekannt sind, und zwar unabhängig davon, ob die K-Homologie oder K-Kohomologie nun auf CW-Komplexe oder Spektren angewendet wird. Folgende Einschränkungen sind jedoch bei den inneren Produkten zu beachten:

Ein inneres K-Homologieprodukt existiert nur dann, wenn die K-Homologie auf einen H-Raum oder ein Ringspektrum angewendet wird. Das resultierende Produkt ist das Pontrjagin-Produkt.

Das innere K-Kohomologieprodukt oder cup-Produkt existiert nur bei Anwendung der K-Kohomologie auf einen CW-Komplex $X \in \mathcal{CW}_0$, da für diesen immer eine Diagonalabbildung $\Delta : X \longrightarrow X \times X$ konstruiert werden kann. Eine solche Diagonalabbildung gibt es aber im allgemeinen für Spektren $F \in \mathcal{SP}$ nicht. Darum läßt sich in der Regel für diesen Fall auch kein inneres K-Kohomologieprodukt definieren.

Da im folgenden das äußere K-Homologieprodukt, das Pontrjagin-Produkt für Ringspektren, das äußere K-Kohomologieprodukt und das Kronecker-Produkt in ihrer allgemeinen Form, sowie das Pontrjagin-Produkt für H-Räume eingeschränkt auf die nullte K-Homologie- bzw. K-Kohomologiegruppe verwendet werden, seien an dieser Stelle kurz ihre Definitionen für den jeweils benötigten Fall notiert:

Definition 2.3.1: *Das K-Homologieprodukt für Spektren F und G*

$$\begin{array}{ccccc}
\wedge : & \widetilde{K}_n(F) & \times & \widetilde{K}_m(G) \longrightarrow & \widetilde{K}_{n+m}(F \wedge G) \\
& \| & & \| & \| \\
& \pi_n(K \wedge F) & \times & \pi_m(K \wedge G) \longrightarrow & \pi_{n+m}(K \wedge F \wedge G) \\
& \| & & \| & \| \\
& [\Sigma^n S, K \wedge F] & \times & [\Sigma^m S, K \wedge G] \longrightarrow & [\Sigma^{n+m} S, K \wedge F \wedge G] \\
& \Cup & & \Cup & \Cup \\
& f & \times & g \longmapsto & f \wedge g
\end{array}$$

wird definiert durch

$$\Sigma^{n+m} S \simeq \Sigma^n S \wedge \Sigma^m S \xrightarrow{f \wedge g} K \wedge F \wedge K \wedge G \simeq K \wedge K \wedge F \wedge G \xrightarrow{\mu_K \wedge id_F \wedge id_G} K \wedge F \wedge G \quad .$$

Um das K-Homologieprodukt für CW-Komplexe zu definieren, müssen in obiger Definition nur die beiden Spektren $E, F \in \mathcal{SP}$ durch die beiden CW-Komplexe $X, Y \in \mathcal{CW}_0$ ersetzt werden.

Unter der Voraussetzung, daß das Spektrum F, dessen K-Homologie betrachtet werden soll, selbst ein Ringspektrum ist, existiert das Pontrjagin-Produkt:

Definition 2.3.2: *Ist F ein Ringspektrum mit Multiplikation $\mu_F : F \wedge F \longrightarrow F$, dann wird als inneres K-Homologieprodukt das Pontrjagin-Produkt*

$$\begin{array}{ccccc}
\cdot : & \widetilde{K}_n(F) & \times & \widetilde{K}_m(F) \longrightarrow & \widetilde{K}_{n+m}(F) \\
& \| & & \| & \| \\
& \pi_n(K \wedge F) & \times & \pi_m(K \wedge F) \longrightarrow & \pi_{n+m}(K \wedge F) \\
& \| & & \| & \| \\
& [\Sigma^n S, K \wedge F] & \times & [\Sigma^m S, K \wedge F] \longrightarrow & [\Sigma^{n+m} S, K \wedge F] \\
& \Cup & & \Cup & \Cup \\
& f & \times & g \longmapsto & f \cdot g
\end{array}$$

definiert durch

$$\Sigma^{n+m} S \simeq \Sigma^n S \wedge \Sigma^m S \xrightarrow{f \wedge g} K \wedge F \wedge K \wedge F \simeq K \wedge K \wedge F \wedge F \xrightarrow{\mu_K \wedge \mu_F} K \wedge F \quad .$$

Besitzt der CW-Komplex $X \in \mathcal{CW}_0$ eine H-Raum-Struktur, läßt sich das Pontrjagin-Produkt definieren. Ist ein beliebiger CW-Komplex $X \in \mathcal{CW}$ mit einer Multiplikation versehen, so daß der CW-Komplex $X_+ \in \mathcal{CW}_0$ ein H-Raum ist, kann das Pontrjaginprodukt ebenfalls definiert werden:

Definition 2.3.3: *Ist $X \in \mathcal{CW}$ ein beliebiger CW-Komplex mit Multiplikation $\mu_X : X \times X \longrightarrow X$, dann läßt sich wegen $(X \times X)_+ = X_+ \wedge X_+$ auch die erweiterte Multiplikation $\mu_{X_+} : (X \times X)_+ = X_+ \wedge X_+ \longrightarrow X_+$ definieren, so daß $X_+ \in \mathcal{CW}_0$ ein H-Raum-Struktur besitzt. Das Pontrjagin-Produkt*

$$\begin{array}{ccccc} \cdot : \widetilde{K}_0(X_+) & \times & \widetilde{K}_0(X_+) & \longrightarrow & \widetilde{K}_0(X_+) \\ \| & & \| & & \| \\ \pi_0(K \wedge X_+) & \times & \pi_0(K \wedge X_+) & \longrightarrow & \pi_0(K \wedge X_+) \\ \| & & \| & & \| \\ [S, K \wedge X_+] & \times & [S, K \wedge X_+] & \longrightarrow & [S, K \wedge X_+] \\ \Cup & & \Cup & & \Cup \\ f & \times & g & \longmapsto & f \cdot g \end{array}$$

wird dann definiert durch

$$S \simeq S \wedge S \xrightarrow{f \wedge g} K \wedge X_+ \wedge K \wedge X_+ \simeq K \wedge K \wedge X_+ \wedge X_+ \xrightarrow{\mu_K \wedge \mu_{X_+}} K \wedge X_+ \quad .$$

Damit sind die gewünschten K-Homologieprodukte definiert. Das K-Kohomologieprodukt ist wie folgt gegeben:

Definition 2.3.4: *Das K-Kohomologieprodukt für Spektren F und G*

$$\begin{array}{ccccc} \wedge : \widetilde{K}^n(F) & \times & \widetilde{K}^m(G) & \longrightarrow & \widetilde{K}^{n+m}(F \wedge G) \\ \| & & \| & & \| \\ [F, \Sigma^n K] & \times & [G, \Sigma^m K] & \longrightarrow & [F \wedge G, \Sigma^{n+m} K] \\ \Cup & & \Cup & & \Cup \\ f & \times & g & \longmapsto & f \wedge g \end{array}$$

wird definiert durch

$$F \wedge G \xrightarrow{f \wedge g} \Sigma^n K \wedge \Sigma^m K \simeq \Sigma^{n+m} S \wedge K \wedge K \xrightarrow{id_{\Sigma^{n+m} S} \wedge \mu_K} \Sigma^{n+m} S \wedge K \simeq \Sigma^{n+m} K \quad .$$

Abschließend folgt nun noch die Definition des Kronecker-Produkts. Sie ist für Spektren $F \in \mathcal{SP}$ angegeben, gilt aber für CW-Komplexe $X \in \mathcal{CW}_0$ genauso (indem F durch das Einhängungsspektrum $\Sigma^\infty X$ von $X \in \mathcal{CW}_0$ ersetzt und $E \wedge \Sigma^\infty X \simeq E \wedge X$ verwendet wird (s. A.2.8)):

Definition 2.3.5:

a.) Das Kronecker-Produkt für Spektren F

$$\begin{array}{ccccc} < -, - > \; : \; \widetilde{K}^n(F) & \otimes & \widetilde{K}_m(F) & \longrightarrow & \widetilde{K}_{n+m}(S^0) \\ \| & & \| & & \| \\ [\Sigma^n F, K] & \otimes & [\Sigma^m S, K \wedge F] & \longrightarrow & [\Sigma^{n+m} S, K] \\ \Cup & & \Cup & & \Cup \\ f & \otimes & g & \longmapsto & < f, g > \end{array}$$

wird definiert durch

$$\Sigma^{n+m}S \simeq S^n \wedge \Sigma^m S \xrightarrow{id_{S^n}\wedge g} S^n \wedge K \wedge F \simeq K \wedge \Sigma^n F \xrightarrow{id_K \wedge f} K \wedge K \xrightarrow{\mu_K} K \quad .$$

b.) *Wird mit der Erweiterung $\mu : K \wedge KR \longrightarrow KR$ von $\mu_K : K \wedge K \longrightarrow K$ gearbeitet, wird das Kronecker-Produkt*

$$\begin{array}{ccccccc} <-,-> : & \widetilde{K}^n(F;R) & \otimes & \widetilde{K}_m(F) & \longrightarrow & \widetilde{K}_{n+m}(S^0;R) \\ & \| & & \| & & \| \\ & [\Sigma^n F, KR] & \otimes & [\Sigma^m S, K \wedge F] & \longrightarrow & [\Sigma^{n+m} S, KR] \\ & \Cup & & \Cup & & \Cup \\ & f & \otimes & g & \longmapsto & <f,g> \end{array}$$

definiert durch

$$\Sigma^{n+m}S \simeq S^n \wedge \Sigma^m S \xrightarrow{id_{S^n}\wedge g} S^n \wedge K \wedge F \simeq K \wedge \Sigma^n F \xrightarrow{id_K \wedge f} K \wedge KR \xrightarrow{\mu} KR \quad .$$

c.) *Wird mit der Erweiterung $\mu_{KR} : KR \wedge KR \longrightarrow KR$ von $\mu_K : K \wedge K \longrightarrow K$ gearbeitet, wird das Kronecker-Produkt*

$$\begin{array}{ccccccc} <-,-> : & \widetilde{K}^n(F;R) & \otimes & \widetilde{K}_m(F;R) & \longrightarrow & \widetilde{K}_{n+m}(S^0;R) \\ & \| & & \| & & \| \\ & [\Sigma^n F, KR] & \otimes & [\Sigma^m S, KR \wedge F] & \longrightarrow & [\Sigma^{n+m} S, KR] \\ & \Cup & & \Cup & & \Cup \\ & f & \otimes & g & \longmapsto & <f,g> \end{array}$$

definiert durch

$$\begin{array}{l} \Sigma^{n+m}S \simeq S^n \wedge \Sigma^m S \xrightarrow{id_{S^n}\wedge g} S^n \wedge KR \wedge F \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \wr| \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad KR \wedge \Sigma^n F \xrightarrow{id_{KR}\wedge f} KR \wedge KR \xrightarrow{\mu_{KR}} KR \quad . \end{array}$$

2.4 Die Torsionsfreiheit von $\widetilde{K}_i(BU(n))$

In diesem Kapitel soll gezeigt werden, daß die i-te K-Homologiegruppe $\widetilde{K}_i(BU(n))$ für alle klassifizierenden Räume $BU(n)$ torsionsfrei ist. Dies wird später in Kapitel 2.5 bei der Berechnung und Bestimmung einer Basis der nullten K-Homologiegruppe $\widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+)$ des unendlich-dimensionalen komplex-projektiven Raumes mit zusätzlichem Basispunkt $P_\infty\mathbb{C}_+$ verwendet werden (denn es gilt ja $P_\infty\mathbb{C} = BU(1)$).
Da die CW-Komplexe des Bottspektrums K mit geradzahligem Index ja auch gerade durch $\mathbb{Z} \times BU$ defniert sind und für den direkten Limes über die klassifizierenden Räume $\varinjlim_n BU(n) = BU$ gilt, wird das Wissen um die Torsionsfreiheit von $\widetilde{K}_i(BU(n))$ auch in Kapitel 3.3 zum Nachweis der Torsionsfreiheit von $\widetilde{K}_*(K)$ von Nutzen sein.

2.4.1 Lemma zur Vorbereitung

Um nachzuweisen, daß für alle $i \in \mathbb{Z}$ die K-Homologie $\widetilde{K}_i(BU(n))$ des klassifizierenden Raumes $BU(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ torsionsfrei ist, wird folgendes Lemma verwendet:

Lemma 2.4.1: *Ist X ein endlicher CW-Komplex mit nur gerade-dimensionalen Zellen, dann gilt für alle $i \in \mathbb{Z}$:*

$$\widetilde{K}_{2i+1}(X) = 0$$
$$\widetilde{K}_{2i}(X) \textit{ ist eine freie abelsche Gruppe} \quad .$$

Beweis: Der Beweis wird mit Induktion über $n \in \mathbb{N}$ geführt, wobei X^n für alle $n \in \mathbb{N}$ das n-Skelett des CW-Komplexes X bezeichnet.

Da X ein endlicher CW-Komplex ist, folgt dann mit $X = X^n$ für ein genügend großes $n \in \mathbb{N}$ die Behauptung.

Der Induktionsanfang für $n = 0$ ist trivial, da das Null-Skelett X^0 eine disjunkte Vereinigung von endlich vielen Null-Zellen ist und somit gilt:

$$\widetilde{K}_{2i+1}(X^0) = 0$$
$$\widetilde{K}_{2i}(X^0) \text{ ist eine freie abelsche Gruppe} \quad .$$

Da der CW-Komplex X nur gerade-dimensionale Zellen hat, reicht es, alle Skelette gerader Dimension X^{2n} zu betrachten.

Nach Konstruktion von CW-Komplexen läßt sich das $(2n+2)$-Skelett X^{2n+2} von X durch Anheften aller $(2n+2)$-Zellen an das $2n$-Skelett X^{2n} von X konstruieren.

Jede Zelle e_α der Dimension $dim(\alpha) = 2n+2$ wird dabei mithilfe einer Abbildung $f_\alpha : \partial(D^{2n+2}) = S^{2n+1} \longrightarrow X^{2n}$ an das $2n$-Skelett X^{2n} von X angeheftet. Wegen $D^{2n+2}/\partial(D^{2n+2}) \simeq S^{2n+2}$ gilt $X^{2n+2}/X^{2n} \simeq \bigvee\limits_{dim(\alpha)=2n+2} S_\alpha^{2n+2}$.

Da hier nur das mehrfache Wedge-Produkt über alle Zellen e_α der Dimension $dim(\alpha) = 2n+2$ benötigt wird, steht im folgenden für $\bigvee\limits_{dim(\alpha)=2n+2} S_\alpha^{2n+2}$ abkürzend $\bigvee S_\alpha^{2n+2}$.

Somit ist also

$$\bigvee S_\alpha^{2n+2} \longrightarrow X^{2n}$$

eine Kofaserung, die folgende Kofaser- oder Puppesequenz induziert:

$$\bigvee S_\alpha^{2n+2} \longrightarrow X^{2n} \longrightarrow X^{2n+2} \longrightarrow \Sigma(\bigvee S_\alpha^{2n+2}) \longrightarrow \Sigma(X^{2n}) \longrightarrow \Sigma(X^{2n+2}) \longrightarrow$$

Unter Verwendung des Einhängungs-Isomorphismus σ induziert diese wiederum folgende lange exakte Sequenz in K-Homologie:

$$\longrightarrow \widetilde{K}_i(\bigvee S_\alpha^{2n+2}) \longrightarrow \widetilde{K}_i(X^{2n}) \longrightarrow \widetilde{K}_i(X^{2n+2}) \longrightarrow \widetilde{K}_{i-1}(\bigvee S_\alpha^{2n+2}) \longrightarrow$$

Nach Induktionsvoraussetzung gelte nun für das $2n$-Skelett X^{2n} von X:

$$\begin{aligned}&\widetilde{K}_{2i+1}(X^{2n}) = 0\\ &\widetilde{K}_{2i}(X^{2n}) \text{ ist eine freie abelsche Gruppe} \quad .\end{aligned}$$

Dann folgt mit der Sequenz

$$\longrightarrow \widetilde{K}_{2i+1}(X^{2n}) \longrightarrow \widetilde{K}_{2i+1}(X^{2n+2}) \longrightarrow \widetilde{K}_{2i}(\bigvee S_\alpha^{2n+2}) \longrightarrow$$

wegen $\widetilde{K}_{2i}(\bigvee S_\alpha^{2n+2}) = 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$, daß auch für das $(2n+2)$-Skelett X^{2n+2} von X gelten muß:

$$\widetilde{K}_{2i+1}(X^{2n+2}) = 0 \quad .$$

Weil $\widetilde{K}_{2i-1}(\bigvee S_\alpha^{2n+2})$ eine freie abelsche Gruppe ist, folgt mit der Sequenz

$$\longrightarrow \widetilde{K}_{2i}(X^{2n}) \longrightarrow \widetilde{K}_{2i}(X^{2n+2}) \longrightarrow \widetilde{K}_{2i-1}(\bigvee S_\alpha^{2n+2}) \longrightarrow \quad ,$$

daß für das $(2n+2)$-Skelett X^{2n+2} von X ebenfalls gelten muß:

$$\widetilde{K}_{2i}(X^{2n+2}) \text{ ist eine freie abelsche Gruppe} \quad .$$

□

2.4.2 Der Nachweis der Torsionsfreiheit

Mit Lemma 2.4.1 läßt sich nun die Torsionsfreiheit von $\widetilde{K}_i(BU(n))$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ nachweisen:

Satz 2.4.2: *Für die K-Homologiegruppen des klassifizierenden Raumes $BU(n)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:*

$$\begin{aligned}&\widetilde{K}_{2i+1}(BU(n)) = 0\\ &\widetilde{K}_{2i}(BU(n)) \textit{ ist torsionsfrei} \quad .\end{aligned}$$

Beweis: Die komplexen Graßmannmannigfaltigkeiten $G_n(\mathbb{C}^m)$, $m \geq n$, sind für alle $n \in \mathbb{Z}$ endliche CW-Komplexe mit nur gerade-dimensionalen Zellen. Obiges Lemma 2.4.1 ist also anwendbar, und es ergibt sich für alle $i \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}&\widetilde{K}_{2i+1}(G_n(\mathbb{C}^m)) = 0\\ &\widetilde{K}_{2i}(G_n(\mathbb{C}^m)) \text{ ist eine freie abelsche Gruppe} \quad .\end{aligned}$$

Da $G_n(\mathbb{C}^m)$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ ein CW-Komplex ist und die K-Homologietheorie das Wedge-Axiom erfüllt (s. A.3.4), gilt nach den Eigenschaften des direkten Limes

$$\varinjlim_m \widetilde{K}_i(G_n(\mathbb{C}^m)) = \widetilde{K}_i(\varinjlim_m G_n(\mathbb{C}^m)) = \widetilde{K}_i(G_n(\mathbb{C}^\infty)) = \widetilde{K}_i(BU(n)) \quad .$$

Damit folgt sofort, daß für alle ungeraden K-Homologiegruppen von $BU(n)$ gilt:

$$\widetilde{K}_{2i+1}(BU(n)) = 0 \quad .$$

Da $\widetilde{K}_{2i}(G_n(\mathbb{C}^m))$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ eine freie abelsche Gruppe ist, ist $\widetilde{K}_{2i}(G_n(\mathbb{C}^m))$ auch torsionsfrei, d.h. die Abbildung

$$\widetilde{K}_{2i}(G_n(\mathbb{C}^m)) \longrightarrow \widetilde{K}_{2i}(G_n(\mathbb{C}^m)) \otimes \mathbb{Q}$$

ist injektiv, und die Sequenz

$$0 \longrightarrow \widetilde{K}_{2i}(G_n(\mathbb{C}^m)) \longrightarrow \widetilde{K}_{2i}(G_n(\mathbb{C}^m)) \otimes \mathbb{Q}$$

ist exakt.

Da der direkte Limes Exaktheit erhält, und ganz allgemein für das Tensorprodukt innerhalb eines direkten Limes

$$\varinjlim_i (A_i \otimes B) = \varinjlim_i A_i \otimes B$$

gilt, folgt sofort, daß die Sequenz

$$0 \longrightarrow \varinjlim_m \widetilde{K}_{2i}(G_n(\mathbb{C}^m)) \longrightarrow \varinjlim_m \widetilde{K}_{2i}(G_n(\mathbb{C}^m)) \otimes \mathbb{Q}$$

und damit also die Sequenz

$$0 \longrightarrow \widetilde{K}_{2i}(BU(n)) \longrightarrow \widetilde{K}_{2i}(BU(n)) \otimes \mathbb{Q}$$

exakt ist.

Somit gilt für alle geraden K-Homologiegruppen von $BU(n)$:

$$\widetilde{K}_{2i}(BU(n)) \text{ ist torsionsfrei} \quad .$$ □

2.5 Die K-Homologie des $P_\infty\mathbb{C}_+$

Mithilfe der als bekannt vorausgesetzten K-Kohomologiegruppen $\widetilde{K}^0(P_n\mathbb{C}_+)$, $\widetilde{K}^1(P_n\mathbb{C}_+)$, $\widetilde{K}^0(P_\infty\mathbb{C}_+)$ und $\widetilde{K}^1(P_\infty\mathbb{C}_+)$ des n-dimensionalen bzw. unendlichdimensionalen komplex-projektiven Raumes mit zusätzlichem Basispunkt $P_n\mathbb{C}_+$ bzw. $P_\infty\mathbb{C}_+$ werden in Paragraph 2.5.1 zunächst die K-Homologiegruppen $\widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+)$ und $\widetilde{K}_1(P_\infty\mathbb{C}_+)$ als additive Gruppen bzw. $\mathbb{Z}$-Moduln berechnet.

Da der $P_\infty\mathbb{C}_+$ eine H-Raum-Struktur besitzt, läßt sich in Paragraph 2.5.2 auf seiner nullten K-Homologiegruppe $\widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+)$ das Pontrjagin-Produkt definieren. Ausgestattet mit dieser multiplikativen Struktur wird $\widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+)$ zu einem Ring, und es wird gezeigt, daß sich alle Basiselemente $\{b_0 = 1, b_1, b_2, \dots\}$ von $\widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+)$ als Binomialpolynome in b_1 darstellen lassen und $\widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+)$ isomorph zum Ring N der numerischen Polynome ist.

2.5.1 Die $\mathbb{Z}$-Moduln $\widetilde{K_0}(P_\infty\mathbb{C}_+)$ und $\widetilde{K_1}(P_\infty\mathbb{C}_+)$

Um die beiden K-Homologiegruppen $\widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+)$ und $\widetilde{K}_1(P_\infty\mathbb{C}_+)$ des unendlich-dimensionalen komplex-projektiven Raumes mit zusätzlichem Basispunkt $P_\infty\mathbb{C}_+$ zu berechnen, wird hier auf seine als bekannt vorausgesetzten K-Kohomologiegruppen

$$\begin{aligned} K^0(P_\infty\mathbb{C}) &= \widetilde{K}^0(P_\infty\mathbb{C}_+) \\ K^1(P_\infty\mathbb{C}) &= \widetilde{K}^1(P_\infty\mathbb{C}_+) \end{aligned}$$

sowie auf die K-Kohomologiegruppen

$$\begin{aligned} K^0(P_n\mathbb{C}) &= \widetilde{K}^0(P_n\mathbb{C}_+) \\ K^1(P_n\mathbb{C}) &= \widetilde{K}^1(P_n\mathbb{C}_+) \end{aligned}$$

des n-dimensionalen komplex-projektiven Raumes mit zusätzlichem Basispunkt $P_n\mathbb{C}_+$ zurückgegriffen ([4, Satz 4.5.2 und Satz 8.3.5]):

Satz 2.5.1: *Es sei [L] die Klasse des kanonischen Linienbündels L über dem $P_\infty\mathbb{C}$ bzw. dessen Einschränkung auf den $P_n\mathbb{C}$ und $x = [L] - 1 \in \widetilde{K}^0(P_\infty\mathbb{C}_+) = K^0(P_\infty\mathbb{C})$. Dann gilt für die erste und nullte K-Kohomologiegruppe des $P_n\mathbb{C}_+$, $n \in \mathbb{N}$:*

$$\begin{aligned} \widetilde{K}^1(P_n\mathbb{C}_+) &= 0 \\ \widetilde{K}^0(P_n\mathbb{C}_+) &= \mathbb{Z}[x]/x^{n+1} \quad . \end{aligned}$$

Für die erste und nullte K-Kohomolgiegruppe des $P_\infty\mathbb{C}_+$ gilt:

$$\begin{aligned} \widetilde{K}^1(P_\infty\mathbb{C}_+) &= 0 \\ \widetilde{K}^0(P_\infty\mathbb{C}_+) &= \mathbb{Z}[[x]] \quad . \end{aligned} \qquad \Box$$

Da der $P_n\mathbb{C}_+$ ein endlicher CW-Komplex ist mit $Ext^1_{\mathbb{Z}}(\widetilde{K}^{i+1}(P_n\mathbb{C}_+),\mathbb{Z}) = 0$, gilt nach dem Satz über universelle Koeffizienten ([4, Satz 11.4.1]) für die K-Homologiegruppen $\widetilde{K}_i(P_n\mathbb{C}_+)$ des $P_n\mathbb{C}_+$:

$$\widetilde{K}_i(P_n\mathbb{C}_+) = Hom(\widetilde{K}^i(P_n\mathbb{C}_+),\mathbb{Z}) \quad .$$

Damit gilt dann der folgende Satz:

Satz 2.5.2: *Für die K-Homologiegruppen $\widetilde{K}_1(P_n\mathbb{C}_+)$ und $\widetilde{K}_0(P_n\mathbb{C}_+)$ des n-dimensionalen komplex-projektiven Raumes mit zusätzlichem Basispunkt $P_n\mathbb{C}_+$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:*

$$\widetilde{K}_1(P_n\mathbb{C}_+) = 0$$
$$\widetilde{K}_0(P_n\mathbb{C}_+) \text{ ist der freie } \mathbb{Z}\text{-Modul mit Basis } \{b_0 = 1, b_1, \dots, b_n\} \quad .$$

Dabei bezeichne $\{b_0 = 1, b_1, \dots, b_n\}$ die zu $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ duale Basis bezüglich des Kronecker-Produkts

$$< -, - >: \widetilde{K}^0(P_n\mathbb{C}_+) \times \widetilde{K}_0(P_n\mathbb{C}_+) \longrightarrow \widetilde{K}_0(S^0) = \mathbb{Z} \quad . \qquad \square$$

Für den $P_\infty\mathbb{C}_+$ läßt sich obiges Argument nicht verwenden, aber wegen $P_\infty\mathbb{C}_+ = \varinjlim_n P_n\mathbb{C}_+$ und $\widetilde{K}_i(P_\infty\mathbb{C}_+) = \widetilde{K}_i(\varinjlim_n P_n\mathbb{C}_+) = \varinjlim_n \widetilde{K}_i(P_n\mathbb{C}_+)$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich der folgende Satz:

Satz 2.5.3: *Es gilt:*

$$\widetilde{K}_1(P_\infty\mathbb{C}_+) = 0$$
$$\widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+) \text{ ist der freie } \mathbb{Z}\text{-Modul mit Basis } \{b_0 = 1, b_1, b_2, b_3, \dots\} \quad . \qquad \square$$

2.5.2 Der Ring $\widetilde{K_0}(P_\infty\mathbb{C}_+)$

Die nullte K-Homologiegruppe $\widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+)$ des $P_\infty\mathbb{C}_+$ ist der freie $\mathbb{Z}$-Modul mit Basis $\{b_0 = 1, b_1, b_2, b_3 \dots\}$. Seine Basis soll nun näher untersucht werden.

Dazu sei

$$\mu_{P_\infty\mathbb{C}} : P_\infty\mathbb{C} \times P_\infty\mathbb{C} \longrightarrow P_\infty\mathbb{C}$$

die klassifizierende Abbildung von $[L]\hat{\otimes}[L]$, wobei $[L]\hat{\otimes}[L] \in K^0(P_\infty\mathbb{C} \times P_\infty\mathbb{C}) = \widetilde{K}^0((P_\infty\mathbb{C} \times P_\infty\mathbb{C})_+)$ das äußere Produkt des kanonischen Linienbündels mit sich selbst bezeichnet.

Wegen $(P_\infty\mathbb{C} \times P_\infty\mathbb{C})_+ = P_\infty\mathbb{C}_+ \wedge P_\infty\mathbb{C}_+$ läßt sich die Abbildung $\mu_{P_\infty\mathbb{C}}$ zu einer Abbildung

$$\mu_{P_\infty\mathbb{C}_+} : (P_\infty\mathbb{C} \times P_\infty\mathbb{C})_+ = P_\infty\mathbb{C}_+ \wedge P_\infty\mathbb{C}_+ \longrightarrow P_\infty\mathbb{C}_+$$

erweitern.

Mit dieser Multiplikation $\mu_{P_\infty\mathbb{C}_+}$ wird der $P_\infty\mathbb{C}_+$ zu einem H-Raum, und das Pontrjagin-Produkt

$$\cdot : \widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+) \times \widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+) \longrightarrow \widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+)$$

läßt sich definieren.

Zusätzlich induziert die Abbildung $\mu_{P_\infty\mathbb{C}_+}$ folgende Abbildung in K-Kohomologie:

$$\widetilde{K}^*(\mu_{P_\infty\mathbb{C}_+}) : \widetilde{K}^0(P_\infty\mathbb{C}_+) \longrightarrow \widetilde{K}^0(P_\infty\mathbb{C}_+ \wedge P_\infty\mathbb{C}_+) \quad ,$$

die offensichtlich mit der von der Abbildung $\mu_{P_\infty\mathbb{C}}$ in (zunächst unreduzierter) K-Kohomologie induzierten Abbildung

$$K^*(\mu_{P_\infty\mathbb{C}}) : K^0(P_\infty\mathbb{C}) \longrightarrow K^0(P_\infty\mathbb{C} \times P_\infty\mathbb{C})$$

übereinstimmt, so daß also gilt:

$$\widetilde{K}^*(\mu_{P_\infty\mathbb{C}_+})([L]) = K^*(\mu_{P_\infty\mathbb{C}})([L]) = [L]\hat{\otimes}[L] \quad .$$

Notation : *Zur Vereinfachung der Notation gilt nun in diesem Unterkapitel folgende Abkürzung:*

$$\begin{aligned} \mu^* &:= \widetilde{K}^*(\mu_{P_\infty\mathbb{C}_+}) = K^*(\mu_{P_\infty\mathbb{C}}) \\ \mu_* &:= \widetilde{K}_*(\mu_{P_\infty\mathbb{C}_+}) = K_*(\mu_{P_\infty\mathbb{C}}) \quad . \end{aligned}$$

Bemerkung: Für eine beliebige Variable x sei

$$\begin{pmatrix} x \\ n \end{pmatrix} = \frac{x(x-1)(x-2)...(x-(n-1))}{n!}$$

das übliche Binomialpolynom. Es läßt sich auch in der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ n \end{pmatrix} = \frac{x(x-1)(x-2)...(x-(n-1))}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{s(n,k)}{n!}\, x^k \in \mathbb{Q}[x]$$

darstellen, wobei die Terme $s(n,k)$ Stirlingzahlen 1.Art heißen und offensichtlich für jedes $k \in \mathbb{N}$ der k-ten elementar-symmetrischen Funktion in $-1, -2, \ldots, -(n-1)$ entsprechen.

Jedes Binomialpolynom $\begin{pmatrix} x \\ n \end{pmatrix}$ hat die Eigenschaft, beim Einsetzen einer ganzen Zahl als Ergebnis wieder eine ganze Zahl zu liefern, obwohl die $\frac{s(n,k)}{n!}$ in der Regel echte rationale Zahlen sind.

Polynome $f \in \mathbb{Q}[x]$ mit der Eigenschaft $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ heißen numerisch.

Sie bilden offensichtlich einen Unterring $N \subset \mathbb{Q}[x]$, und es gilt folgender wohlbekannter Satz:

Satz 2.5.4: *Der Ring der numerischen Polynome*

$$N := \{f \in \mathbb{Q}[x] \mid f(k) \in \mathbb{Z} \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}\}$$

ist frei als $\mathbb{Z}$-Modul mit Basis

$$\{1, x, \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 3 \end{pmatrix}, \dots\} \quad . \qquad \square$$

Mithilfe des oben hergeleiteten Pontrjagin-Produkts wird $\widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+)$ zu einem Ring, und es lassen sich nun zwei Basiselemente b_i und $b_j \in \widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+)$ miteinander verknüpfen. Nach Konstruktion des Pontrjagin-Produkts liegt das Ergebnis $b_i \cdot b_j$ wieder in $\widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+)$ und ist - da $\widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+)$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul ist - von der Form

$$b_i \cdot b_j = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{i,j}\, b_k \text{ mit } c_k^{i,j} \in \mathbb{Z} \quad .$$

Um für ein festes $q \in \mathbb{Z}$ den Koeffizienten $c_q^{i,j} \in \mathbb{Z}$ näher zu bestimmen, wird nun das Kronecker-Produkt von $x^q \in \widetilde{K}^0(P_\infty\mathbb{C}_+)$ und $b_i \cdot b_j \in \widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+)$ betrachtet, denn es gilt:

$$< x^q, b_i \cdot b_j >=< x^q, \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{i,j} b_k >= \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{i,j} < x^q, b_k >= c_q^{i,j} \quad ,$$

denn $< x^q, b_k >$ nimmt nach Definition von x^q nur für $q = k$ den Wert Eins an und ist ansonsten Null.

Nun können folgende Umformungen vorgenommen werden:

$$\begin{aligned} c_q^{i,j} &= < x^q, b_i \cdot b_j > \\ &= < x^q, \mu_*(b_i \times b_j) > && \text{nach Definition des Pontrjagin-Produkts} \\ &= < \mu^*(x^q), b_i \times b_j > && \text{nach Eigenschaften des Kronecker-Produkts} \\ &= < (\mu^*(x))^q, b_i \times b_j > && \text{nach Eigenschaften der Abbildung } \mu^* \quad . \end{aligned}$$

Es müssen nun also noch $\mu^*(x)$ und dann dessen q-te Potenz berechnet werden:

$$\begin{aligned} \mu^*(x) &= \mu^*([L] - 1) \\ &= \mu^*([L]) - \mu^*(1) \\ &= [L]\hat{\otimes}[L] - 1\hat{\otimes}1 \\ &= x\hat{\otimes}x + x\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mu^*(x))^q &= (x\hat{\otimes}x + x\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}x)^q \\ &= \sum_{n=0}^{q}\sum_{m=0}^{n} \begin{pmatrix} q \\ n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} x^{q-m} \,\hat{\otimes}\, x^{q-n+m} \end{aligned}$$

Mit diesen Ergebnissen läßt sich nun der Koeffizient $c_q^{i,j}$ endgültig bestimmen:

$$\begin{aligned} c_q^{i,j} &= < (\mu^*(x))^q, b_i \times b_j > \\ &= \sum_{n=0}^{q} \sum_{m=0}^{n} \binom{q}{n} \binom{n}{m} < x^{q-m}, b_i > \cdot < x^{q-n+m}, b_j > \\ &= \binom{q}{2q-i-j} \binom{2q-i-j}{q-i} < x^i, b_i > \cdot < x^j, b_j > \\ &= \binom{q}{2q-i-j} \binom{2q-i-j}{q-i} \quad . \end{aligned}$$

Damit sind nun auch alle Koeffizienten $c_k^{i,j}$ mit $k \in \mathbb{N}$ bestimmt, und für die Verknüpfung der beiden Basiselemente b_i und b_j gilt:

$$b_i \cdot b_j = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{i,j} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{2k-i-j} \binom{2k-i-j}{k-i} b_k \quad .$$

Die Überlegung, welche Koeffizienten $c_k^{i,j}$ ungleich Null sind, liefert dann folgendes Endergebnis:

Satz 2.5.5: *Für die Verknüpfung zweier Basiselemente $b_i, b_j \in \widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+)$ gilt:*

$$b_i \cdot b_j = \sum_{k=max(i,j)}^{i+j} \binom{k}{2k-i-j} \binom{2k-i-j}{k-i} b_k \quad .$$

Korollar 2.5.6: *Für die Verknüpfung der beiden Basiselemente $b_1 \in \widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+)$ und $b_n \in \widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+)$, $n \in \mathbb{N}$, gilt:*

$$b_1 \cdot b_n = nb_n + (n+1)b_{n+1} \quad .$$

Mithilfe von Korollar 2.5.6 läßt sich dann der folgende Satz beweisen:

Satz 2.5.7: *Für alle Basiselemente b_n, $n \in \mathbb{N}$, des freien $\mathbb{Z}$-Moduls $\widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+)$ gilt:*

$$b_n = \binom{b_1}{n} \quad .$$

Beweis: Der Beweis wird geführt mit Induktion über $n \in \mathbb{N}$: Der Induktionsanfang für $n = 0$ und $n = 1$ ist trivial.

Sei nun also nach Induktionsvoraussetzung $b_n = \binom{b_1}{n}$.

Nach Korollar 2.5.6 gilt:

$$b_1 \cdot b_n = nb_n + (n+1)b_{n+1} \quad ,$$

also gilt mit Auswertung der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned}(n+1)b_{n+1} &= b_1 \cdot b_n - nb_n \\ &= (b_1 - n)b_n \\ &= (b_1 - n)\binom{b_1}{n} \\ &= (n+1)\binom{b_1}{n+1} \quad .\end{aligned}$$

Da $P_\infty\mathbb{C} = BU(1)$, gilt nach Satz 2.4.2, daß $\widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C})$ und damit auch $\widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+)$ torsionsfrei ist, und damit gilt dann:

$$b_{n+1} = \binom{b_1}{n+1} \quad . \qquad \square$$

Damit läßt sich nun als endgültiges Ergebnis für die Berechnung von $\widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+)$ folgender Satz festhalten:

Satz 2.5.8: *Die nullte K-Homologiegruppe $\widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+)$ des unendlich-dimensionalen komplex-projektiven Raumes mit zusätzlichem Basispunkt $P_\infty\mathbb{C}_+$ ist isomorph zum Ring N der numerischen Polynome:*

$$\widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+) \cong N = \{f \in \mathbb{Q}[x] \mid f(k) \in \mathbb{Z} \textit{ für alle } k \in \mathbb{Z}\} \quad .$$

Bemerkung: Unter diesem Isomorphismus wird b_1 auf x und $b_n = \binom{b_1}{n}$ auf $\binom{x}{n}$ abgebildet.

Kapitel 3

Die K-Homologie $\widetilde{K}_*(K)$ des Bottspektrums K

In diesem Kapitel wird die K-Homologie $\widetilde{K}_*(K)$ des Bottspektrums K berechnet. Dazu wird zunächst in Kapitel 3.1 seine gewöhnliche Homologie $\widetilde{H}_*(K)$ bestimmt. Zur Berechnung von $\widetilde{K}_*(K)$ wird genaugenommen nur die gewöhnliche Homologie $\widetilde{H}_*(K;\mathbb{Q})$ mit $\mathbb{Q}$-Koeffizienten benötigt. Es läßt sich aber überraschenderweise beweisen, daß die gewöhnliche Homologie mit $\mathbb{Q}$-Koeffizienten mit der ganzzahligen Homologie übereinstimmt. Dieses interessante Ergebnis wird hier auch aufgeführt.

Bei der Berechnung von $\widetilde{K}_*(K)$ wird erst eine Teilmenge von $\widetilde{K}_*(K)$ bestimmt, sozusagen eine „Mindestmenge“ von Elementen, die notwendigerweise in $\widetilde{K}_*(K)$ enthalten sein müssen. Diese „Mindestmenge“ wird in Kapitel 3.2 beschrieben.

Anschließend wird durch den Nachweis der Torsionsfreiheit in Kapitel 3.3 die K-Homologie $K_*(K;\mathbb{Q})$ des Bottspektrums K mit $\mathbb{Q}$-Koeffizienten zu einer Gruppe, in der nun $\widetilde{K}_*(K)$ selbst enthalten sein muß.

Mithilfe des Cherncharakters und der in Kapitel 3.1 berechneten gewöhnlichen Homologie $\widetilde{H}_*(K;\mathbb{Q})$ wird in Kapitel 3.4 die Gruppe $K_*(K;\mathbb{Q})$ als Ring der Laurentpolynome $\mathbb{Q}[u,u^{-1},v,v^{-1}]$ berechnet. Die in Kapitel 3.5 beschriebene Ganzzahligkeitseigenschaft erweist sich als genau das Merkmal, welches die Elemente aus $\widetilde{K}_*(K)$ als Teilmenge von $\widetilde{K}_*(K;\mathbb{Q})$ genau klassifiziert.

In Kapitel 3.5 wird die K-Homologiegruppe $\widetilde{K}_0(K)$ dann explizit berechnet und in Kapitel 3.6 mit einer Basis versehen.

3.1 Die gewöhnliche Homologie $\widetilde{H}_*(K)$

Um die gewöhnliche Homologie $\widetilde{H}_*(K)$ des Bottspektrums K zu berechnen, wird hier zunächst die gewöhnliche Homologie des Bottspektrums K mit $\mathbb{Q}$-Koeffizienten

$\widetilde{H}_*(K;\mathbb{Q})$ bestimmt. Dann wird gezeigt, daß diese überraschenderweise zur gewöhnlichen Homologie des Bottspektrums K mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten $\widetilde{H}_*(K;\mathbb{Z})$ isomorph ist. Damit gilt dann $\widetilde{H}_*(K) = \widetilde{H}_*(K;\mathbb{Z}) \cong \widetilde{H}_*(K;\mathbb{Q})$.
Die gwöhnliche Homologie $\widetilde{H}_*(K;\mathbb{Q})$ wird in Kapitel 3.4.2 zur Berechnung der K-Homologie $\widetilde{K}_*(K;\mathbb{Q})$ des Bottspektrums K mit $\mathbb{Q}$-Koeffizienten verwendet.

3.1.1 Die gewöhnliche Homologie $\widetilde{H}_*(K;\mathbb{Q})$

Nach einem Satz von Serre sind die stabilen Homotopiegruppen der Null-Sphäre $\pi_n^s(S^0)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, endlich. Für $n = 0$ gilt $\pi_0^s(S^0) = \mathbb{Z}$. Wegen $\pi_n^s(S^0;\mathbb{Q}) \cong \pi_n^s(S^0) \otimes \mathbb{Q}$ folgt daraus sofort

$$\pi_n^s(S^0;\mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q} & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} .$$

Für die gewöhnlichen Homologiegruppen der Null-Sphäre mit $\mathbb{Q}$-Koeffizienten gilt ebenfalls:

$$\widetilde{H}_n(S^0;\mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q} & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} .$$

Also stimmen die Koeffizienten beider Homologietheorien überein. Der Hurewicz-Homomorphismus mit $\mathbb{Q}$-Koeffizienten $h_H : \pi_n^s(-;\mathbb{Q}) \longrightarrow \widetilde{H}_n(-;\mathbb{Q})$ ist damit ein Isomorphismus auf den Koeffizienten beider Theorien für alle $n \in \mathbb{Z}$. Mit dem Vergleichssatz für Homologietheorien ergibt sich daraus sofort folgendes Lemma:

Lemma 3.1.1: *Für jeden CW-Komplex X und alle $n \in \mathbb{Z}$ ist der rationale Hurewicz-Homomorphismus*

$$h_H : \pi_n^s(X;\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} \widetilde{H}_n(X;\mathbb{Q})$$

ein Isomorphismus. □

Dieser Isomorphismus läßt sich auf Spektren erweitern:

Lemma 3.1.2: *Für jedes Spektrum E und alle $n \in \mathbb{Z}$ ist der rationale Hurewicz-Homomorphismus*

$$h_H : \pi_n(E;\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} \widetilde{H}_n(E;\mathbb{Q})$$

ein Isomorphismus.

Beweis: Für je zwei Spektren E und F gilt stets $F_n(E) \cong \varinjlim_q F_{n+q}(E_q)$ (s. A.4.4). Damit ist $\pi_n(E;\mathbb{Q}) \cong \varinjlim_q \pi_{n+q}^s(E_q;\mathbb{Q})$ und $\widetilde{H}_n(E;\mathbb{Q}) \cong \varinjlim_q \widetilde{H}_{n+q}(E_q;\mathbb{Q})$. Da nach der Definition von Spektren jedes E_q ein CW-Komplex ist, gilt nach Lemma 3.1.1

$\pi^s_{n+q}(E_q;\mathbb{Q}) \cong \widetilde{H}_{n+q}(E_q;\mathbb{Q})$ für alle $n, q \in \mathbb{Z}$. Weil das Bilden des direkten Limes Exaktheit und Isomorphie erhält, folgt dann die Behauptung. □

Mithilfe dieses Isomorphismus und einer isomorphen Umformung von $\pi_n(E;\mathbb{Q})$ gilt dann das folgende Lemma:

Lemma 3.1.3: *Für jedes Spektrum E und alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt:*

$$E_n(S^0) \otimes \mathbb{Q} \cong \pi_n(E;\mathbb{Q}) \xrightarrow[h_H]{\cong} \widetilde{H}_n(E;\mathbb{Q}) \quad .$$

Beweis: Es ist $E_n(S^0) \otimes \mathbb{Q} \cong E_n(S^0;\mathbb{Q}) \cong E_n(S;\mathbb{Q})$. Da für je zwei Spektren E und F stets gilt $E_n(F) \cong F_n(E)$ (s. A.4.6), ist auch $E_n(S;\mathbb{Q}) = \pi_n(E;\mathbb{Q})$. Mit dem Isomorphismus $h_H : \pi_n(E;\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} \widetilde{H}_n(E;\mathbb{Q})$ aus Lemma 3.1.2 folgt dann die Behauptung. □

Mit Lemma 3.1.3 läßt sich also die gewöhnliche Homologie eines Spektrums E mit $\mathbb{Q}$-Koeffizienten $\widetilde{H}_n(E;\mathbb{Q})$ mithilfe der Koeffizienten $E_n(S^0)$ der Theorie E bestimmen:

$$\widetilde{H}_n(E;\mathbb{Q}) \cong E_n(S^0) \otimes \mathbb{Q} \quad .$$

Dies soll nun zur Berechnung der gewöhnlichen Homologie des Bottspektrums K mit $\mathbb{Q}$-Koeffizienten verwendet werden:

Satz 3.1.4: *Für die gewöhnliche Homologie des Bottspektrums K mit $\mathbb{Q}$-Koeffizienten gilt:*

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_{2n}(K;\mathbb{Q}) &= \mathbb{Q} \\ \widetilde{H}_{2n+1}(K;\mathbb{Q}) &= 0 \quad , \end{aligned}$$

und es ist

$$\widetilde{H}_{2n}(K;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q} \cdot t^n \quad ,$$

wobei $t = h_H(u)$ das Bild des Bottelements $u \in \widetilde{K}_2(S^0)$ unter Anwendung des rationalen Hurewicz-Homomorphismus h_H bezeichnet.

Beweis: Es ist $\widetilde{H}_n(K;\mathbb{Q}) \cong \widetilde{K}_n(S^0) \otimes \mathbb{Q}$ nach Lemma 3.1.3 mit $E = K$ und

$$\begin{aligned} \widetilde{K}_{2n}(S^0) &= \mathbb{Z} \\ \widetilde{K}_{2n+1}(S^0) &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Die Koeffizientengruppen $\widetilde{K}_{2n}(S^0)$ werden jeweils von der n-ten Potenz $u^n \in \widetilde{K}_{2n}(S^0)$ des Bottelements $u \in \widetilde{K}_2(S^0)$ erzeugt. Unter $K_{2n}(S^0) \otimes \mathbb{Q} \cong \pi_{2n}(K;\mathbb{Q}) \xrightarrow[h_H]{\cong} \widetilde{H}_{2n}(K;\mathbb{Q})$ wird u^n auf $t^n = h_H(u^n)$ abgebildet. □

Nachdem nun für alle $n \in \mathbb{Z}$ die einzelnen gewöhnlichen Homologiegruppen mit $\mathbb{Q}$-Koeffizienten $\widetilde{H}_n(K;\mathbb{Q})$ bestimmt worden sind, soll jetzt der Ring

$$\widetilde{H}_*(E;\mathbb{Q}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{H}_n(K;\mathbb{Q})$$

berechnet werden.

Da aber der rationale Hurewicz-Homomorphismus zwischen den Ringen $\pi_*(E;\mathbb{Q})$ und $\widetilde{H}_*(E;\mathbb{Q})$ bereits die Ringstruktur erhält (s. A.7), gelten die beiden Lemmata 3.1.2 und 3.1.3 nicht nur für die einzelnen Gruppen $\pi_n(E;\mathbb{Q})$, $\widetilde{H}_n(E;\mathbb{Q})$, $E_n(S^0)$, sondern auch für die Ringe $\pi_*(E;\mathbb{Q})$, $\widetilde{H}_*(E;\mathbb{Q})$, $E_*(S^0)$, und es gilt damit folgender Satz:

Satz 3.1.5: *Die gewöhnliche Homologie des Bottspektrums K mit $\mathbb{Q}$-Koeffizienten $\widetilde{H}_*(K;\mathbb{Q})$ ist zum Ring der Laurentpolynome $\mathbb{Q}[t,t^{-1}]$ isomorph:*

$$\widetilde{H}_*(K;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[t,t^{-1}] \quad .$$

Dabei bezeichnet $t = h_H(u)$ das Bild des Bottelements $u \in \widetilde{K}_2(S^0)$ unter Anwendung des rationalen Hurewicz-Homomorphismus h_H.

Beweis: Es ist $\widetilde{H}_*(K;\mathbb{Q}) \cong \widetilde{K}_*(S^0)\otimes\mathbb{Q}$ mit $E = K$ und $\widetilde{K}_*(S^0) = \mathbb{Z}[u,u^{-1}]$.

Die Potenzen $u^n \in \widetilde{K}_{2n}(S^0) \subset \widetilde{K}_*(S^0)$ des Bottelements $u \in \widetilde{K}_2(S^0) \subset \widetilde{K}_*(S^0)$ werden unter $K_*(S^0)\otimes\mathbb{Q} \cong \pi_*(K;\mathbb{Q}) \xrightarrow[h_H]{\cong} \widetilde{H}_*(K;\mathbb{Q})$ auf $t^n = h_H(u^n)$ abgebildet. □

Bemerkung: Nach Satz 3.1.4 gilt $\widetilde{H}_{2n}(K;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}\cdot t^n$ und $\widetilde{H}_{2n+1}(K;\mathbb{Q}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt natürlich auch direkt:

$$\widetilde{H}_*(K;\mathbb{Q}) \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{H}_n(K;\mathbb{Q}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{H}_{2n}(K;\mathbb{Q}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{Q}\cdot t^n = \mathbb{Q}[t,t^{-1}] \quad .$$

3.1.2 Der Isomorphismus $\widetilde{H}_*(K)\cong\widetilde{H}_*(K;\mathbb{Q})$

Um diese Isomorphie nachzuweisen, werden die beiden folgenden Lemmata benötigt:

Lemma 3.1.6: *Es gilt:*

$$\widetilde{H}_*(K;\mathbb{Z}/p) = 0 \textit{ für alle Primzahlen } p.$$

Beweis: Sei K das Bottspektrum, $M\mathbb{Z}/p$ das Moore-Spektrum zur Gruppe $\mathbb{Z}/p$ und $H\mathbb{Z}$ das ganzzahlige Eilenberg-MacLane-Spektrum mit $\widetilde{H}_*(-) = \widetilde{H}_*(-;\mathbb{Z}) = (H\mathbb{Z})_*(-)$(s. A.6).

Dann definiert das Spektrum

$$K\mathbb{Z}/p := K \wedge M\mathbb{Z}/p$$

die K-Homologie mit $\mathbb{Z}/p$-Koeffizienten

$$\widetilde{K}_*(-;\mathbb{Z}/p) = (K\mathbb{Z}/p)_*(-).$$

Analog definiert das Spektrum

$$H\mathbb{Z}/p := H\mathbb{Z} \wedge M\mathbb{Z}/p$$

die gewöhnliche Homologie mit $\mathbb{Z}/p$-Koeffizienten

$$\widetilde{H}_*(-;\mathbb{Z}/p) = (H\mathbb{Z}/p)_*(-).$$

Die Adams-Periodizitätsabbildung ([4, 10.1]) zwischen Moore-Räumen läßt sich auf Moore-Spektren erweitern:

$$A : S^q M\mathbb{Z}/p \longrightarrow M\mathbb{Z}/p$$

mit $q = 2p - 2$ für $p > 2$ und $q = 8$ für $p = 2$. Sie induziert einen Isomorphismus in K-Homologie mit $\mathbb{Z}/p$-Koeffizienten

$$A_* : \widetilde{K}_n(-;\mathbb{Z}/p) \xrightarrow{\cong} \widetilde{K}_{n+q}(-;\mathbb{Z}/p).$$

Der Isomorphismus A_* wird nun auf das ganzzahlige Eilenberg-MacLane-Spektrum $H\mathbb{Z}$ angewendet. Da für je zwei Spektren E und F stets $E_n(F) \cong F_n(E)$ gilt (s. A.4.6), ist $\widetilde{K}_n(H\mathbb{Z};\mathbb{Z}/p) = (K\mathbb{Z}/p)_n(H\mathbb{Z}) = (H\mathbb{Z})_n(K\mathbb{Z}/p) = \widetilde{H}_n(K\mathbb{Z}/p) = \widetilde{H}_{n+q}(S^q K\mathbb{Z}/p)$ und $\widetilde{K}_{n+q}(H\mathbb{Z};\mathbb{Z}/p) = (K\mathbb{Z}/p)_{n+q}(H\mathbb{Z}) = \widetilde{H}_{n+q}(K\mathbb{Z}/p)$.

Damit ergibt sich

$$A_* : \widetilde{H}_n(S^q K\mathbb{Z}/p) \xrightarrow{\cong} \widetilde{H}_n(K\mathbb{Z}/p).$$

Andererseits muß aus Dimensionsgründen

$$A_* : \widetilde{H}_n(S^q M\mathbb{Z}/p) \longrightarrow \widetilde{H}_n(M\mathbb{Z}/p)$$

die Null-Abbildung sein, und mit der Künnethformel folgt, daß auch

$$A_* : \widetilde{H}_n(S^q M\mathbb{Z}/p \wedge K) \longrightarrow \widetilde{H}_n(M\mathbb{Z}/p \wedge K)$$

die Null-Abbildung ist.

Nach Definition von $K\mathbb{Z}/p$ als $K\mathbb{Z}/p = K \wedge M\mathbb{Z}/p$ ist damit also auch

$$A_* : \widetilde{H}_n(S^q K\mathbb{Z}/p) \xrightarrow{\cong} \widetilde{H}_n(K\mathbb{Z}/p)$$

die Null-Abbildung, und es folgt sofort $\widetilde{H}_n(K\mathbb{Z}/p) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und alle Primzahlen p.

Nun gilt:

$$\widetilde{H}_n(K\mathbb{Z}/p) = \widetilde{H}_n(K\mathbb{Z}/p;\mathbb{Z}) = \widetilde{H}_n(K;\mathbb{Z}/p),$$

denn

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}_n(K\mathbb{Z}/p;\mathbb{Z}) &\overset{(1)}{=} (H\mathbb{Z})_n(K\mathbb{Z}/p) && \overset{(4)}{=} \pi_n(H\mathbb{Z} \wedge M\mathbb{Z}/p \wedge K) \\
&\overset{(2)}{=} \pi_n(H\mathbb{Z} \wedge K\mathbb{Z}/p) && \overset{(5)}{=} \pi_n(H\mathbb{Z}/p \wedge K) \\
&\overset{(3)}{=} \pi_n(H\mathbb{Z} \wedge K \wedge M\mathbb{Z}/p) && \overset{(6)}{=} (H\mathbb{Z}/p)_n(K) \quad \overset{(7)}{=} \widetilde{H}_n(K;\mathbb{Z}/p) \quad .
\end{aligned}$$

Damit gilt $\widetilde{H}_n(K;\mathbb{Z}/p) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und alle Primzahlen p, und somit ist die Behauptung bewiesen. □

Lemma 3.1.7: *Ist E ein Spektrum mit $\widetilde{H}_*(E;\mathbb{Z}/p) = 0$ für alle Primzahlen p, dann ist $\widetilde{H}_*(E)$ ein rationaler Vektorraum, d. h. es gilt:*

$$\widetilde{H}_*(E) = \widetilde{H}_*(E;\mathbb{Q}) \quad .$$

Beweis: Es gilt $\widetilde{H}_n(E;\mathbb{Z}/p) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und alle Primzahlen p.

Ist nun $m \in \mathbb{N}$ vorgegeben und p ein Primfaktor von m, dann existiert für ein passendes $m' \in \mathbb{N}$, $m' < m$, die kurze exakte Koeffizientensequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p \longrightarrow \mathbb{Z}/m \longrightarrow \mathbb{Z}/m' \longrightarrow 0 \quad ,$$

die die Bocksteinsequenz

$$\longrightarrow \widetilde{H}_n(E;\mathbb{Z}/p) \longrightarrow \widetilde{H}_n(E;\mathbb{Z}/m) \longrightarrow \widetilde{H}_n(E;\mathbb{Z}/m') \longrightarrow$$

induziert.

Ist nun p' ein Primfaktor von $m' \in \mathbb{N}$ und damit ein weiterer Primfaktor der Primfaktorzerlegung von $m \in \mathbb{N}$, gibt es wieder für ein passendes $m'' \in \mathbb{N}$, $m'' < m'$, eine kurze exakte Koeffizientensequenz, die wiederum eine Bocksteinsequenz induziert.

Auf diese Art und Weise lassen sich zu allen Primfaktoren der Primfaktorzerlegung von $m \in \mathbb{N}$ Koeffizientensequenzen und deren induzierte Bocksteinsequenzen bilden. Aus $\widetilde{H}_n(E;\mathbb{Z}/p) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und alle Primzahlen p folgt dann sukzessiv

$$\widetilde{H}_n(E;\mathbb{Z}/m) = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{Z} \text{ und alle } m \in \mathbb{N}.$$

Für den direkten Limes über alle $\mathbb{Z}/m$ gilt $\varinjlim_m (\mathbb{Z}/m) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Damit folgt

$$\varinjlim_m \widetilde{H}_n(E;\mathbb{Z}/m) = \widetilde{H}_n(E;\varinjlim_m (\mathbb{Z}/m)) = \widetilde{H}_n(E;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0 \quad .$$

Da zudem die Koeffizientensequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

die Bocksteinsequenz

$$\longrightarrow \widetilde{H}_n(E;\mathbb{Z}) \longrightarrow \widetilde{H}_n(E;\mathbb{Q}) \longrightarrow \widetilde{H}_n(E;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow$$

induziert, gilt mit $\widetilde{H}_n(E;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$:

$$\widetilde{H}_n(E) = \widetilde{H}_n(E;\mathbb{Z}) \cong \widetilde{H}_n(E;\mathbb{Q}) \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}$$

und somit die Behauptung. □

Mit Lemma 3.1.6 und Lemma 3.1.7 angewendet auf $E = K$ gilt dann folgender Satz:

Satz 3.1.8: *Die gewöhnliche Homologie des Bottspektrums K mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten ist zur gewöhnlichen Homologie des Bottspektrums K mit $\mathbb{Q}$-Koeffizienten isomorph:*

$$\widetilde{H}_*(K) \cong \widetilde{H}_*(K;\mathbb{Q}) \quad .$$ □

Zusammengefaßt ergibt sich also der folgende Satz:

Satz 3.1.9: *Die gewöhnliche Homologie des Bottspektrums K ist zum Ring der Laurentpolynome $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ isomorph:*

$$\widetilde{H}_*(K) \cong \mathbb{Q}[t, t^{-1}] \quad .$$

Dabei bezeichnet $t = h_H(u)$ das Bild des Bottelements $u \in \widetilde{K}_2(S^0)$ unter Anwendung des rationalen Hurewicz-Homomorphismus h_H. □

3.2 $\mathbb{Z}[u, u^{-1}, v, v^{-1}]$ als Teilmenge von $\widetilde{K}_*(K)$

In diesem Kapitel soll die Inklusion $\mathbb{Z}[u, u^{-1}, v, v^{-1}] \hookrightarrow \widetilde{K}_*(K)$ nachgewiesen werden. Dies geschieht, indem zunächst in Paragraph 3.2.1 die beiden Abbildungen η_R und $\eta_L : \pi_*(K) \longrightarrow \widetilde{K}_*(K)$ konstruiert werden, mit deren Hilfe sich dann in Paragraph 3.2.2 die beiden Elemente u und $v \in \widetilde{K}_2(K)$ definieren lassen. Die Einbettung von $\mathbb{Z}[u, u^{-1}, v, v^{-1}]$ in $\widetilde{K}_*(K)$ wird dann in Paragraph 3.2.3 beschrieben.

3.2.1 Die Abbildungen η_L und $\eta_R : \pi_*(K) \longrightarrow \widetilde{K}_*(K)$

Das Bottspektrum K ist ein Ringspektrum mit Multiplikation $\mu_K : K \wedge K \longrightarrow K$ und Einheit $\iota_K : S \longrightarrow K$. Seine Einheit $\iota_K : S \longrightarrow K$ induziert zwei Homomorphismen:

Einerseits können die beiden Spektren S und K als Raumvariablen aufgefaßt werden, auf die jeweils die K-Homologie angewendet wird. Dann induziert die Einheit $\iota_K : S \longrightarrow K$ einen Homomorphismus in K-Homologie

$$\widetilde{K}_*(\iota_K) : \widetilde{K}_*(S) \longrightarrow \widetilde{K}_*(K) \quad .$$

Unter Verwendung von $\widetilde{K}_*(S) = \pi_*(K \wedge S) \cong \pi_*(K)$ heißt dieser Homomorphismus η_L.

Definition 3.2.1: *Der Homomorphismus*

$$\eta_L : \pi_*(K) \longrightarrow \widetilde{K}_*(K)$$

wird definiert durch

$$\eta_L : \pi_*(K) \cong \pi_*(K \wedge S) \xrightarrow{(id_K \wedge \iota_K)_*} \pi_*(K \wedge K) = \widetilde{K}_*(K) \quad .$$

Andererseits können die beiden Spektren S und K auch als Theorievariablen aufgefaßt und ihre jeweils induzierten Homologietheorien betrachtet werden. Dann induziert die Einheit $\iota_K : S \longrightarrow K$ zunächst für jedes Spektrum E eine Abbildung $\iota_K \wedge id_E : S \wedge E \longrightarrow K \wedge E$, die wiederum eine Abbildung in Homotopie $(\iota_K \wedge id_E)_* : \pi_*(S \wedge E) \longrightarrow \widetilde{K}_*(K \wedge E)$ induziert. Diese ist mit $\pi_*(S \wedge E) \cong \pi_*(E)$ und $\pi_*(K \wedge E) = \widetilde{K}_*(E)$ gerade der von der Einheit $\iota_K : S \longrightarrow K$ induzierte Hurewicz-Homomorphismus für K-Homologie

$$h_K : \pi_*(E) \longrightarrow \widetilde{K}_*(E) \quad .$$

Definition 3.2.2: *Der Hurewicz-Homomorphismus h_K angewendet auf das Bottspektrum heißt*

$$\eta_R : \pi_*(K) \longrightarrow \widetilde{K}_*(K)$$

und wird definiert durch

$$\eta_R : \pi_*(K) \cong \pi_*(S \wedge K) \xrightarrow{(\iota_K \wedge id_K)_*} \pi_*(K \wedge K) = \widetilde{K}_*(K) \quad .$$

Nach Konstruktion der beiden Homomorphismen η_L und η_R bildet der Homomorphismus η_L von der K-Homologie in die K-Homologie ab, bleibt also innerhalb derselben Theorie, während der Homomorphismus η_R von der Homotopie in die K-Homologie abbildet, also von einer Theorie in eine andere wechselt.

Deshalb bildet der Homomorphismus η_L auch in den rechten Faktor von $\widetilde{K}_*(K) = \pi_*(K \wedge K)$ ab, weil dieser die Raumvariable darstellt. Der Homomorphismus η_R bildet in den linken Faktor von $\widetilde{K}_*(K) = \pi_*(K \wedge K)$ ab, weil dieser die Theorievariable darstellt.

Die Indizes L und R deuten an, daß mithilfe des Homomorphismus η_L eine $\pi_*(K)$-Links-Modul-Struktur auf $\widetilde{K}_*(K) = \pi_*(K \wedge K)$ definiert werden kann und mithilfe des Homomorphismus η_R eine $\pi_*(K)$-Rechts-Modul-Struktur.

Die $\pi_*(K)$-Links-Modul-Struktur auf $\widetilde{K}_*(K) = \pi_*(K \wedge K)$ ist gegeben durch:

$$\pi_*(K) \otimes \pi_*(K \wedge K) \cong \pi_*(K \wedge S) \otimes \pi_*(K \wedge K) \xrightarrow{\eta_L \otimes id_{\pi_*(K \wedge K)}} \pi_*(K \wedge K) \otimes \pi_*(K \wedge K)$$
$$\longrightarrow \pi_*(K \wedge K \wedge K \wedge K) \xrightarrow{(id_K \wedge \tau \wedge id_K)_*} \pi_*(K \wedge K \wedge K \wedge K) \xrightarrow{(\mu_K \wedge \mu_K)_*} \pi_*(K \wedge K) \quad .$$

Die $\pi_*(K)$-Rechts-Modul-Struktur läßt sich definieren durch:

$$\pi_*(K \wedge K) \otimes \pi_*(K) \cong \pi_*(K \wedge K) \otimes \pi_*(S \wedge K) \xrightarrow{id_{\pi_*(K \wedge K)} \otimes \eta_R} \pi_*(K \wedge K) \otimes \pi_*(K \wedge K)$$
$$\longrightarrow \pi_*(K \wedge K \wedge K \wedge K) \xrightarrow{(id_K \wedge \tau \wedge id_K)_*} \pi_*(K \wedge K \wedge K \wedge K) \xrightarrow{(\mu_K \wedge \mu_K)_*} \pi_*(K \wedge K) \quad .$$

Dabei bezeichne die Abbildung τ ganz allgemein die Vertauschung zweier Spektren E und F:

$$\tau : E \wedge F \longrightarrow F \wedge E \quad .$$

Die beiden Modul-Strukturen sind unterschiedlich. Sie entsprechen den durch

$$\bullet_L : \pi_*(K) \otimes \pi_*(K \wedge K) \longrightarrow \pi_*(K \wedge K \wedge K) \xrightarrow{(\mu_K \wedge id_K)_*} \pi_*(K \wedge K)$$
$$\bullet_R : \pi_*(K \wedge K) \otimes \pi_*(K) \longrightarrow \pi_*(K \wedge K \wedge K) \xrightarrow{(id_K \wedge \mu_K)_*} \pi_*(K \wedge K)$$

in natürlicher Weise gegebenen $\pi_*(K)$-Modul-Strukturen.

Bemerkung: Die durch ein Spektrum E gegebene E-Homologie-Theorie $E_*(-)$ ist durch $E_*(-) = \pi_*(E \wedge -)$ definiert. Damit ist für jedes Ringspektrum E mit Multiplikation $\mu_E : E \wedge E \longrightarrow E$ durch

$$\pi_*(E) \otimes \pi_*(E \wedge -) \longrightarrow \pi_*(E \wedge E \wedge -) \xrightarrow{(\mu_E \wedge id)_*} \pi_*(E \wedge -)$$

auf ganz natürliche Weise *immer* eine $\pi_*(E)$-*Links*-Modul-Struktur auf $E_*(-) = \pi_*(E \wedge -)$ gegeben.

Eine zusätzliche $\pi_*(E)$-*Rechts*-Modul-Struktur ist nur auf $E_*(E) = \pi_*(E \wedge E)$ möglich, also nur dann, wenn Theorie- und Raumvariable übereinstimmen.

Es gilt also folgendes Lemma:

Lemma 3.2.3: *Für alle $x \in \pi_*(K)$ und alle $z \in \widetilde{K}_*(K) = \pi_*(K \wedge K)$ gilt*

$$\begin{aligned} \eta_L(x) \cdot z &= x \bullet_L z \\ z \cdot \eta_R(x) &= z \bullet_R x \quad . \end{aligned}$$

□

Lemma 3.2.4: *Die beiden Homomorphismen η_L und η_R sind Ringhomomorphismen.*

Beweis: Der Homomorphismus η_L ist von einer stetigen Abbildung auf Ringspektren induziert und somit in natürlicher Weise ein Ringhomomorphismus. Der Homomorphismus η_R ist der Hurewicz-Homomorphismus für K-Homologie angewendet auf das Bottspektrum K. Da das Bottspektrum K ein Ringspektrum ist, ist auch der Hurewicz-Homomorphismus ein Ringhomomorphismus. □

3.2.2 Die Elemente u und $v \in \widetilde{K_2}(K)$

Die beiden Homomorphismen η_L und η_R bilden jeweils die Koeffizienten der K-Homologie-Theorie $\widetilde{K}_*(S^0) \cong \widetilde{K}_*(S) = \pi_*(K \wedge S) \cong \pi_*(K)$ in die K-Homologie des Bottspektrums $\widetilde{K}_*(K)$ ab.

Nun ist $\widetilde{K}_*(S^0) = \bigoplus_n \widetilde{K}_n(S^0) = \bigoplus_n \widetilde{K}_{2n}(S^0) \cong \mathbb{Z}[u, u^{-1}]$, wobei $u \in \widetilde{K}_2(S^0)$ das Bottelement bezeichnet. Darum ist es sinnvoll, danach zu fragen, wohin die Erzeugenden u^n der einzelnen Koeffizientengruppen $\widetilde{K}_{2n}(S^0)$ unter den Homomorphismen η_L und η_R abgebildet werden.

Das Bottelement $u \in \widetilde{K}_2(S^0) \cong \widetilde{K}_2(S) \cong \pi_2(K) = [\Sigma^2 S, K]$ werde durch die Abbildung

$$f_u : \Sigma^2 S \longrightarrow K$$

repräsentiert. Das Element $\eta_L(u) \in \widetilde{K}_2(K) = \pi_2(K \wedge K) = [\Sigma^2 S, K \wedge K]$ wird dann durch die Abbildung

$$f_{\eta_L(u)} : \Sigma^2 S \xrightarrow{f_u} K \simeq K \wedge S \xrightarrow{id_K \wedge \iota_K} K \wedge K$$

repräsentiert. Diese Abbildung läßt sich aber genauso gut darstellen als

$$f_{\eta_L(u)} : \Sigma^2 S \simeq \Sigma^2 S \wedge S \xrightarrow{f_u \wedge \iota_K} K \wedge K \quad .$$

Das hierdurch repräsentierte Element ist dann gerade $u \wedge 1 \in \pi_2(K \wedge K) = \widetilde{K}_2(K)$ mit $1 \in \pi_0(K)$.

Analog ergibt sich bei Anwendung des Homomorphismus η_R auf das Bottelement $u \in \widetilde{K}_2(S^0) \cong \widetilde{K}_2(S) \cong \pi_2(K) = [\Sigma^2 S, K]$ die folgende repräsentierende Abbildung für das Element $\eta_R(u) \in \widetilde{K}_2(K) = \pi_2(K \wedge K) = [\Sigma^2 S, K \wedge K]$:

$$f_{\eta_R(u)} : \Sigma^2 S \xrightarrow{f_u} K \simeq S \wedge K \xrightarrow{\iota_K \wedge id_K} K \wedge K$$

bzw.:

$$f_{\eta_R(u)} : \Sigma^2 S \simeq S \wedge \Sigma^2 S \xrightarrow{\iota_K \wedge f_u} K \wedge K \quad .$$

Das hierdurch repräsentierte Element ist dann gerade $1 \wedge u \in \pi_2(K \wedge K) = \widetilde{K}_2(K)$ mit $1 \in \pi_0(K)$.

Die beiden Elemente $u \wedge 1$ und $1 \wedge u \in \widetilde{K}_2(K)$ erhalten eigene Namen: $u \wedge 1$ wird wieder u genannt, $1 \wedge u$ wird mit v bezeichnet.

Bemerkung: Die erneute Bezeichnung von $u \wedge 1 \in \pi_2(K \wedge K) = \widetilde{K}_2(K)$ mit u ist sicherlich ein Mißbrauch der Notation, leider jedoch allgemein üblich. Im folgenden wird versucht, jeweils darauf hinzuweisen, welches u gerade gemeint ist.

Definition 3.2.5:

$$\begin{aligned} u &:= \eta_L(u) = u \wedge 1 \in \pi_2(K \wedge K) = \widetilde{K}_2(K) \\ v &:= \eta_R(u) = 1 \wedge u \in \pi_2(K \wedge K) = \widetilde{K}_2(K) \end{aligned}$$

Bemerkung: Da für je zwei Spektren E und F immer gilt:

$$E_*(F) = \pi_*(E \wedge F) = \pi_*(F \wedge E) = F_*(E)$$

haben die beiden in $\widetilde{K}_*(K) = \pi_*(K \wedge K)$ vorkommenden „K's“ auf Homotopie-Ebene natürlich denselben Stellenwert, und es stellt sich die Frage, warum nun gerade $\eta_L(u)$ wieder u genannt wird.

Da die beiden Homomorphismen η_L und η_R jeweils Ringhomomorphismen sind, gilt:

$$\begin{aligned} \eta_L(u) &= \eta_L(u \cdot 1) = \eta_L(u) \cdot \eta_L(1) = \eta_L(u) \cdot 1 \\ \eta_R(u) &= \eta_R(1 \cdot u) = \eta_R(1) \cdot \eta_R(u) = 1 \cdot \eta_R(u) \quad . \end{aligned}$$

Unter Verwendung der $\pi_*(K)$-Links- bzw. $\pi_*(K)$-Rechts-Modul-Struktur von $\widetilde{K}_*(K) = \pi_*(K \wedge K)$ gilt dann nach Lemma 3.2.3:

$$\begin{aligned} \eta_L(u) &= \eta_L(u) \cdot 1 = u \bullet_L 1 \\ \eta_R(u) &= 1 \cdot \eta_R(u) = 1 \bullet_R u \quad . \end{aligned}$$

Da rein historisch eine Links-Modul-Struktur als „natürliche“ Modul-Struktur angesehen wird, erhält η_L den Vorzug, und $\eta_L(u) = u \bullet_L 1$ wird wieder u genannt.

Mit Definition 3.2.5 und der Multiplikativität der beiden Homomorphismen η_L und η_R gilt dann sofort folgendes Lemma:

Lemma 3.2.6:

$$\begin{aligned} \eta_L(u^n) &= u^n \in \widetilde{K}_{2n}(K) = \pi_{2n}(K \wedge K) \\ \eta_R(u^n) &= v^n \in \widetilde{K}_{2n}(K) = \pi_{2n}(K \wedge K) \quad . \end{aligned}$$

□

3.2.3 Der Homomorphismus $\mathbb{Z}[u, u^{-1}, v, v^{-1}] \hookrightarrow \widetilde{K}_*(K)$

Die beiden Homomorphismen η_L und η_R bilden beide in die K-Homologie des Bottspektrums $\widetilde{K}_*(K)$ ab. Beide Homomorphismen sind Ringhomomorphismen. Darum müssen alle Monome u^i und v^j für alle $i, j \in \mathbb{Z}$ in der K-Homologie des Bottspektrums $\widetilde{K}_*(K)$ enthalten sein, und es gilt der folgende Satz:

Satz 3.2.7: *Es gilt:*

$$\mathbb{Z}[u, u^{-1}, v, v^{-1}] \hookrightarrow \widetilde{K}_*(K) \quad . \qquad \square$$

Für die nullte K-Homologiegruppe $\widetilde{K}_0(K)$ gilt damit das folgende Korollar:

Korollar 3.2.8: *Es gilt:*

$$\mathbb{Z}[\omega, \omega^{-1}] \hookrightarrow \widetilde{K}_0(K)$$

mit $\omega := v \cdot u^{-1} \in \widetilde{K}_0(K)$.

Beweis: Die Behauptung folgt sofort aus Satz 3.2.7, denn aus Dimensionsgründen können in $\widetilde{K}_0(K)$ nur die Monome $v^n \cdot u^{-n} = (v \cdot u^{-1})^n = \omega^n$ und $v^{-n} \cdot u^n = (v^{-1} \cdot u)^n = \omega^{-n}$ enthalten sein. $\square$

3.3 Die Torsionsfreiheit von $\widetilde{K}_*(K)$ bzw. $\widetilde{K}_*(K)$ als Teilmenge von $\widetilde{K}_*(K; \mathbb{Q})$

Im vorangegangenen Kapitel 3.2 war $\mathbb{Z}[u, u^{-1}, v, v^{-1}]$ in $\widetilde{K}_*(K)$ eingebettet worden, sozusagen als „Abschätzung nach unten“ , welche Elemente unbedingt in $\widetilde{K}_*(K)$ enthalten sein müssen. Nun ist nach einer „Abschätzung nach oben“ gesucht, also einer Menge, in die $\widetilde{K}_*(K)$ selbst eingebettet werden kann. In diesem Kapitel wird nun die Torsionsfreiheit der K-Homologie $\widetilde{K}_*(K)$ des Bottspektrums K nachgewiesen, was gleichbedeutend damit ist, daß die K-Homologie $\widetilde{K}_*(K)$ des Bottspektrums K eine Teilmenge der K-Homologie $\widetilde{K}_*(K; \mathbb{Q})$ des Bottspektrums K mit $\mathbb{Q}$-Koeffizienten ist. Damit ist dann die gewünschte „Abschätzung nach oben“ gefunden.

Satz 3.3.1: *Für die K-Homologiegruppen des Bottspektrums K gilt:*

$$\begin{aligned} &\widetilde{K}_{2i+1}(K) = 0 \\ &\widetilde{K}_{2i}(K) \text{ ist torsionsfrei} \quad . \end{aligned}$$

Beweis: In Satz 2.4.2 wurde bewiesen, daß für die klassifizierenden Räume $BU(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\widetilde{K}_{2i+1}(BU(n)) = 0$$
$$\widetilde{K}_{2i}(BU(n)) \text{ ist torsionsfrei} \quad .$$

Da $BU(n) = G_n(\mathbb{C}^\infty)$ ein CW-Komplex ist und die K-Homologietheorie das Wedge-Axiom erfüllt (s. A.3.4), gilt nach den Eigenschaften des direkten Limes:

$$\varinjlim_n \widetilde{K}_i(BU(n)) = \widetilde{K}_i(\varinjlim_n BU(n)) = \widetilde{K}_i(BU) \quad .$$

Damit folgt sofort, daß für alle ungeraden K-Homologiegruppen von BU und damit auch für alle ungeraden K-Homologiegruppen von $\mathbb{Z} \times BU$ gilt:

$$\widetilde{K}_{2i+1}(\mathbb{Z} \times BU) = 0 \quad .$$

Genauso wie im Beweis von Satz 2.4.2 läßt sich nun beweisen, daß die Sequenz

$$0 \longrightarrow \widetilde{K}_{2i}(BU) \longrightarrow \widetilde{K}_{2i}(BU) \otimes \mathbb{Q}$$

und damit auch die Sequenz

$$0 \longrightarrow \widetilde{K}_{2i}(\mathbb{Z} \times BU) \longrightarrow \widetilde{K}_{2i}(\mathbb{Z} \times BU) \otimes \mathbb{Q}$$

exakt ist.

Somit gilt für alle geraden K-Homologiegruppen von $\mathbb{Z} \times BU$:

$$\widetilde{K}_{2i}(\mathbb{Z} \times BU) \text{ ist torsionsfrei} \quad .$$

Da ganz allgemein für zwei Spektren E und F stets gilt (s. A.4.4):

$$E_i(F) \cong \varinjlim_k E_{i+k}(F_k) \quad ,$$

gilt auch für die K-Homologie des Bottspektrums K:

$$\widetilde{K}_i(K) \cong \varinjlim_k \widetilde{K}_{i+k}(K_k) \quad .$$

Da die Gruppen $\widetilde{K}_{i+2k}(K_{2k})$ kofinal im direkten System von $\widetilde{K}_i(K)$ sind, gilt:

$$\widetilde{K}_i(K) \cong \varinjlim_k \widetilde{K}_{i+2k}(K_{2k})$$

und somit:

$$\begin{aligned} \widetilde{K}_{2i+1}(K) &\cong \varinjlim_k \widetilde{K}_{2i+1+2k}(K_{2k}) \cong \varinjlim_k \widetilde{K}_1(K_0) \\ \widetilde{K}_{2i}(K) &\cong \varinjlim_k \widetilde{K}_{2i+2k}(K_{2k}) \cong \varinjlim_k \widetilde{K}_0(K_0) \quad . \end{aligned}$$

Mit $K_0 = \mathbb{Z} \times BU$ folgt dann die Behauptung. $\square$

Korollar 3.3.2: *Die K-Homologie des Bottspektrums $\widetilde{K}_*(K)$ ist torsionsfrei, bzw. die Abbildung*

$$\widetilde{K}_*(K) \longrightarrow \widetilde{K}_*(K) \otimes \mathbb{Q} \cong \widetilde{K}_*(K,\mathbb{Q})$$

ist injektiv. □

3.4 Die K-Homologie $\widetilde{K}_*(K;\mathbb{Q})$ mit $\mathbb{Q}$-Koeffizienten

Im vorangegangenen Kapitel 3.3 ist gezeigt worden, daß $\widetilde{K}_*(K)$ eine Teilmenge von $\widetilde{K}_*(K;\mathbb{Q})$ ist. Um dieses Ergebnis nun richtig ausnutzen zu können, muß $\widetilde{K}_*(K;\mathbb{Q})$ erst einmal berechnet werden. Das ist das Ziel dieses Kapitels. Da für die Berechnung von $\widetilde{K}_*(K;\mathbb{Q})$ der Cherncharakter verwendet wird, gibt Paragraph 3.4.1 zunächst einen kurzen Überblick über wichtige Eigenschaften des Cherncharakters, die dann in Paragraph 3.4.2 zur Berechnung von $\widetilde{K}_*(K;\mathbb{Q})$ verwendet werden.

3.4.1 Der Cherncharakter

In seiner allgemeinen Form ist der Cherncharakter einer Homologietheorie E wie folgt gegeben ([4]):

Definition 3.4.1: *Seien E und F Ringspektren. Dann ist der Cherncharakter ch^E der Theorie E ein Ringhomomorphismus*

$$ch^E = \bigoplus_{n,i\in\mathbb{Z}} ch_i^{(n)} : \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} E_n(F) \longrightarrow \bigoplus_{n,i\in\mathbb{Z}} \widetilde{H}_{n-i}(F;E_i(S^0;\mathbb{Q})) \quad .$$

Ist $E = F = K$ läßt sich der Cherncharakter ch^K der K-Homologie wie folgt beschreiben:

Korollar 3.4.2: *Der Cherncharakter ch^K der K-Homologie ist gegeben durch*

$$ch^K = \bigoplus_{n,i\in\mathbb{Z}} ch_i^{(n)} : \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} K_n(K) \longrightarrow \bigoplus_{n,i\in\mathbb{Z}} \widetilde{H}_{n-2i}(K;K_{2i}(S^0;\mathbb{Q})) \quad .$$

Es gilt: $\widetilde{H}_{n-2i}(K;K_{2i}(S^0;\mathbb{Q})) \cong \widetilde{H}_{n-2i}(K;\mathbb{Q})$.

Beweis: Wegen $\widetilde{K}_i(S^0;\mathbb{Q}) = 0$ für alle ungeraden $i \in \mathbb{Z}$ gilt auch $\widetilde{H}_{n-i}(K;\widetilde{K}_i(S^0;\mathbb{Q})) = \widetilde{H}_{n-i}(K;0) = 0$ für alle ungeraden $i \in \mathbb{Z}$ bei beliebigem $n \in \mathbb{Z}$. Deshalb ist es ausreichend, sich bei der gewöhnlichen Homologie des Bottspektrums K mit $\widetilde{K}_i(S^0;\mathbb{Q})$-Koeffizienten auf die geraden $i \in \mathbb{Z}$ zu beschränken.

Für alle geraden $i \in \mathbb{Z}$ gilt $\widetilde{K}_i(S^0;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$. □

Es gilt der folgende Satz:

Satz 3.4.3:

1. *Für Ringspektren E und F ist der Cherncharakter ch^E der Theorie E multiplikativ, d.h. für alle $n, m \in \mathbb{Z}$, $x \in E_n(F)$ und $y \in E_m(F)$ gilt:*

$$ch^{(n+m)}(x \cdot y) = ch^{(n)}(x) \cdot ch^{(m)}(y) \quad .$$

2. *Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ und jedes Spektrum F ist der Cherncharakter ch^K der K-Homologie rational ein Isomorphimus:*

$$ch^{(n)} \otimes \mathbb{Q} : \widetilde{K}_n(F;\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \widetilde{H}_{n-2i}(F;\widetilde{K}_{2i}(S^0;\mathbb{Q})) \quad .$$

3. *Bezeichnet $\beta : \widetilde{K}_n(K) \xrightarrow{\cong} \widetilde{K}_{n+2}(K)$ die Bottperiodizität, dargestellt als Multiplikation mit dem Bottelement $u \in \widetilde{K}_2(S^0)$ bzw. $u \in \widetilde{K}_2(K)$, dann gilt für alle Spektren F, alle $n, i \in \mathbb{Z}$ und alle $x \in \widetilde{K}_n(F)$:*

$$ch^{(n+2)}_{2i+2}(\beta(x)) = ch^{(n+2)}_{2i+2}(u \cdot x) = ch^{(n)}_{2i}(x) \quad ,$$

d.h. es kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[dd, mapsto] & \in & \widetilde{K}_n(F) \arrow[r, "ch^{(n)}_{2i}"] \arrow[dd, "\beta"', "\cong"] & \widetilde{H}_{n-2i}(F;\widetilde{K}_{2i}(S^0;\mathbb{Q})) \arrow[d, equal] \\
 & & & \widetilde{H}_{n-2i}(F;\mathbb{Q}) \arrow[d, equal] \\
u \cdot x & \in & \widetilde{K}_{n+2}(F) \arrow[r, "ch^{(n+2)}_{2i+2}"] & \widetilde{H}_{n-2i}(F;\widetilde{K}_{2i+2}(S^0;\mathbb{Q}))
\end{tikzcd}$$

4. *Eingeschränkt auf das Bild des Homomorphismus η_R ist für beliebiges $n \in \mathbb{Z}$ die nullte Komponente $ch^{(n)}_0$ des Cherncharakters ch^K für K-Homologie gerade der Hurewicz-Homomorphismus h_H mit $\mathbb{Q}$-Koeffizienten:*

$$ch^{(n)}_0 \circ \eta_R = h_H \quad ,$$

d.h. es kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(K) \arrow[d, "\eta_R"'] & \subset & \pi_n(K;\mathbb{Q}) \arrow[r, "h_H"] & \widetilde{H}_n(K;\mathbb{Q}) \arrow[d, equal] \\
\widetilde{K}_n(K) & \subset & \widetilde{K}_n(K;\mathbb{Q}) \arrow[r, "ch^{(n)}_0"] & \widetilde{H}_n(K;\mathbb{Q})
\end{tikzcd}$$

3.4.2 Die Berechnung von $\widetilde{K}_*(K;\mathbb{Q})$

Satz 3.4.4: *Alle ungeraden K-Homologiegruppen des Bottspektrums K mit $\mathbb{Q}$-Koeffizienten sind Null, d.h. für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt:*

$$\widetilde{K}_{2n+1}(K;\mathbb{Q}) = 0 \quad .$$

Beweis: Nach Satz 3.3.1 gilt $\widetilde{K}_{2n+1}(K) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Da nach Paragraph 3.3 $\widetilde{K}_*(K)$ torsionsfrei ist, ist die Abbildung $\widetilde{K}_*(K) \longrightarrow \widetilde{K}_*(K;\mathbb{Q})$ injektiv. Daraus folgt sofort die Behauptung.

Alternativ läßt sie sich aber auch wie folgt beweisen:

Nach Satz 3.4.3 (2.) ist der Cherncharakter ch^K der K-Homologie rational für alle $n \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus:

$$ch^{(n)} \otimes \mathbb{Q} : \widetilde{K}_n(K;\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} \widetilde{H}_{n-2i}(K;\widetilde{K}_{2i}(S^0;\mathbb{Q})) = \widetilde{H}_{n-2i}(K;\mathbb{Q}) \quad .$$

Für ungerade $n \in \mathbb{Z}$ ist nach Satz 3.1.4 $\widetilde{H}_{n-2i}(K;\mathbb{Q}) = 0$. □

Satz 3.4.5: *Die nullte K-Homologiegruppe des Bottspektrums K mit $\mathbb{Q}$-Koeffizienten $\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Q})$ ist isomorph zum Ring der Laurent-Polynome $\mathbb{Q}[\omega,\omega^{-1}]$ in ω:*

$$\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[\omega,\omega^{-1}] \quad .$$

Dabei ist $\omega := v \cdot u^{-1} \in \widetilde{K}_0(K) \subset \widetilde{K}_0(K;\mathbb{Q})$ mit $u, v \in \widetilde{K}_2(K)$.

Beweis: Der Cherncharakter ch^K der K-Homologie ist nach Korollar 3.4.2 für $n = 0$ gegeben durch:

$$\widetilde{K}_0(K) \longrightarrow \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \widetilde{H}_{-2i}(K;\widetilde{K}_{2i}(S^0;\mathbb{Q})) \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \widetilde{H}_{-2i}(K;\mathbb{Q}) \quad .$$

Nun ist $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \widetilde{H}_{-2i}(K;\mathbb{Q}) \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \widetilde{H}_{2i}(K;\mathbb{Q}) = \widetilde{H}_*(K;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[t,t^{-1}]$ nach Satz 3.1.5, wobei $t = h_H(u)$ das Bild des Bottelemnts $u \in \widetilde{K}_2(S^0)$ unter Anwendung des Hurewicz-Homomorphismus h_H mit $\mathbb{Q}$-Koeffizienten bezeichnet.

Da nach Satz 3.4.3 (2.) der Cherncharakter ch^K der K-Homologie rational ein Isomorphismus ist, gilt:

$$ch^{(0)} \otimes \mathbb{Q} : \widetilde{K}_0(K;\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \widetilde{H}_{-2i}(K;\mathbb{Q}) \cong \widetilde{H}_*(K;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[t,t^{-1}] \quad .$$

Es gilt also $\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[t,t^{-1}]$.

Sei nun $\omega := v \cdot u^{-1} \in \widetilde{K}_0(K) \subset \widetilde{K}_0(K;\mathbb{Q})$ mit $u = \eta_L(u) \in \widetilde{K}_2(K)$ und $v = \eta_R(u) \in \widetilde{K}_2(K)$ nach Definition 3.2.5.

Um $\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[\omega,\omega^{-1}]$ nachzuweisen, ist also noch zu zeigen, daß $ch^K(\omega^n) = t^n$.

Nach der Definition von ω und t ist $\omega \in \widetilde{K}_0(K)$ und $t \in \widetilde{H}_2(K;\mathbb{Q})$. Es wird also die Komponente $ch_{-2}^{(0)}$ des Cherncharakters ch^K der K-Homologie benötigt:

$$\widetilde{K}_0(K) \xrightarrow{ch_{-2}^{(0)}} \widetilde{H}_{0-(-2)}(K;\widetilde{K}_{-2}(S^0;\mathbb{Q})) = \widetilde{H}_2(K;\mathbb{Q}) \quad .$$

Nach Satz 3.4.3 (3.) gilt:

$$ch_{-2}^{(0)}(\omega) = ch_0^{(2)}(u \cdot \omega) = ch_0^{(2)}(\omega \cdot u) = ch_0^{(2)}(v) \quad .$$

Nun ist $v = \eta_R(u)$ mit $u \in \widetilde{K}_2(S^0)$ und mit Satz 3.4.3 (4.) folgt:

$$ch_0^{(2)}(v) = ch_0^{(2)}(\eta_R(u)) = ch_0^{(2)} \circ \eta_R(u) = h_H(u) = t \quad .$$

Damit ist gezeigt, daß $ch^K(\omega) = t$.

Mit der Multiplikativität des Cherncharakters nach Satz 3.4.3 (1.) folgt für $\omega^n \in \widetilde{K}_0(K)$:

$$ch^K(\omega^n) = t^n \quad .$$

□

Satz 3.4.6: *Die K-Homologie des Bottspektrums K mit $\mathbb{Q}$-Koeffizienten ist zum Ring der Laurentpolynome $\mathbb{Q}[u, u^{-1}, v, v^{-1}]$ in $u, v \in \widetilde{K}_2(K)$ und $u^{-1}, v^{-1} \in \widetilde{K}_{-2}(K)$ isomorph:*

$$\widetilde{K}_*(K; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[u, u^{-1}, v, v^{-1}] \quad .$$

Beweis: Nach Satz 3.4.4 gilt für alle ungeraden K-Homologiegruppen des Bottspektrums K mit $\mathbb{Q}$-Koeffizienten:

$$\widetilde{K}_{2n+1}(K; \mathbb{Q}) = 0 \quad \text{.Nach Satz 3.4.5 gilt:}$$

$$\widetilde{K}_0(K; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[\omega, \omega^{-1}] \quad .$$

Mit der Bottperiodizität $\beta : \widetilde{K}_{n+2}(K) \cong \widetilde{K}_n(K)$ gilt:

$$\widetilde{K}_{n+2}(K) = \widetilde{K}_n(K) \cdot u$$

bzw.

$$\widetilde{K}_{n-2}(K) = \widetilde{K}_n(K) \cdot u^{-1}$$

mit $u \in \widetilde{K}_2(S^0)$ bzw. $u \in \widetilde{K}_2(K)$ und $u^{-1} \in \widetilde{K}_{-2}(K)$. Mit $\omega \cdot u = v$, $\omega^{-1} \cdot u^{-1} = v^{-1}$, $1 \cdot u = u$ und $1 \cdot u^{-1} = u^{-1}$ für $1 \in \widetilde{K}_0(K; \mathbb{Q})$ folgt die Behauptung. □

3.5 Die Ganzzahligkeitseigenschaft

Bisher wurde gezeigt (Korollar 3.2.8, Korollar 3.3.2, Satz 3.4.5), daß für die nullte K-Homologiegruppe $\widetilde{K}_0(K)$ des Bottspektrums K gelten muß:

$$\mathbb{Z}[\omega,\omega^{-1}] \hookrightarrow \widetilde{K}_0(K) \hookrightarrow \widetilde{K}_0(K;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[\omega,\omega^{-1}]$$

mit $\omega = v \cdot u^{-1}$.

Die Frage ist nun, welche Teilmenge von $\mathbb{Q}[\omega,\omega^{-1}]$ die K-Homologiegruppe $\widetilde{K}_0(K)$ genau beschreibt.

Da $\omega = v \cdot u^{-1} \in \widetilde{K}_0(K) \subset \widetilde{K}_0(K;\mathbb{Q})$ ein fest definiertes Element aus $\widetilde{K}_0(K)$ bzw. $\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Q})$ ist, ist natürlich auch $\sum\limits_{i=n}^{m} a_i\omega^i$ mit $a_i \in \mathbb{Q}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq i \leq m$, $n, m \in \mathbb{Z}$, zunächst als Element aus $\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Q})$ zu verstehen.

Unter dem Isomorphismus $\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[\omega,\omega^{-1}]$ wird nun aber aus dem Element $\sum\limits_i a_i\omega^i \in \widetilde{K}_0(K;\mathbb{Q})$ das Polynom $f \in \mathbb{Q}[\omega,\omega^{-1}]$ mit $f(\omega) = \sum\limits_i a_i\omega^i$.

Diese Unterscheidung zwischen dem Element $\sum\limits_i a_i\omega^i \in \widetilde{K}_0(K;\mathbb{Q})$ und dem Polynom $f \in \mathbb{Q}[\omega,\omega^{-1}]$ mit $f(\omega) = \sum\limits_i a_i\omega^i$ ist hilfreich, denn als Polynom ist $f \in \mathbb{Q}[\omega,\omega^{-1}]$ mit $f(\omega) = \sum\limits_i a_i\omega^i$ eine Funktion, in die sich nun auch beliebige andere Werte einsetzen lassen.

Die K-Homologiegruppe $\widetilde{K}_0(K)$ kann nun als Einbettung in den Polynomring $\mathbb{Q}[\omega,\omega^{-1}]$ aufgefaßt werden und besteht somit aus Polynomen $f \in \mathbb{Q}[\omega,\omega^{-1}]$, die zusätzliche Eigenschaften besitzen müssen, um nicht nur Elemente aus $\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Q})$, sondern Elemente aus $\widetilde{K}_0(K)$ zu sein.

Eine solche notwendige Eigenschaft ist die Ganzzahligkeitseigenschaft, die in diesem Kapitel nachgewiesen wird.

Zu diesem Zweck wird in Paragraph 3.5.1 zunächst die Adams-Operation ψ^k vorgestellt, in Paragraph 3.5.2 wird eine Abbildung von $\widetilde{K}_*(K)$ in einen Ring R konstruiert, mit deren Hilfe sich schließlich in Paragraph 3.5.3 die Ganzzahligkeitseigenschaft beweisen läßt.

3.5.1 Die Adams-Operation $\psi^k : \widetilde{K}_*(K) \longrightarrow \widetilde{K}_*(K;R)$

Sei R ein Ring mit $\mathbb{Z} \subset R \subseteq \mathbb{Q}$, in dem $k \in \mathbb{Z}$ invertierbar ist, und KR das Spektrum, welches die K-Homologie mit R-Koeffizienten $\widetilde{K}_*(-;R) = \widetilde{KR}_*(-)$ induziert.

Dann ist die (stabile) Adams-Operation

$$\psi^k : \widetilde{K}_*(-) \longrightarrow \widetilde{K}_*(-;R)$$

wegen $\widetilde{K}_*(-) = \pi_*(K \wedge -)$ und $\widetilde{K}_*(-;R) = \widetilde{KR}_*(-) = \pi_*(KR \wedge -)$ durch eine

Spektrenabbildung

$$\psi^k_{Sp} : K \longrightarrow KR$$

gegeben. Es ist dann

$$\psi^k = (\psi^k_{Sp} \wedge id)_* : \widetilde{K}_*(-) = \pi_*(K \wedge -) \longrightarrow \pi_*(KR \wedge -) = \widetilde{K}_*(-;R) \quad .$$

Lemma 3.5.1: *Für alle Elemente u^i, $v^i \in \widetilde{K}_{2i}(K)$, $i \in \mathbb{Z}$, gilt:*

$$\begin{array}{rcllcl} \psi^k(u^i) & = & k^i u^i & \in & \widetilde{K}_{2i}(K;R) \\ \psi^k(v^i) & = & v^i & \in & \widetilde{K}_{2i}(K;R) & . \end{array}$$

Beweis: Die Adams-Operation $\psi^k : \widetilde{K}_*(K) \longrightarrow \widetilde{K}_*(K;R)$ ist durch die Spektren-Abbildung $\psi^k_{Sp} : K \longrightarrow KR$ gegeben:

$$\psi^k : \widetilde{K}_*(K) = \pi_*(K \wedge K) \xrightarrow{(\psi^k_{Sp} \wedge id_K)_*} \pi_*(KR \wedge K) = \widetilde{KR}_*(K) = \widetilde{K}_*(K;R) \quad .$$

Die Elemente $u, v \in \widetilde{K}_2(K)$ sind durch $u = u \wedge 1 \in \pi_2(K \wedge K) = \widetilde{K}_2(K)$ und $v = 1 \wedge u \in \pi_2(K \wedge K) = \widetilde{K}_2(K)$ mit $u \in \widetilde{K}_2(S^0) \cong \pi_2(K)$ definiert.

Da für das Bottelement $u \in \widetilde{K}_2(S^0) \cong \pi_2(K)$ und das Einselement $1 \in \pi_0(K)$ immer $\psi^k(u) = k \cdot u$ und $\psi^k(1) = 1$ gilt, folgt:

$$\begin{array}{ccccccc} \widetilde{K}_2(K) & = \pi_2(K \wedge K) & \xrightarrow{\psi^k = (\psi^k_{Sp} \wedge id_K)_*} & \pi_2(KR \wedge K) & = & \widetilde{K}_2(K;R) \\ \cup & \cup & & \cup & & \cup \\ u & = \quad u \wedge 1 & \longmapsto & ku \wedge 1 & = & ku \\ v & = \quad 1 \wedge u & \longmapsto & 1 \wedge u & = & v \end{array}$$

Mit der Multiplikativität der Adams-Operation folgt dann die Behauptung. □

3.5.2 Die Abbildung $\mu_* \circ \widetilde{K}_*(\psi^k_{Sp}) : \widetilde{K}_*(K) \longrightarrow \widetilde{K}_*(S;R) \cong R[u, u^{-1}]$

Die Adams-Operation $\psi^k : \widetilde{K}_*(K) \longrightarrow \widetilde{K}_*(K;R)$ ist (wie bereits oben beschrieben) durch die Spektren-Abbildung $\psi^k_{Sp} : K \longrightarrow KR$ gegeben:

$$\psi^k : \widetilde{K}_*(K) = \pi_*(K \wedge K) \xrightarrow{(\psi^k_{Sp} \wedge id_K)_*} \pi_*(KR \wedge K) = \widetilde{KR}_*(K) = \widetilde{K}_*(K;R) \quad .$$

Nun läßt sich aber auch die von dieser Spektrenabbildung $\psi^k_{Sp} : K \longrightarrow KR$ in K-Homologie induzierte Abbildung betrachten :

$$\widetilde{K}_*(\psi^k_{Sp}) : \widetilde{K}_*(K) = \pi_*(K \wedge K) \xrightarrow{(id_K \wedge \psi^k_{Sp})_*} \pi_*(K \wedge KR) = \widetilde{K}_*(KR) \quad .$$

Lemma 3.5.2: *Für alle Elemente $u^i, v^i \in \widetilde{K}_{2i}(K)$, $i \in \mathbb{Z}$, gilt:*

$$\begin{array}{rcccl} \widetilde{K}_*(\psi^k_{Sp})(u^i) & = & u^i & \in & \widetilde{K}_{2i}(KR) \\ \widetilde{K}_*(\psi^k_{Sp})(v^i) & = & k^i v^i & \in & \widetilde{K}_{2i}(KR) \end{array}$$

Beweis: Offensichtlich kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{K}_*(K)=\pi_*(K \wedge K) \arrow[rr, "\widetilde{K}_*(\psi^k_{Sp})=(id_K\wedge\psi^k_{Sp})_*"] \arrow[dddd, "\tau_*"] & & \pi_*(K \wedge KR)=\widetilde{K}_*(KR) \\
\rotatebox{90}{$\in$} \qquad \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \qquad \rotatebox{90}{$\in$} \\
u = u \wedge 1 \arrow[ddddd, mapsto, bend right] & & u \wedge 1 = u \\
v = 1 \wedge u \arrow[ddddd, mapsto, bend right] & & 1 \wedge ku = kv \\
\widetilde{K}_*(K)=\pi_*(K \wedge K) \arrow[rr, "\psi^k=(\psi^k_{Sp}\wedge id_K)_*"] & & \pi_*(KR \wedge K)=\widetilde{K}_*(K;R) \arrow[uuuu, "\tau_*"'] \\
\rotatebox{90}{$\in$} \qquad \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \qquad \rotatebox{90}{$\in$} \\
v = 1 \wedge u \arrow[rr, mapsto] & & 1 \wedge u = v \arrow[uuuu, mapsto, bend right] \\
u = u \wedge 1 \arrow[rr, mapsto] & & ku \wedge 1 = ku \arrow[uuuu, mapsto, bend right]
\end{tikzcd}$$

Dabei bezeichne die Abbildung $\tau : E \wedge F \longrightarrow F \wedge E$ die Vertauschung zweier Spektren E und F und τ_* die von τ in Homotopie induzierte Abbildung. $\square$

Das Bottspektrum K ist ein Ringspektrum. Seine Multiplikation $\mu_K : K \wedge K \longrightarrow K$ läßt sich zu einer Multiplikation

$$\mu : K \wedge KR \longrightarrow KR$$

erweitern. Diese Multiplikation μ induziert eine Abbildung in Homotopie:

$$\mu_* : \pi_*(K \wedge KR) \longrightarrow \pi_*(KR) \quad .$$

Lemma 3.5.3: *Für alle Elemente $u^i, v^i \in \widetilde{K}_{2i}(KR) = \pi_{2i}(K \wedge KR)$, $i \in \mathbb{Z}$, gilt:*

$$\begin{array}{rcccl} \mu_*(u^i) & = & u^i & \in & \pi_{2i}(KR) \\ \mu_*(v^i) & = & u^i & \in & \pi_{2i}(KR) \quad . \end{array}$$

Beweis: Die beiden Elemente $u, v \in \widetilde{K}_2(K)$ bzw. $u, v \in \widetilde{K}_2(KR)$ wurden erzeugt, indem einmal $\eta_L = (id_k \wedge \iota_K)$ und einmal $\eta_R = (\iota_K \wedge id_K)$ auf das Bottelement $u \in \widetilde{K}_2(S^0) \cong \pi_2(K)$ angewendet wurde.

Da das Bottspektrum K ein Ringspektrum und die Multiplikation μ seine erweiterte Multiplikation μ_K ist, ist die Nacheinanderausführung von $\mu \circ \eta_L$ und $\mu \circ \eta_R$ homotop zur Identität.

Daraus folgt sofort die Behauptung. $\square$

Aufgrund der Konstruktionen der beiden Abbildungen $\widetilde{K}_*(\psi^k_{Sp})$ und μ_* als

$$\widetilde{K}_*(\psi^k_{Sp}) : \widetilde{K}_*(K) = \pi_*(K \wedge K) \longrightarrow \pi_*(K \wedge KR) = \widetilde{K}_*(KR)$$

und

$$\mu_* : \pi_*(K \wedge KR) \longrightarrow \pi_*(KR)$$

können diese beiden Abbildungen auch nacheinander ausgeführt werden. Mit $\pi_*(KR) = \widetilde{KR}_*(S) \cong \widetilde{KR}_*(S^0) = \widetilde{K}_*(S^0; R) \cong \widetilde{K}_*(S^0) \otimes R = R[u, u^{-1}]$ ergibt sich

$$\begin{array}{lccccc} \mu_* \circ \widetilde{K}_*(\psi^k_{Sp}) : & \pi_*(K \wedge K) & \xrightarrow{\widetilde{K}_*(\psi^k_{Sp}) = (id_K \wedge \psi^k_{Sp})_*} & \pi_*(K \wedge KR) & \xrightarrow{\mu_*} & \pi_*(KR) \\ & \| & & \| & & \wr\| \\ & \widetilde{K}_*(K) & & \widetilde{K}_*(KR) & & R[u, u^{-1}] \end{array}$$

Lemma 3.5.4: *Für alle Elemente $u^i, v^i \in \widetilde{K}_{2i}(K) = \pi_{2i}(K \wedge K)$, $i \in \mathbb{Z}$, gilt:*

$$\begin{array}{rcccccccc} \mu_* \circ \widetilde{K}_*(\psi^k_{Sp})(u^i) & = & u^i & \in & \pi_{2i}(KR) & \subset & \pi_*(KR) & = & R[u, u^{-1}] \\ \mu_* \circ \widetilde{K}_*(\psi^k_{Sp})(v^i) & = & k^i u^i & \in & \pi_{2i}(KR) & \subset & \pi_*(KR) & = & R[u, u^{-1}] \end{array} \quad .$$

Beweis: Die Behauptung folgt sofort aus Lemma 3.5.2 und Lemma 3.5.3. $\square$

Korollar 3.5.5: *Für alle Elemente $\omega^i = (v \cdot u^{-1})^i \in \widetilde{K}_0(K)$, $i \in \mathbb{Z}$, gilt:*

$$\mu_* \circ \widetilde{K}_*(\psi^k_{Sp})(\omega^i) = k^i \in \pi_0(KR) \cong R$$

Beweis: Es ist $\mu_* \circ \widetilde{K}_*(\psi^k_{Sp})(\omega^i) = \mu_* \circ \widetilde{K}_*(\psi^k_{Sp})(v^i u^{-i})$. Nach Lemma 3.5.4 gilt dann: $\mu_* \circ \widetilde{K}_*(\psi^k_{Sp})(v^i u^{-i}) = k^i u^i u^{-i} = k^i$. $\square$

Die Komposition $\mu_* \circ \widetilde{K}_*(\psi^k_{Sp})$ läßt sich auch mithilfe des Kroneckerprodukts darstellen. Obwohl dies an dieser Stelle noch nicht benutzt wird, soll es zur späteren Verwendung hier schon einmal notiert werden:

Korollar 3.5.6: *Unter Verwendung von $\psi^k_{Sp} \in \widetilde{K}^0(K; R) = \widetilde{KR}^0(K) = [K, KR]$ ist das Kroneckerprodukt*

$$< -, - >: \widetilde{K}^0(K; R) \otimes \widetilde{K}_{2n}(K) \longrightarrow \widetilde{K}_{2n}(S^0; R) \cong R$$

von ψ^k_{Sp} mit einem beliebigen Element aus $\widetilde{K}_{2n}(K)$, $n \in \mathbb{Z}$, gleichbedeutend mit der Anwendung von $\mu_* \circ \widetilde{K}_*(\psi^k_{Sp})$ auf dasselbe Element aus $\widetilde{K}_{2n}(K)$:

$$< \psi^k_{Sp}, - >= \mu_* \circ \widetilde{K}_*(\psi^k_{Sp})(-) \quad .$$

Beweis: Es sei $g \in \widetilde{K}_{2n}(K) = \pi_{2n}(K \wedge K) = [\Sigma^{2n}S, K \wedge K]$. Nach der Definition des Kronecker-Produkts wird das Element $< \psi^k_{Sp}, g > \in \widetilde{K}_{2n}(S^0; R) \cong R$ dann induziert von

$$\Sigma^{2n}S \xrightarrow{g} K \wedge K \xrightarrow{id_K \wedge \psi^k_{Sp}} K \wedge KR \xrightarrow{\mu} KR \quad .$$

Nach der Definition von $\mu_* \circ \widetilde{K}_*(\psi^k_{Sp}) : \widetilde{K}_*(K) \longrightarrow \widetilde{K}_*(S^0; R) \cong R[u, u^{-1}]$ wird das Element $\mu_* \circ \widetilde{K}_*(\psi^k_{Sp})(g) \in \widetilde{K}_0(S^0; R) \cong R$ dann induziert von

$$\Sigma^{2n}S \xrightarrow{g} K \wedge K \xrightarrow{id_K \wedge \psi^k_{Sp}} K \wedge KR \xrightarrow{\mu} KR \quad .$$

Offensichtlich sind beide Repräsentationen identisch. $\square$

3.5.3 Der Nachweis der Ganzzahligkeitseigenschaft

Wie bereits in der Einleitung zu Kapitel 3.5 beschrieben worden ist, entspricht dem Element $\sum_i a_i \omega^i \in \widetilde{K}_0(K)$ das Polynom $f \in \mathbb{Q}[\omega, \omega^{-1}]$ mit $f(\omega) = \sum_i a_i \omega^i$.

Um besser zwischen dem *Element* aus $\widetilde{K}_0(K)$ und dem *Polynom* aus $\mathbb{Q}[\omega, \omega^{-1}]$ unterscheiden zu können, wird nun statt des Polynomrings $\mathbb{Q}[\omega, \omega^{-1}]$ in ω einfach der Polynomring $\mathbb{Q}[z, z^{-1}]$ in z (für eine beliebige Variable z) betrachtet. Dann läßt sich nämlich für $z = \omega$ der Term $f(\omega) = \sum_i a_i \omega^i$ nicht mehr als Polynom aus $\mathbb{Q}[\omega, \omega^{-1}]$, sondern als Funktions*wert* bzw. wieder als Element aus $\widetilde{K}_0(K)$ auffassen. Dies wird im weiteren Verlauf nötig sein; es wird dann jeweils darauf hingewiesen.

Als eingebettete Teilmenge des Polynomrings $\mathbb{Q}[\omega, \omega^{-1}]$ sind in $\widetilde{K}_0(K)$ nun solche Polynome aus $\mathbb{Q}[\omega, \omega^{-1}]$ enthalten, die zusätzliche Bedingungen erfüllen müssen. Eine solche Bedingung ist die Ganzzahligkeitseigenschaft:

Satz 3.5.7: *Für Polynome $f \in \mathbb{Q}[\omega, \omega^{-1}]$, die Elemente aus $\widetilde{K}_0(K) \subset \widetilde{K}_0(K; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[\omega, \omega^{-1}]$ sind, gilt:*

$$f(k) \in \mathbb{Z}[\tfrac{1}{k}] \text{ für alle } k \in \mathbb{Z} \quad .$$

Beweis: Der kleinste Ring R, in dem $k \in \mathbb{Z}$ invertierbar ist, ist der Ring $R = \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$, d. h. die Abbildung $\mu_* \circ \widetilde{K}_*(\psi^k_{Sp})$ ist wie folgt gegeben:

$$\mu_* \circ \widetilde{K}_*(\psi^k_{Sp}) : \widetilde{K}_*(K) \longrightarrow \widetilde{K}_*(S, \mathbb{Z}[\tfrac{1}{k}]) = (\mathbb{Z}[\tfrac{1}{k}])[u, u^{-1}] \quad .$$

Nach Korollar 3.5.5 gilt dann für alle $k, i \in \mathbb{Z}$:

$$k^i = \mu_* \circ \widetilde{K}_*(\psi^k_{Sp})(\omega^i) \in \mathbb{Z}[\tfrac{1}{k}] \quad .$$

Es folgt sofort, daß ebenfalls gilt:

$$\sum_i a_i k^i = \mu_* \circ \widetilde{K}_*(\psi^k_{Sp})(\sum_i a_i \omega^i) \in \mathbb{Z}[\tfrac{1}{k}]$$

für $a_i \in \mathbb{Q}$.

Da dem Element $\sum_i a_i \omega^i \in \widetilde{K}_0(K) \subset \widetilde{K}_0(K;\mathbb{Q})$ aber gerade das Polynom $f \in \mathbb{Q}[\omega, \omega^{-1}] = \mathbb{Q}[z, z^{-1}]$ mit $f(z) = \sum_i a_i z^i$ entspricht und für $z = k$ natürlich $f(z) = f(k) = \sum_i a_i k^i$ gilt, läßt sich obige Gleichung auch wie folgt aufschreiben:

$$f(k) = \mu_* \circ \widetilde{K}_*(\psi^k_{Sp})(f(\omega)) \in \mathbb{Z}[\tfrac{1}{k}] \quad .$$

Somit entspricht dem *Element* $f(\omega) = \sum_i a_i \omega^i \in \widetilde{K}_0(K)$ nun also genau das Polynom $f \in \mathbb{Q}[\omega, \omega^{-1}] = \mathbb{Q}[z, z^{-1}]$ mit $f(z) = \sum_i a_i z^i$ und der Eigenschaft, daß $f(k) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist. □

Bemerkung: Wird die Schreibweise mit dem Kronecker-Produkt verwendet, so gilt:

$$\mu_* \circ \widetilde{K}_*(\psi^k_{Sp})(f(\omega)) = <\psi^k_{Sp}, f(\omega)> \in \mathbb{Z}[\tfrac{1}{k}] \quad ,$$

wobei $f(\omega)$ beide Male als Element in $\widetilde{K}_0(K)$ zu verstehen ist.

3.6 Die K-Homologiegruppe $\widetilde{K_0}(K)$

Wie im vorangegangenen Kapitel gerade gezeigt worden ist, müssen alle Polynome $f \in \mathbb{Q}[\omega, \omega^{-1}] = \mathbb{Q}[z, z^{-1}]$ für eine beliebige Variable z, die in der Teilmenge von $\mathbb{Q}[\omega, \omega^{-1}]$ enthalten sind, die $\widetilde{K}_0(K)$ beschreibt, die Ganzzahligkeitseigenschaft erfüllen.

Echte rationale Laurentpolynome, die diese Ganzzahligkeitsbedingung erfüllen, sind beispielsweise die Binomialpolynome $f \in \mathbb{Q}[z, z^{-1}]$ mit $f(z) = \begin{pmatrix} z \\ n \end{pmatrix}$, aber auch die Polynome $f \in \mathbb{Q}[z, z^{-1}]$ mit $f(z) = \begin{pmatrix} z \\ n \end{pmatrix} \cdot z^{-r}$ für $n, r \in \mathbb{N}$.

Es stellt sich die Frage, ob diese in der nullten K-Homologiegruppe $\widetilde{K}_0(K)$ des Bottspektrums K enthalten sind.

Die Binomialpolynome sind bereits in Kapitel 2.5.4 (Satz 2.5.4 und Satz 2.5.8) als Basis der nullten K-Homologiegruppe $\widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+)$ des $P_\infty\mathbb{C}_+$ vorgekommen.

Deshalb ist es sinnvoll zu versuchen, sie von $\widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+) = K_0(P_\infty\mathbb{C})$ nach $\widetilde{K}_0(K)$ zu transportieren. Dazu wird in Paragraph 3.6.1 zunächst eine Spektrenabbildung

$$e : \Sigma^\infty P_\infty\mathbb{C}_+ \longrightarrow K$$

vom Einhängungsspektrum des $P_\infty\mathbb{C}_+$ in das Bottspektrum K konstruiert, mit deren Hilfe in Paragraph 3.6.2 die Basiselemente von $\widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+) = K_0(P_\infty\mathbb{C})$ tatsächlich nach $\widetilde{K}_0(K)$ abgebildet werden können.

In Paragraph 3.6.3 kann basierend auf den bisherigen Ergebnissen die nullte K-Homologiegruppe $\widetilde{K}_0(K)$ des Bottspektrums K berechnet werden.

3.6.1 Die Spektrenabbildung $e : \Sigma^\infty P_\infty\mathbb{C}_+ \longrightarrow K$

Die durch ein Spektrum E definierte Kohomologietheorie angewendet auf einen CW-Komplex X ist durch

$$E^n(X) = [\Sigma^\infty X, \Sigma^n E]$$

gegeben. Dabei bezeichnet $\Sigma^\infty X$ das Einhängungsspektrum von X und $\Sigma^n E$ das um $n \in \mathbb{Z}$ nach links verschobene Spektrum, d. h. $(\Sigma^n E)_k = E_{k+n}$. Ist E ein Ω-Spektrum gilt zusätzlich:

$$E^n(X) = [X, E_n]_0 \quad .$$

Für die nullte K-Kohomologiegruppe des CW-Komplexes $P_\infty\mathbb{C}_+$ gilt:

$$\widetilde{K}^0(P_\infty\mathbb{C}_+) = [\Sigma^\infty P_\infty\mathbb{C}_+, K] \quad .$$

Da das Bottspektrum K ein Ω-Spektrum ist, gilt ebenfalls:

$$\widetilde{K}^0(P_\infty\mathbb{C}_+) = [P_\infty\mathbb{C}_+, K_0]_0 \quad .$$

Die Klasse $[L] \in \widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+) = K_0(P_\infty\mathbb{C})$ des kanonischen Linienbündels L über dem $P_\infty\mathbb{C}$ definiert also eine Abbildung

$$e_0 : P_\infty\mathbb{C}_+ \longrightarrow K_0 \quad .$$

Das Bottspektrum K ist ein Ringspektrum mit Multiplikation $\mu_K : K \wedge K \longrightarrow K$ und Einheit $\iota_K : S \longrightarrow K$, die das Einselement in $\widetilde{K}^0(S^0) = [\Sigma^\infty S^0, K] = [S, K]$ repräsentiert.

Da das Bottspektrum aber ein Ω-Spektrum ist, gilt:

$$\widetilde{K}^n(S^n) = [S^n, K_n]_0 \quad ,$$

und die Abbildung $\iota_n : S^n \longrightarrow K_n$ repräsentiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Einselement in $\widetilde{K}^n(S^n) \xrightarrow{\sigma^n} \widetilde{K}^0(S^0)$, wobei $\sigma^n : \widetilde{K}^n(S^n \wedge S^0) \longrightarrow \widetilde{K}^0(S^0)$ den n-fachen Einhängungs-Isomorphismus bezeichne. Die Abbildungen ι_n zwischen den einzelnen Räumen S^n und K_n entsprechen natürlich den einzelnen Abbilungen, aus denen die Spektrenabbildung ι_K zusammengesetzt ist.

Mithilfe dieser Abbildungen $\iota_n : S^n \longrightarrow K_n$ wird nun die Abbildung

$$e_0 : P_\infty\mathbb{C}_+ \longrightarrow K_0$$

via

$$e_n : (\Sigma^\infty P_\infty\mathbb{C}_+)_n = S^n P_\infty\mathbb{C}_+ \simeq S^n \wedge P_\infty\mathbb{C}_+ \xrightarrow{\iota_n \wedge e_0} K_n \wedge K_0 \xrightarrow{\mu} K_n$$

zu der Spektrenabbildung

$$e : \Sigma^\infty P_\infty\mathbb{C}_+ \longrightarrow K$$

erweitert.

Diese Spektrenabbildung e ist natürlich genau die durch die Klasse des kanonischen Linienbündels L über dem $P_\infty\mathbb{C}$ definierte Spektrenabbildung in $\widetilde{K}^0(P_\infty\mathbb{C}_+) = [\Sigma^\infty P_\infty\mathbb{C}_+, K]$.

Als nächstes soll bewiesen werden, daß die Spektrenabbildung $e : \Sigma^\infty P_\infty\mathbb{C}_+ \longrightarrow K$ multiplikativ ist. Dazu muß zunächst gezeigt werden, daß das Einhängungsspektrum $\Sigma^\infty P_\infty\mathbb{C}_+$ ein Ringspektrum ist:

Lemma 3.6.1: *Das Einhängungsspektrum $\Sigma^\infty P_\infty\mathbb{C}_+$ des unendlich-dimensionalen komplex-projektiven Raumes mit zusätzlichem Basispunkt $P_\infty\mathbb{C}_+$ ist ein Ringspektrum.*

Beweis: Wie bereits in Kapitel 2.5.2 beschrieben ist der $P_\infty\mathbb{C}_+$ mit der Multiplikation

$$\mu_{P_\infty\mathbb{C}_+} : P_\infty\mathbb{C}_+ \wedge P_\infty\mathbb{C}_+ \longrightarrow P_\infty\mathbb{C}_+$$

ein H-Raum, und für die von $\mu_{P_\infty\mathbb{C}_+}$ in K-Kohomologie induzierte Abbildung

$$\widetilde{K}^0(\mu_{P_\infty\mathbb{C}_+}) : \widetilde{K}^0(P_\infty\mathbb{C}_+) \longrightarrow \widetilde{K}^0(P_\infty\mathbb{C}_+ \wedge P_\infty\mathbb{C}_+)$$

gilt $\widetilde{K}^0(\mu_{P_\infty\mathbb{C}_+})([L]) = [L]\hat{\otimes}[L]$, wobei $[L] \in \widetilde{K}^0(P_\infty\mathbb{C}_+) = K^0(P_\infty\mathbb{C})$ die Klasse des kanonischen Linienbündels über dem $P_\infty\mathbb{C}$ bezeichnet.

Die Multiplikation $\mu_{P_\infty\mathbb{C}_+}$ gibt dem Einhängungsspektrum $\Sigma^\infty P_\infty\mathbb{C}_+$ des $P_\infty\mathbb{C}_+$ wegen $(\Sigma^\infty P_\infty\mathbb{C}_+)_n = S^n P_\infty\mathbb{C}_+ \simeq S^n \wedge P_\infty\mathbb{C}_+$ folgende Ringstruktur:

$$\begin{array}{ccc}
\Sigma^\infty P_\infty\mathbb{C}_+ \;\wedge\; \Sigma^\infty P_\infty\mathbb{C}_+ & \xrightarrow{\qquad\qquad\mu_{\Sigma^\infty P_\infty\mathbb{C}_+}\qquad\qquad} & \Sigma^\infty P_\infty\mathbb{C}_+ \\
\cup & & \cup \\
S^n P_\infty\mathbb{C}_+ \;\wedge\; S^m P_\infty\mathbb{C}_+ \simeq S^{n+m} \wedge P_\infty\mathbb{C}_+ \wedge P_\infty\mathbb{C}_+ & \xrightarrow{id_{S^{n+m}} \wedge \mu_{P_\infty\mathbb{C}_+}} & \simeq S^{n+m} P_\infty\mathbb{C}_+
\end{array}$$

Damit ist $\Sigma^\infty P_\infty\mathbb{C}_+$ ein Ringspektrum. $\square$

Lemma 3.6.2: *Die Spektrenabbildung*

$$e : \Sigma^\infty P_\infty \mathbb{C}_+ \longrightarrow K$$

ist multiplikativ.

Beweis: Damit die Spektrenabbildung $e : \Sigma^\infty P_\infty \mathbb{C}_+ \longrightarrow K$ eine Ringspektrenabbildung ist, muß folgendes Diagramm kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^\infty P_\infty \mathbb{C}_+ \wedge \Sigma^\infty P_\infty \mathbb{C}_+ \arrow[r, "\mu_{\Sigma^\infty P_\infty \mathbb{C}_+}"] \arrow[d, "e \wedge e"] & \Sigma^\infty P_\infty \mathbb{C}_+ \arrow[d, "e"'] \\
K \wedge K \arrow[r, "\mu_K"] & K
\end{tikzcd}$$

Unter Verwendung der Definitionen von e und $\mu_{\Sigma^\infty P_\infty \mathbb{C}_+}$ muß also folgendes Diagramm kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
S^n P_\infty \mathbb{C}_+ \wedge S^m P_\infty \mathbb{C}_+ \arrow[d, phantom, "\wr"] & & & S^{n+m} P_\infty \mathbb{C}_+ \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
S^n \wedge P_\infty \mathbb{C}_+ \wedge S^m \wedge P_\infty \mathbb{C}_+ \arrow[d, "id_{S^n} \wedge e_0 \wedge id_{S^m} \wedge e_0"] & \simeq \arrow[d, phantom, "(1)"] & S^{n+m} \wedge P_\infty \mathbb{C}_+ \wedge P_\infty \mathbb{C}_+ \arrow[r, "id_{S^{n+m}} \wedge \mu_{P_\infty \mathbb{C}_+}"] \arrow[d, "id_{S^{n+m}} \wedge e_0 \wedge e_0"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & S^{n+m} \wedge P_\infty \mathbb{C}_+ \arrow[d, "id_{S^{n+m}} \wedge e_0"] \\
S^n \wedge K_0 \wedge S^m \wedge K_0 \arrow[d, "\iota_n \wedge id_{K_0} \wedge \iota_m \wedge id_{K_0}"] & \simeq & S^{n+m} \wedge K_0 \wedge K_0 \arrow[r, "id_{S^{n+m}} \wedge \mu_K"] \arrow[d, phantom, "(3)"] & S^{n+m} \wedge K_0 \arrow[d, "\iota_{n+m} \wedge K_0"] \\
K_n \wedge K_0 \wedge K_m \wedge K_0 \arrow[d, "\mu_K \wedge \mu_K"] & \simeq & K_n \wedge K_m \wedge K_0 \wedge K_0 \arrow[r, "\mu_K \wedge \mu_K"] \arrow[d, phantom, "(4)"] & K_{n+m} \wedge K_0 \arrow[d, "\mu_K"] \\
K_n \wedge K_m \arrow[rrr, "\mu_k"] & & & K_{n+m}
\end{tikzcd}$$

Die Diagramme (1) und (3) kommutieren offensichtlich, das Diagramm (4) kommutiert aufgrund der Assoziativität und Kommutativität der Multiplikation μ_K, und das Diagramm (2) kommutiert genau dann, wenn das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
P_\infty \mathbb{C}_+ \wedge P_\infty \mathbb{C}_+ \arrow[r, "\mu_{P_\infty \mathbb{C}_+}"] \arrow[d, "e_0 \wedge e_0"'] & P_\infty \mathbb{C}_+ \arrow[d, "e_0"] \\
K_0 \wedge K_0 \arrow[r, "\mu_K"] & K_0
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Die Multiplikation

$$\mu_{P_\infty \mathbb{C}_+} : P_\infty \mathbb{C}_+ \wedge P_\infty \mathbb{C}_+ \longrightarrow P_\infty \mathbb{C}_+$$

repräsentiert das äußere Produkt des kanonischen Linienbündels $[L] \in \widetilde{K}^0(P_\infty \mathbb{C}_+) =$

$K^0(P_\infty\mathbb{C})$ mit sich selbst:

$$[L]\hat{\otimes}[L] \in \widetilde{K}^0(P_\infty\mathbb{C}_+ \wedge P_\infty\mathbb{C}_+) \quad .$$

Die Multiplikation

$$\mu_K : K_0 \wedge K_0 \longrightarrow K_0$$

repräsentiert das äußere Produkt von virtuellen Bündeln der Dimension Null.

Wegen

$$e_0 : P_\infty\mathbb{C}_+ \subset BU(1)_+ \subset \mathbb{Z} \times BU$$

kommutiert damit auch das zuletzt genannte Diagramm. □

3.6.2 Binomialpolynome in $\widetilde{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{0}}(\boldsymbol{K})$

Die Ringspektrenabbildung

$$e : \Sigma^\infty P_\infty\mathbb{C}_+ \longrightarrow K$$

induziert folgende Abbildung in K-Homologie

$$\widetilde{K}_0(e) : \widetilde{K}_0(\Sigma^\infty P_\infty\mathbb{C}_+) \cong \widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+) \longrightarrow \widetilde{K}_0(K) \quad .$$

Dabei erhält $\widetilde{K}_0(\Sigma^\infty P_\infty\mathbb{C}_+)$ die von der Multiplikation $\mu_{P_\infty\mathbb{C}_+}$ induzierte Multiplikation, die unter obigem kanonischen Isomorphismus dem Pontrjagin-Produkt in $\widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+)$ entspricht.

Da die Spektrenabbildung e eine Ringspektrenabbildung ist, erhält auch die Abbildung $\widetilde{K}_0(e)$ die Ringstruktur.

Sollen nun also mithilfe der Abbildung $\widetilde{K}_0(e)$ die Basiselemente

$$\{1, b_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} b_1 \\ 3 \end{pmatrix}, \dots\} \in \widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+)$$

in die K-Homologie des Bottspektrums $\widetilde{K}_0(K)$ abgebildet werden, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\widetilde{K}_0(e)(b_n) = \widetilde{K}_0(e)\begin{pmatrix} b_1 \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{K}_0(b_1) \\ n \end{pmatrix} \quad ,$$

und es ist ausreichend, $\widetilde{K}_0(b_1)$ zu berechnen.

Lemma 3.6.3: *Es gilt:*

$$\widetilde{K}_0(e)(b_1) = \omega$$

mit $\omega = v \cdot u^{-1} \in \widetilde{K}_0(K)$.

Beweis: Die Ringspektrenabbildung

$$e : \Sigma^\infty P_\infty \mathbb{C}_+ \longrightarrow K$$

induziert auch eine Abbildung in Homotopie:

$$e_* : \pi_*(\Sigma^\infty P_\infty \mathbb{C}_+) \cong \pi_*^s(P_\infty \mathbb{C}_+) \longrightarrow \pi_*(K) \cong \widetilde{K}_*(S) \quad .$$

Zusätzlich werden die Bottperiodizität β (angewendet auf Spektren E und dargestellt als Multiplikation mit dem Bottelement $u \in \widetilde{K}_0(S^2)$)

$$\begin{array}{rccc} \beta : & \widetilde{K}_n(E) & \xrightarrow{\cong} & \widetilde{K}_{n+2}(E) \\ & \Psi & & \Psi \\ & z & \longmapsto & z \cdot u \end{array}$$

einmal für $E = \Sigma^\infty P_\infty \mathbb{C}_+$ und einmal für $E = K$ betrachtet, sowie der von der Einheit $\iota_K : S \longrightarrow K$ induzierte Hurewicz-Homomorphismus angewendet auf Spektren E

$$h_K : \pi_*(E) \cong \pi_*(S \wedge E) \xrightarrow{(\iota_K \wedge id_E)_*} \pi_*(K \wedge E) = \widetilde{K}_*(E) \quad .$$

Auch der Hurewicz-Homomorphismus wird einmal auf das Spektrum $E = \Sigma^\infty P_\infty \mathbb{C}_+$ und einmal auf das Bottspektrum K angewendet, wobei er in letztem Fall bereits in Kapitel 3.2.1 als Homomorphismus η_R definiert wurde.

Es sei an dieser Stelle kurz daran erinnert, daß allgemein für eine Abbildung $f : S^n \longrightarrow X$ in einen CW-Komplex X, deren Homotopieklasse $[f] \in \pi_*^s(X)$ und deren in E-Homologie induzierten Abbildung $E_*(f) : E_*(S^n) \longrightarrow E_*(X)$ gilt:

$$h_K([f]) = E_*(f)(1) \quad ,$$

wobei $1 \in E_0(S^) \xrightarrow[\sigma_n]{cong} E_n(S^n)$ (s.A.7.3).

Nun wird verwendet, daß für die stabile Homotopiegruppe $\pi_2^s(P_\infty \mathbb{C}_+)$ des $P_\infty \mathbb{C}_+$ gilt:

$$\pi_2^s(P_\infty \mathbb{C}_+) \cong \pi_2^s(P_\infty \mathbb{C}) \oplus \pi_2^s(S^0) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 \quad ,$$

und daß für die stabile Homotopiegruppe $\pi_2^s(P_\infty \mathbb{C})$ des $P_\infty \mathbb{C}$ nach dem Freudenthalschen Einhängungssatz gilt:

$$\pi_2^s(P_\infty\mathbb{C}) \cong [S^2, P_\infty\mathbb{C}]_0 \quad .$$

Somit gibt es in $\pi_2^s(P_\infty\mathbb{C}) \cong [S^2, P_\infty\mathbb{C}]_0 \cong \mathbb{Z}$ ein Erzeugendes

$$\sigma : S^2 = P_1\mathbb{C} \hookrightarrow P_\infty\mathbb{C} \quad ,$$

das ein Element

$$\sigma \in \pi_2^s(P_\infty\mathbb{C}_+) \cong \pi_2(\Sigma^\infty P_\infty\mathbb{C}_+)$$

definiert.

Nun soll gezeigt werden, daß bei Anwendung des Hurewicz-Homomorphismus

$$h_K : \pi_2(\Sigma^\infty P_\infty\mathbb{C}_+) \cong \pi_2^s(P_\infty\mathbb{C}) \longrightarrow \widetilde{K}_2(\Sigma^\infty P_\infty\mathbb{C}_+) \cong \widetilde{K}_2(P_\infty\mathbb{C}_+)$$

gilt:

$$h_K(\sigma) = b_1 \cdot u$$

mit $b_1 \in \widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+) = K_0(P_\infty\mathbb{C})$ und $u \in \widetilde{K}_2(S^0)$.

Dazu wird das Kronecker-Produkt

$$< -, - >: \widetilde{K}^0(P_\infty\mathbb{C}_+) \otimes \widetilde{K}_2(P_\infty\mathbb{C}_+) \longrightarrow \widetilde{K}_2(S^0) \cong \mathbb{Z}$$

verwendet.

Einerseits gilt dann für $x = [L] - 1 \in \widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+)$:

$$< x, h_K(\sigma) >=< x, \widetilde{K}_0(\sigma)(1) >=< \widetilde{K}^0(\sigma)(x), 1 >=< u, 1 >= u \in \widetilde{K}_2(S^0) \quad .$$

Andererseits gilt:

$$< x, b_1 \cdot u >= u\cdot < x, b_1 >= u \cdot 1 = u \in \widetilde{K}_2(S^0) \quad .$$

Daraus folgt

$$< x, h_K(\sigma) >=< x, b_1 \cdot u >$$

und somit

$$h_K(\sigma) = b_1 \cdot u \quad .$$

Da gilt:

$$e_*(\sigma) = u \quad ,$$

kommutiert nun also folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
b_1 & \in & \widetilde{K}_0(\Sigma^\infty P_\infty \mathbb{C}_+) & \xrightarrow{\widetilde{K}_0(e)} & \widetilde{K}_0(K) & & \\
\downarrow & & \beta \downarrow \cong & & \cong \downarrow \beta & & \\
b_1 \cdot u & \in & \widetilde{K}_2(\Sigma^\infty P_\infty \mathbb{C}_+) & \xrightarrow{\widetilde{K}_2(e)} & \widetilde{K}_2(K) & \ni & v \\
\uparrow & & h_K \uparrow & & \uparrow \eta_R & & \uparrow \\
 & & \pi_2(\Sigma^\infty P_\infty \mathbb{C}_+) & \xrightarrow{e_*} & \pi_2(K) & & \\
 & & \wr\| & & \wr\| & & \\
\sigma & \in & \pi_2^s(P_\infty \mathbb{C}_+) & & \widetilde{K}_2(S^0) & \ni & u \\
 & & \cup & & \cup & & \\
 & & \sigma & \longmapsto & u & &
\end{array}$$

Aufgrund der Kommutativität dieses Diagramms gilt:

$$\widetilde{K}_2(e)(b_1 \cdot u) = \widetilde{K}_2(e)(h_K(\sigma)) = \eta_R(e_*(\sigma)) = \eta_R(u) = v \quad ,$$

und es folgt

$$\widetilde{K}_2(e)(b_1 \cdot u) = \widetilde{K}_0(e)(b_1) \cdot u = v$$

und damit schließlich

$$\widetilde{K}_0(e)(b_1) = v \cdot u^{-1} = \omega \in \widetilde{K}_0(K). \qquad \square$$

Damit ist also gezeigt, daß gilt:

$$\widetilde{K}_0(e)(b_n) = \widetilde{K}_0(e) \begin{pmatrix} b_1 \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{K}_0(b_1) \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ n \end{pmatrix} \quad .$$

3.6.3 Die Berechnung von $\widetilde{K_0}(K)$

Wie im vorangegangenen Paragraphen gezeigt wurde, liegen alle Binomialpolynome $f \in \mathbb{Q}[\omega, \omega^{-1}]$ mit $f(\omega) = \begin{pmatrix} \omega \\ n \end{pmatrix}$ sowie auch alle Polynome $f \in \mathbb{Q}[\omega, \omega^{-1}]$ mit $f(\omega) = \begin{pmatrix} \omega \\ n \end{pmatrix} \omega^i$, $i \in \mathbb{Z}$, in $\widetilde{K}_0(K)$.

Mit N war der Ring der numerischen Polynome bezeichnet worden. Nun bezeichne

$$N[\omega^{-1}] := \varinjlim (N \xrightarrow{\omega} N \xrightarrow{\omega} N \xrightarrow{\omega} \dots)$$

den dirketen Limes des angegeben Systems. Da ω auf $\widetilde{K}_0(K)$ als Isomorphismus operiert, ergibt sich folgende Inklusion

$$N[\omega^{-1}] \subset \widetilde{K}_0(K) \quad .$$

Wie in Paragraph 3.5.3 gezeigt wurde, gilt die Inklusion:

$$\widetilde{K}_0(K) \subset \{f \in \mathbb{Q}[\omega, \omega^{-1}] \mid f(k) \in \mathbb{Z}[\tfrac{1}{k}] \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}\} \quad .$$

Es soll nun nachgewiesen werden, daß $N[\omega^{-1}]$ und die Menge $\{f \in \mathbb{Q}[\omega, \omega^{-1}] \mid f(k) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ für alle $k \in \mathbb{Z}\}$ isomorph sind. Damit ist auch $\widetilde{K}_0(K)$ berechnet. Nun aber zunächst der Beweis des Lemmas:

Lemma 3.6.4: $N[\omega^{-1}] \cong \{f \in \mathbb{Q}[\omega, \omega^{-1}] \mid f(k) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ *für alle* $k \in \mathbb{Z}\}$

Beweis: Die Inklusion „$\subseteq$" ist offensichtlich, denn ein Element $f \in N[\omega^{-1}]$ hat die Form $f(\omega) = \omega^L \cdot \widetilde{f}(\omega)$ mit $L \leq 0$ und $\widetilde{f} \in N$. Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt also $f(k) = k^L \cdot \widetilde{f}(k) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$, da nach Voraussetzung $\widetilde{f}(k) \in \mathbb{Z}$.

Um die Inklusion „$\supseteq$" nachzuweisen, sei $f \in \mathbb{Q}[\omega, \omega^{-1}]$ mit $f(\omega) = \sum\limits_{i=-L}^{M} a_i \omega^i$, $L, M \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Q}$, und $f(k) = \sum\limits_{i=-L}^{M} a_i k^i \in \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gegeben.

In den Primfaktorzerlegungen aller Nenner der Koeffizienten $a_i \in \mathbb{Q}$ kommen nur endlich viele verschiedene Primfaktoren $p_j, j = 1, \ldots, n$ mit $n \in \mathbb{N}$ vor. Jeder Primfaktor p_j nimmt in einem der Nenner der Koeffizienten $a_i \in \mathbb{Q}$ seinen höchsten Exponenten s_{p_j} an. Der kleinste Nenner von $f(k) = \sum\limits_{i=-L}^{M} a_i k^i \in \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ ist für jedes $k \in \mathbb{Z}$ also höchstens $k^L \cdot \prod\limits_{j=1}^{n} p^{s_{p_j}}$.

Sei nun $\widetilde{f}(\omega) := \omega^{s+L} \cdot f(\omega)$, wobei $s \in \mathbb{N}$ den größten Exponenten aller Exponenten $s_{p_j}, j = 1, \ldots, n$ bezeichne. Es soll nun gezeigt werden, daß dieses Polynom $\widetilde{f}$ ein numerisches Polynom ist.

Da das Polynom $f \in \mathbb{Q}[\omega, \omega^{-1}]$ von der Gestalt $f(\omega) = \sum\limits_{i=-L}^{M} a_i \omega^i$ ist, gilt sofort, daß $\omega^L \cdot f(\omega) \in \mathbb{Q}[\omega]$ und damit auch $\omega^{s+L} \cdot f(\omega) \in \mathbb{Q}[\omega]$.

Es muß nun noch bewiesen werden, daß $\widetilde{f}(k) = k^{s+L} \cdot f(k)$ ganzzahlig ist. Dazu wird der Nenner von $\widetilde{f}(k)$ betrachtet.

Sei $k \in \mathbb{Z}$ fest vorgegeben und p eine beliebige Primzahl. Dann müssen zwei Fälle unterschieden werden:

Die Primzahl p und das vorgegebene $k \in \mathbb{Z}$ sind teilerfremd. Da nach Voraussetzung $f(k)$ ein Element aus $\mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ ist, muß $\widetilde{f}(k) = k^{s+L} \cdot f(k)$ auch ein Element in $\mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ sein, und somit kann die Primzahl p im Nenner von $\widetilde{f}(k)$ gar nicht enthalten sein.

Sind p und k nicht teilerfremd, dann muß k ein Vielfaches von p sein, und es gilt somit $k = p \cdot r$ für ein $r \in \mathbb{Z}$. Wie aber oben festgestellt wurde, kann $f(k) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ höchstens den Nenner $k^L \cdot \prod_{j=1}^{n} p^{s_{p_j}}$ besitzen. Nach Definition von $s \in \mathbb{Z}$ kann die Primzahl p also wieder nicht im Nenner von $\widetilde{f}(k) = k^{s+L} \cdot f(k)$ enthalten sein (denn die höchste Potenz von p würde sich wegen $\widetilde{f}(k) = k^{s+L} \cdot f(k) = (p \cdot r)^{s+L} \cdot f(k)$ wegkürzen).

Da die Primzahl p beliebig gewählt war, ist damit bewiesen, daß der Nenner von $\widetilde{f}(k)$ überhaupt keine Primzahlen enthält und somit ganzzahlig sein muß .

Mit $f(\omega) = \widetilde{f}(\omega) \cdot \omega^{-s-L}$ folgt dann $f \in N[\omega^{-1}]$. □

Damit gilt dann der folgende Satz:

Satz 3.6.5: *Für die nullte K-Homologiegruppe des Bottspektrums K gilt:*

$$\begin{aligned} \widetilde{K}_0(K) &\cong N[\omega^{-1}] \\ &\cong \{f \in \mathbb{Q}[\omega,\omega^{-1}] \mid f(k) \in \mathbb{Z}[\tfrac{1}{k}] \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

3.7 Eine Basis von $\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Z}_{(p)})$

Das Ziel dieses Kapitels 3.7 ist es, eine Basis der nullten K-Homologiegruppe $\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Z}_{(p)})$ des Bottspektrums K mit $\mathbb{Z}_{(p)}$-Koeffizienten zu bestimmen. Dazu werden in Paragraph 3.7.1 zunächst alle Hilfsmittel bereitgestellt, die in Paragraph 3.7.2 zur Berechnung der nullten K-Homologiegruppe $\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Z}_{(p)})$ verwendet werden. Anschließend wird in Paragraph 3.7.3 eine Basis für $\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Z}_{(p)})$ konstruiert.

3.7.1 Vorbereitung

Definition 3.7.1: *Für zwei Zahlen $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei*

$$\left[\frac{m}{n}\right] := max\ \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq \frac{m}{n}\} \quad .$$

Bemerkung: Somit ist für drei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\left[\frac{a}{n}\right] + \left[\frac{b}{n}\right] \leq \left[\frac{a+b}{n}\right] \quad .$$

immer erfüllt.

Die allseits übliche Schreibweise $m \equiv r(n)$ für die Division zweier Zahlen m und n mit Rest $r = (m\ mod\ n)$ soll hier auf rationale Zahlen wie folgt erweitert werden:

Definition 3.7.2: *Für einen (gekürzten) Bruch $q \in \mathbb{Q}$ und eine Primzahl p sei*

$$q \equiv r(p) \iff q = k \cdot p + r$$

mit $k \in \mathbb{Z}$ und $r \in \mathbb{Q}$.

Bemerkung: Eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ enthält also nur dann den Primfaktor p, wenn $q \not\equiv 0(p)$.

Definition 3.7.3: *Für eine Primzahl p sei*

$$\mathbb{Z}_{(p)} := \{\tfrac{a}{n} \in \mathbb{Q} \mid a, n \in \mathbb{Z}; n \not\equiv 0(p)\}$$

der Ring der ganzen p-adischen Zahlen.

Bemerkung: Aufgrund der Ringeigenschaft von $\mathbb{Z}_{(p)}$ gilt:

a.) Ist die Summe zweier beliebiger Zahlen $r, s \in \mathbb{Q}$ ein Element aus $\mathbb{Z}_{(p)}$ und einer der beiden Summanden bereits aus $\mathbb{Z}_{(p)}$, so ist auch der andere Summand ein Element aus $\mathbb{Z}_{(p)}$.

b.) Ist das Produkt zweier beliebiger Zahlen $r, s \in \mathbb{Q}$ ein Element aus $\mathbb{Z}_{(p)}$ und einer der beiden Faktoren eine Einheit von $\mathbb{Z}_{(p)}$, dann ist der andere Faktor ein Element aus $\mathbb{Z}_{(p)}$.

Lemma 3.7.4: *Für die Gruppe $\mathbb{Z}^*_{(p)}$ der Einheiten von $\mathbb{Z}_{(p)}$ gilt:*

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^*_{(p)} &= \{\tfrac{a}{n} \in \mathbb{Q} \mid a, n \in \mathbb{Z}; a \not\equiv 0(p) \text{ und } n \not\equiv 0(p)\} \\ &= \{\tfrac{a}{n} \in \mathbb{Z}_{(p)} \mid a \not\equiv 0(p)\} \quad . \end{aligned}$$

Um für eine Primzahl p angeben zu können, in welcher Potenz sie in einer rationalen Zahl $q \in \mathbb{Q}$ enthalten ist, wird folgende Defnition vorgenommen:

Definition 3.7.5: *Für einen (gekürzten) Bruch $q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und eine Primzahl p bezeichne $\nu_p(q)$ die Potenz von p in q:*

$$\nu_p(q) = k \iff q = p^k \cdot r$$

mit $k \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Q}$ und $r \not\equiv 0(p)$.

Bemerkung: Anhand dieser Definition läßt sich nun leicht ablesen, ob der Zähler oder der Nenner des (gekürzten) Bruches $q \in \mathbb{Q}$ die p-Potenz enthält: Für $\nu_p(q) > 0$ ist sie ein Faktor des Zählers, für $\nu_p(q) < 0$ ein Faktor des Nenners.

Es gilt folgendes Lemma:

Lemma 3.7.6: *Für alle ganzen Zahlen $k \in \mathbb{Z}$ gilt:*

$$\sum_{i=1}^{n} \nu_p(k^i - 1) = \left[\tfrac{n}{p-1}\right] + \nu_p\left(\left[\tfrac{n}{p-1}\right]!\right)$$

Beweis: Für alle ganzen Zahlen $k \in \mathbb{Z}$ und alle natürlichen Zahlen $i \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\nu_p(k^i - 1) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \not\equiv 0(p-1) \\ 1 + \nu_p(i) & \text{für } i \equiv 0(p-1) \end{cases} \quad .$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \nu_p(k^i - 1) &= \sum_{i=1, i\equiv 0(p-1)}^{n} 1 + \nu_p(i) \\ &= \sum_{j=1}^{[\frac{n}{p-1}]} 1 + \nu_p((p-1)\cdot j) \\ &= \sum_{j=1}^{[\frac{n}{p-1}]} 1 + \nu_p(j) \\ &= [\tfrac{n}{p-1}] + \nu_p([\tfrac{n}{p-1}]!) \end{aligned}$$

□

3.7.2 Die Berechnung von $\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Z}_{(p)})$

Im zweiten Kapitel wurde in Paragrah 2.5.4 gezeigt, daß die nullte K-Homologiegruppe $\widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+)$ des unendlich-dimensionalen komplex-projektiven Raumes mit zusätzlichem Basispunkt $P_\infty\mathbb{C}_+$ isomorph zum Ring N der numerischen Polynome ist:

$$\widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+) \cong N = \{f \in \mathbb{Q}[x] \mid f(k) \in \mathbb{Z} \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}\} \quad .$$

Dieses Ergebnis wurde zusammen mit der in Kapitel 3.5 hergeleiteten Ganzzahligkeitseigenschaft in Kapitel 3.6 zur Berechnung der nullten K-Homologiegruppe $\widetilde{K}_0(K)$ des Bottspektrums K verwendet:

$$\widetilde{K}_0(K) \cong N[\omega^{-1}] = \{f \in \mathbb{Q}[\omega,\omega^{-1}] \mid f(k) \in \mathbb{Z}[\tfrac{1}{k}] \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}\} \quad .$$

Nun soll die K-Homologiegruppe $\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Z}_{(p)})$ des Bottspektrums K mit $\mathbb{Z}_{(p)}$-Koeffizienten berechnet werden. In K-Homologie mit R-Koeffizienten gilt ganz allgemein:

$$\widetilde{K}_0(K;R) \cong \widetilde{K}_0(K) \otimes R \quad .$$

Für $R = \mathbb{Z}_{(p)}$ gilt nach der Definition von p-Lokalität:

$$\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Z}_{(p)}) \cong \widetilde{K}_0(K) \otimes \mathbb{Z}_{(p)} = \widetilde{K}_0(K)_{(p)} \quad .$$

Aufgrund der Isomorphie $\widetilde{K}_0(K) \cong N[\omega^{-1}]$ folgt natürlich sofort, daß

$$\widetilde{K}_0(K)_{(p)} \cong N[\omega^{-1}]_{(p)} \quad .$$

Für den p-lokalen Ring $N[\omega^{-1}]_{(p)}$ gilt:

$$\begin{aligned}
N[\omega^{-1}]_{(p)} &= N[\omega^{-1}] \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \\
&\cong \{f \in \mathbb{Q}[\omega,\omega^{-1}] \mid f(k) \in \mathbb{Z}[\tfrac{1}{k}]_{(p)} \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}\} \\
&\cong \{f \in \mathbb{Q}[\omega,\omega^{-1}] \mid f(k) \in \mathbb{Z}[\tfrac{1}{k}] \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}\} \\
&\cong \{f \in \mathbb{Q}[\omega,\omega^{-1}] \mid f(k) \in \mathbb{Z}_{(p)}[\tfrac{1}{k}] \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}\} \\
&\cong \{f \in \mathbb{Q}[\omega,\omega^{-1}] \mid f(k) \in \mathbb{Z}_{(p)} \text{ für alle } k \in \mathbb{Z} \text{ mit } k \not\equiv 0(p)\}
\end{aligned}$$

Nun ist $N[\omega^{-1}]_{(p)}$ ein doppelter direkter Limes. Die Reihenfolge der Limesbildung ist vertauschbar, ohne daß sich dadurch das Ergebnis verändert, und es folgt:

$$\widetilde{K}_0(K)_{(p)} \cong N[\omega^{-1}]_{(p)} \cong N_{(p)}[\omega^{-1}] \quad .$$

Nach der Definition von p-Lokalität gilt für den Ring $N_{(p)}$, der nebenbei bemerkt aufgrund derselben Argumentation die p-lokale K-Homologiegruppe $\widetilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}_+;\mathbb{Z}_{(p)})$ des $P_\infty\mathbb{C}_+$ mit $\mathbb{Z}_{(p)}$-Koeffizienten beschreibt:

$$\begin{aligned}
N_{(p)} &= N \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \\
&\cong \{f \in \mathbb{Q}[x] \mid f(k) \in \mathbb{Z}_{(p)} \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}\} \quad .
\end{aligned}$$

Damit gilt folgender Satz:

Satz 3.7.7: *Für die nullte K-Homolgiegruppe $\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Z}_{(p)})$ des Bottspektrums K mit $\mathbb{Z}_{(p)}$-Koeffizienten gilt:*

$$\begin{aligned}
\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Z}_{(p)}) &\cong N[\omega^{-1}]_{(p)} \\
&\cong \{f \in \mathbb{Q}[\omega,\omega^{-1}] \mid f(k) \in \mathbb{Z}_{(p)} \textit{ für alle } k \in \mathbb{Z} \textit{ mit } k \not\equiv 0(p)\} \\
&\cong N_{(p)}[\omega^{-1}] \\
&\cong \{f \in \mathbb{Q}[\omega,\omega^{-1}] \mid f(\omega) = \omega^L \cdot \widetilde{f}(\omega) \textit{ mit } L \leq 0 \textit{ und } \widetilde{f} \in N_{(p)}, \\
&\qquad\qquad \textit{d. h. } \widetilde{f}(k) \in \mathbb{Z}_{(p)} \textit{ für alle } k \in \mathbb{Z}\} \quad .
\end{aligned}$$

Das Ziel dieses Kapitels 3.7 ist es, eine Basis von $\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Z}_{(p)})$ zu konstruieren. Dazu ist der Ring $N_{(p)}$ jedoch nicht optimal geeignet. Für die Polynome aus $N_{(p)}$ muß die Bedingung „$f(k) \in \mathbb{Z}_{(p)}$“ nämlich für *alle* ganzen Zahlen $k \in \mathbb{Z}$ erfüllt sein. Nun ist die Primzahl p aber selbst eine ganze Zahl, und es kann passieren, daß ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[x]$ die Bedingung „$f(k) \in \mathbb{Z}_{(p)}$“ für alle ganzen Zahlen $k \in \mathbb{Z}$ *außer* den Vielfachen von p erfüllt. Dies ist insofern unerfreulich als genau diese Einschränkung in $N_{(p)}[\omega^{-1}]$ bzw. $N[\omega^{-1}]_{(p)}$ wieder aufgehoben wird.

Darum wird nun ein weiterer Unterring B des Polynomrings $\mathbb{Q}[x]$ definiert, mit dessen Hilfe sich sowohl die K-Homologiegruppe $\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Z}_{(p)})$ beschreiben als auch eine Basis gut konstruieren läßt :

Definition 3.7.8: *Der Unterring B des Polynomrings $\mathbb{Q}[x]$ wird definiert durch*

$$B := \{f \in \mathbb{Q}[x] \mid f(s) \in \mathbb{Z}_{(p)} \textit{ für alle } s \in \mathbb{Z}^*_{(p)}\} \quad .$$

Offensichtlich ist $N_{(p)}$ eine Teilmenge von B, ohne mit B übereinzustimmen. Die Polynome $f \in N_{(p)}$ erfüllen die Bedingung, daß $f(k) \in \mathbb{Z}_{(p)}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Dieselben Polynome erfüllen auch die Bedingung,daß $f(m) \in \mathbb{Z}_{(p)}$ für alle $m \in \mathbb{Z}_{(p)}$. Da nun die Gruppe der Einheiten $\mathbb{Z}^*_{(p)}$ eine Teilmenge von $\mathbb{Z}_{(p)}$ ist, müssen alle Polynome $f \in N_{(p)}$ deutlich mehr Anforderungen gerecht werden als die Polynome f aus B.

Beispielsweise ist die Funktion

$$f \in \mathbb{Q}[x] \text{ mit } f(x) = \tfrac{x^{p-1}-1}{p}$$

ein Element aus B, aber kein Element aus $N_{(p)}$. Dies wird deutlich, wenn $k = p \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_{(p)}$ in das Polynom f eingesetzt wird. Dann gilt nämlich:

$$f(p) = \tfrac{p^{p-1}-1}{p} \notin \mathbb{Z}_{(p)} \quad .$$

Infolgedessen kann f also kein Element aus $N_{(p)}$ sein. Die Primzahl p ist aber keine Einheit von $\mathbb{Z}_{(p)}$. Für eine beliebige Einheit $s = \frac{a}{n}$ von $\mathbb{Z}_{(p)}$ mit $a, n \in \mathbb{Z}$, $a \not\equiv 0(p)$ und $n \not\equiv 0(p)$ gilt:

$$f(s) = f(\frac{a}{n}) = \frac{\frac{a}{n}\cdot\left(\frac{a}{n}\right)^{p-1} - 1}{\frac{a}{n}\cdot p} = \frac{n}{a} \cdot \frac{\left(\frac{a}{n}\right)^p - \frac{a}{n}}{p}$$

Für $n = 1$ ist der Faktor $\frac{a^p - a}{p}$ bekanntlicherweise ein Element aus $\mathbb{Z}$. Für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \not\equiv 0(p)$ ist der Faktor $\frac{(\frac{a}{n})^p - \frac{a}{n}}{p}$ somit ein Element aus $\mathbb{Z}_{(p)}$. Da $s = \frac{a}{n}$ eine Einheit ist, ist auch der Faktor $\frac{n}{a}$ ein Element aus $\mathbb{Z}_{(p)}$. Somit gilt $f(s) \in \mathbb{Z}_{(p)}$ für alle $s \in \mathbb{Z}^*_{(p)}$, und folglich ist das Polynom $f \in \mathbb{Q}[x]$ ein Element aus B.

Für spätere Beweise wird jedoch eine andere Form von B benötigt:

Lemma 3.7.9: *Für jede Primzahl p bezeichne $(\mathbb{Z}/p^2)^*$ die Gruppe der Einheiten von $\mathbb{Z}/p^2$. Für $p = 2$ wird diese Gruppe von $k = 3$ erzeugt; für alle anderen Primzahlen $p \neq 2$ sei $k \in \mathbb{Z}$ so gewählt, daß seine Restklasse $(k \bmod p^2) \in \mathbb{Z}/p^2$ die Gruppe der Einheiten $(\mathbb{Z}/p^2)^*$ erzeugt. Dann gilt:*

$$B \cong M := \{f \in \mathbb{Q}[x] \mid f(k^m) \in \mathbb{Z}_{(p)} \textit{ für alle } m \in \mathbb{N}, m \geq 0\} \quad .$$

Beweis: Gezeigt werden die beiden Inklusionen $B \subset M$ und $M \subset B$:

Um $B \subset M$ nachzuweisen, muß gezeigt werden, daß für alle Funktionen $f \in \mathbb{Q}[x]$, die die Bedingung $f(s) \in \mathbb{Z}_{(p)}$ für alle $s \in \mathbb{Z}^*_{(p)}$ erfüllen, ebenfalls gilt, daß $f(k^m) \in \mathbb{Z}_{(p)}$ für alle $m \in \mathbb{N}, m \geq 0$. Da aber $(k \ mod \ p^2)$ die Einheiten von $\mathbb{Z}/p^2$ erzeugt, enthält k^m für kein $m \in \mathbb{N}, m \geq 0$, den Faktor p, ist somit ein Element aus $\mathbb{Z}^*_{(p)}$, und daraus folgt die Behauptung.

Um die Inklusion $M \subset B$ nachzuweisen, sei $f \in M \subset \mathbb{Q}[x]$ gegeben mit $f(k^m) \in \mathbb{Z}_{(p)}$ für alle $m \in \mathbb{N}, m \geq 0$.

Es werde nun ein $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, so groß gewählt, daß p^b größer als jede p-Potenz in allen Nennern aller vorkommenden Koeffizienten des Polynoms $f \in B$ ist. Dann gilt für jedes $c \in \mathbb{Z}_{(p)}$, daß $f(c \cdot p^b) \in \mathbb{Z}_{(p)}$.

Die Gruppe $\mathbb{Z}/p^b$ ist für jedes $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, zyklisch, und die Abbildung $\mathbb{Z}/p^b \longrightarrow \mathbb{Z}/p^2$ ist surjektiv. Darum erzeugt die Restklasse $(k \ mod \ p^2)$ von $k \in \mathbb{Z}$ nicht nur die Einheiten von $\mathbb{Z}/p^2$, sondern auch die Einheiten von $\mathbb{Z}/p^b$ für alle $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$.

Es ist zu zeigen, daß $f(s) \in \mathbb{Z}_{(p)}$ für alle $s \in \mathbb{Z}^*_{(p)}$. Dazu sei $s = \frac{a}{n} \in (\mathbb{Z}/p^2)^*$ mit $a, n \in \mathbb{Z}$ und $a \not\equiv 0(p)$, $n \not\equiv 0(p)$.

Da $a \not\equiv 0(p)$ ist $(a \ mod \ p^b)$ eine Einheit von $\mathbb{Z}/p^b$. Da die Restklasse von $(k \ mod \ p^2)$ ja wie oben gerade festgestellt auch die Einheiten von $\mathbb{Z}/p^b$ erzeugt, gibt es also ein $m \in \mathbb{N}, m \geq 0$, mit $a = k^m + c \cdot p^b$ für ein $c \in \mathbb{Z}_{(p)}$.

Da nach Vorraussetzung $f(k^m) \in \mathbb{Z}_{(p)}$ und nach Wahl von $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, auch $f(c \cdot p^b) \in \mathbb{Z}_{(p)}$ für jedes $c \in \mathbb{Z}_{(p)}$, ist auch $f(k^m) + f(c \cdot p^b) = f(k^m + c \cdot p^b) \in \mathbb{Z}_{(p)}$, und somit $f(a) \in \mathbb{Z}_{(p)}$.

Da aber $n \not\equiv 0(p)$ ist $f(\frac{a}{n}) \in \mathbb{Z}_{(p)}$, ist gezeigt, daß $f(s) \in \mathbb{Z}_{(p)}$ für alle $s \in \mathbb{Z}^*_{(p)}$. □

Die Gruppe B wurde deshalb definiert, um eine Basis von $\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Z}_{(p)})$ beschreiben zu können. Infolgedessen muß $\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Z}_{(p)}) \cong N_{(p)}[\omega^{-1}]$ auch mithilfe von B dargestellt werden können. Es gilt folgender Satz:

Satz 3.7.10:

$$N_{(p)}[x^{-1}] = B[x^{-1}]$$

Beweis: Es werden wieder beide Inklusionen gezeigt.

Die Inklusion $N_{(p)}[x^{-1}] \subset B[x^{-1}]$ folgt sofort aus $N_{(p)} \subset B$.

Um die Inklusion $B[x^{-1}] \subset N_{(p)}[x^{-1}]$ nachzuweisen, sei $f \in B[x^{-1}]$ gegeben. Das Polynom f ist von der Form $f(x) = \frac{1}{x^L} \cdot \widetilde{f}(x)$, wobei $L \geq 0$ mindestens so groß wie der betragsgrößte negative Exponent von x in f ist und $\widetilde{f} \in B$, d. h. es muß gelten $\widetilde{f}(x) = x^L \cdot f(x) \in B$, so daß wiederum gilt $\widetilde{f}(s) = s^L \cdot f(s) \in \mathbb{Z}_{(p)}$ für alle $s \in \mathbb{Z}^*_{(p)}$ bzw. $\widetilde{f}(k^m) = k^{L+m} \cdot f(k^m) \in \mathbb{Z}_{(p)}$ für alle $m \in \mathbb{N}, m \geq 0$.

Ein Polynom $g \in N_{(p)}[x^{-1}]$ ist von der Form $g(x) = \frac{1}{x^M} \cdot \widetilde{g}(x)$, wobei $M \geq 0$ mindestens so groß wie der betragsgrößte negative Exponent von x in g ist und $\widetilde{g} \in N_{(p)}$, d. h. es muß gelten $\widetilde{g}(x) = x^M \cdot g(x) \in N_{(p)}$, so daß wiederum $\widetilde{g}(t) = t^M \cdot f(t) \in \mathbb{Z}_{(p)}$ für alle $t \in \mathbb{Z}$ gilt.

Es ist also zu zeigen, daß für jedes Polynom $f \in B[x^{-1}]$ gilt: $\widetilde{f}(t) = k^L \cdot f(t) \in \mathbb{Z}_{(p)}$ für alle $t \in \mathbb{Z}$.

Da alle Elemente $t \in \mathbb{Z}$ mit $t \not\equiv 0(p)$ Einheiten in $\mathbb{Z}^*_{(p)}$ sind, gilt für sie die Behauptung nach Vorraussetzung. Bei allen anderen Elementen $t \in \mathbb{Z}$ mit $t \equiv 0(p)$ sorgt der Faktor x^L bzw. t^L dafür, daß das Ergebnis $f(t)$ in $\mathbb{Z}_{(p)}$ liegt. □

Damit läßt sich nun die K-Homologiegruppe $\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Z}_{(p)})$ auch wie folgt beschreiben:

Satz 3.7.11: *Für die nullte K-Homologiegruppe $\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Z}_{(p)})$ des Bottspektrums K mit $\mathbb{Z}_{(p)}$-Koeffizienten gilt:*

$$\begin{aligned} \widetilde{K}_0(K;\mathbb{Z}_{(p)}) &\cong B[\omega^{-1}] \\ &\cong \{f \in \mathbb{Q}[\omega,\omega^{-1}] \mid f(\omega) = \omega^L \cdot \widetilde{f}(\omega) \text{ mit } L \leq 0 \text{ und } \widetilde{f} \in B, \\ &\qquad \text{d. h. } \widetilde{f}(k^m) \in \mathbb{Z}_{(p)} \text{ für alle } m \in \mathbb{N}, m \geq 0\} \quad . \end{aligned}$$

Dabei ist $k \in \mathbb{Z}$ so gewählt, daß seine Restklasse $(k \text{ mod } p^2) \in \mathbb{Z}/p^2$ die Gruppe der Einheiten von $\mathbb{Z}/p^2$ erzeugt.

Zur späteren Verwendung sei an dieser Stelle noch folgendes Lemma notiert:

Lemma 3.7.12:

$$B[x^{-1}] \cap \mathbb{Q}[x] = B$$

Beweis: Wie bereits in vorangegangenem Beweis notiert, ist ein Polynom $f \in B[x^{-1}]$ von der Form $f(x) = \frac{1}{x^L} \cdot \widetilde{f}(x)$, wobei $L \geq 0$ mindestens so groß wie der betragsgrößte negative Exponent von x in f ist und $\widetilde{f} \in B$, d. h. es muß gelten $\widetilde{f}(x) = x^L \cdot f(x) \in B$, so daß wiederum gilt $\widetilde{f}(s) = s^L \cdot f(s) \in \mathbb{Z}_{(p)}$ für alle $s \in \mathbb{Z}^*_{(p)}$ bzw. $\widetilde{f}(k^m) = k^{L+m} \cdot f(k^m) \in \mathbb{Z}_{(p)}$ für alle $m \in \mathbb{N}, m \geq 0$.

Da also das Produkt $k^{L+m} \cdot f(k^m)$ ein Element aus $\mathbb{Z}_{(p)}$ ist und k^{L+m} eine Einheit, muß aufgrund der Bemerkung nach Lemma 3.7.3 auch $f(k^m)$ in $\mathbb{Z}_{(p)}$ liegen.

Ist $f \in B[x^{-1}]$ also schon ein echtes Element aus $\mathbb{Q}[x]$ (und kein Element aus $\mathbb{Q}[x,x^{-1}]$), dann ist f ein Element aus B. □

3.7.3 Die Basis

Im vorangegangenen Paragraphen wurden zwei Darstellungsmöglichkeiten von $\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Z}_{(p)})$ berechnet. Anhand der Isomorphie $\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Z}_{(p)}) \cong B[\omega^{-1}]$ wird nun eine Basis von $B[\omega^{-1}]$ und somit von $\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Z}_{(p)})$ konstruiert. Dies geschieht in zwei

Schritten: Zunächst wird eine Basis von B bestimmt. Diese wird dann zu einer Basis von $B[\omega^{-1}]$ erweitert.

Es folgt die Definition einer Familie von Funktionen $g_n \in \mathbb{Q}[\omega]$, die - wie gezeigt werden wird - eine Basis von B bilden:

Definition 3.7.13: *Für $n \in \mathbb{N}$ werde die Familie $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ von Polynomen $g_n \in \mathbb{Q}[\omega]$ definiert durch*

$$\begin{aligned} g_0(\omega) &:= 1 \text{ für alle } \omega \\ g_n(\omega) &:= \tfrac{(\omega-1)(\omega-k)(\omega-k^2)\cdot\ldots\cdot(\omega-k^{n-1})}{p^{\nu_p(\bar{n}!)+\bar{n}}} \text{ für alle } n > 0 \end{aligned}$$

Hierbei sei $p \neq 2$ eine feste Primzahl. $(\mathbb{Z}/p^2)^*$ sei die Menge aller Einheiten von $\mathbb{Z}/p^2$ und werde von $(k \bmod p^2)$ erzeugt. Außerdem sei $\bar{n} = [\frac{n}{p-1}]$, so daß also gilt $n = [\frac{n}{p-1}](p-1) + r$ bzw. $n = \bar{n}(p-1) + r$ mit $r \in \mathbb{Z}$ und $r < p-1$.

Zunächst wird nachgewiesen, daß alle Polynome g_n wirklich Elemente aus B sind:

Lemma 3.7.14: *Die Polynome $g_n \in \mathbb{Q}[\omega]$ sind für alle $n \in \mathbb{N}$ Elemente aus B.*

Beweis: Es ist zu zeigen:

$$g_n(k^m) \in \mathbb{Z}_{(p)} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } m \in \mathbb{N}, m \geq 0 \quad .$$

Anhand der Definition der Polynome g_n läßt sich ablesen, daß $g_n(k^a) = 0 \in \mathbb{Z}_{(p)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a \in \mathbb{N}$ mit $a < n$. Es ist noch zu zeigen:

$$g_n(k^a) \in \mathbb{Z}_{(p)} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } a \in \mathbb{N} \text{ mit } a \geq n$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} g_n(k^a) &= \tfrac{(k^a-1)(k^a-k)(k^a-k^2)\cdot\ldots\cdot(k^a-k^{n-1})}{p^{\nu_p(\bar{n})+\bar{n}}} \\ &= \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(k^a-k^i)}{p^{\nu_p(\bar{n})+\bar{n}}} \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{\prod_{i=0}^{n-1}k^i(k^{a-i}-1)}{p^{\nu_p(\bar{n})+\bar{n}}} \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{\prod_{i=1}^{n}k^{n-i}(k^{a-n+i}-1)}{p^{\nu_p(\bar{n})+\bar{n}}} \end{aligned}$$

Die ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ war so gewählt, daß$(k \bmod p^2)$ den Ring $(\mathbb{Z}/p^2)^*$ der Einheiten von $\mathbb{Z}/p^2$ erzeugt. Deshalb können die Potenzen k^i für alle $i \in \mathbb{Z}$ keine p-Potenz enthalten, und es gilt je nach Verwendung von Gleichung (1) oder (2):

$$\begin{aligned}
\nu_p(g_n(k^a)) &\overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n-1} \nu_p(k^{a-i}-1) - \nu_p(\bar{n}) - \bar{n} \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{n} \nu_p(k^{a-n+i}-1) - \nu_p(\bar{n}) - \bar{n} \quad .
\end{aligned}$$

Im folgenden werden nun die beiden Fälle $a = n$ und $a > n$ unterschieden. Dies ist zwar für diesen Beweis nicht notwendig, wird aber später noch verwendet werden.

Sei also zunächst $a = n$. Dann gilt mit der zweiten Formel:

$$\begin{aligned}
\nu_p(g_n(k^a)) &= \sum_{i=1}^{n} \nu_p(k^i-1) - \nu_p(\bar{n}) - \bar{n} \\
&= [\tfrac{n}{p-1}] + \nu_p([\tfrac{n}{p-1}]!) - \nu_p(\bar{n}) - \bar{n} \\
&= \bar{n} + \nu_p(\bar{n}) - \nu_p\bar{n} - \bar{n} \\
&= 0 \in \mathbb{Z}_{(p)} \quad .
\end{aligned}$$

Sei nun $a > n$. Dann gilt mit der ersten Formel:

$$\nu_p(g_n(k^a)) = \sum_{i=1}^{n-1} \nu_p(k^{a-i}-1) - \nu_p(\bar{n}) - \bar{n}$$

Wird $g_n(k^a)$ mit $\prod_{i=1}^{a-n}(k^i-1)$ erweitert, ergibt sich:

$$\nu_p(g_n(k^a)) = \sum_{i=1}^{n-1} \nu_p(k^{a-i}-1) + \sum_{i=1}^{a-n} \nu_p(k^i-1) - \sum_{i=1}^{a-n} \nu_p(k^i-1) - \nu_p(\bar{n}) - \bar{n}$$

Wegen

$$\prod_{i=1}^{n-1}(k^{a-i}-1) \cdot \prod_{i=1}^{a-n}(k^i-1) = \prod_{i=1}^{a}(k^i-1) \quad ,$$

folgt weiter

$$\nu_p(g_n(k^a)) = \sum_{i=1}^{a} \nu_p(k^i-1) - \sum_{i=1}^{a-n} \nu_p(k^i-1) - \nu_p(\bar{n}) - \bar{n} \quad .$$

Mit Lemma 3.7.6 gilt dann:

$$\begin{aligned}
\nu_p(g_n(k^a)) &= [\tfrac{a}{p-1}] + \nu_p([\tfrac{a}{p-1}]!) - [\tfrac{a-n}{p-1}] - \nu_p([\tfrac{a-n}{p-1}]!) - \nu_p([\tfrac{n}{p-1}]!) - [\tfrac{n}{p-1}] \\
&= \nu_p([\tfrac{a}{p-1}]!) - \nu_p([\tfrac{a-n}{p-1}]!) - \nu_p([\tfrac{n}{p-1}]!) + [\tfrac{a}{p-1}] - [\tfrac{a-n}{p-1}] - [\tfrac{n}{p-1}] \\
&= \nu_p\left(\frac{[\frac{a}{p-1}]!}{([\frac{a-n}{p-1}]!)([\frac{n}{p-1}]!)}\right) + [\tfrac{a}{p-1}] - [\tfrac{a-n}{p-1}] - [\tfrac{n}{p-1}] \\
&= \nu_p\left(\begin{pmatrix} \frac{a}{p-1} \\ \frac{n}{p-1} \end{pmatrix}\right) + [\tfrac{a}{p-1}] - [\tfrac{a-n}{p-1}] - [\tfrac{n}{p-1}] \quad .
\end{aligned}$$

Nun gilt, daß

$$\nu_p\left(\left(\begin{array}{c}\frac{a}{p-1}\\ \frac{n}{p-1}\end{array}\right)\right)\geq 0 \quad ,$$

und mit der Bemerkung nach Definition 3.7.1 gilt:

$$[\tfrac{a-n}{p-1}]+[\tfrac{n}{p-1}]\leq[\tfrac{a-n+n}{p-1}]=[\tfrac{a}{p-1}]$$

und somit

$$[\tfrac{a}{p-1}]-[\tfrac{a-n}{p-1}]-[\tfrac{n}{p-1}]\geq 0 \quad .$$

Also gilt zusammengefaßt:

$$\nu_p(g_n(k^a))\geq 0 \quad .$$

Daraus folgt, daß höchstens der Zähler von $g_n(k^a)$ eine p-Potenz enthält, nicht aber der Nenner, und somit gilt $g_n(k^a)\in\mathbb{Z}_{(p)}$. □

Nun folgt der Nachweis, daß die Polynome $g_n\in B$ tatsächlich eine Basis von B bilden:

Lemma 3.7.15: *Die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bildet eine $\mathbb{Z}_{(p)}$-Basis von B.*

Beweis: Für alle $n\in\mathbb{N}$ ist der *grad* $g_n=n$. Darum läßt sich jedes $f\in B$ vom Grad $M\in\mathbb{N}$ wie folgt darstellen

$$f=\sum_{n=0}^{M}a_ng_n \text{ mit } a_n\in\mathbb{Q} \quad .$$

Es ist also noch nachzuweisen, daß alle Koeffizienten a_n Elemente aus $\mathbb{Z}_{(p)}$ sind.

Für $k^0=1$ gilt:

$$\begin{aligned}&g_0(k^0)=g_0(1)=1\\ &g_n(k^0)=g_n(1)=\tfrac{(1-1)\cdot\ldots}{\ldots}=0 \text{ für alle } n\geq 1 \quad .\end{aligned}$$

Daraus folgt für das Polynom $f\in B$, daß $f(k^0)=f(1)=a_0\cdot g_0(1)=a_0$.

Nach Voraussetzung ist f ein Element aus B, und somit gilt $f(k^0)=f(1)=a_0\in\mathbb{Z}_{(p)}$.

Für $k^1=k$ gilt:

$$\begin{aligned}&g_0(k)=1\\ &g_1(k)\not\equiv 0(p) \quad ,\end{aligned}$$

denn nach Beweis von Lemma 3.7.14 (Teil $a=n$) gilt ja $\nu_p(g_m(k^m))=0$), und

$$g_n(k)=\tfrac{(k-1)\cdot(k-k)\cdot\ldots}{\ldots}=0 \text{ für alle } n\geq 2 \quad .$$

Mit der Voraussetzung $f \in B$ folgt nun $f(k) = a_0 g_0(k) + a_1 g_1(k) = a_0 + a_1 g_1(k) \in \mathbb{Z}_{(p)}$.

Wie gerade oben gezeigt ist $a_0 \in \mathbb{Z}_{(p)}$. Somit ist aufgrund der Bemerkung nach Lemma 3.7.3 dann auch $a_1 g_1(k) \in \mathbb{Z}_{(p)}$.

Da $g_1 \in B$ folgt $g_1(k) \in \mathbb{Z}_{(p)}$. Außerdem ist ja $g_1(k) \not\equiv 0(p)$. Damit ist $g_1(k)$ eine Einheit von $\mathbb{Z}_{(p)}$, und es folgt wieder mit der Bemerkung nach Lemma 3.7.3, daß $a_1 \in \mathbb{Z}_{(p)}$.

Induktiv folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$: $a_n \in \mathbb{Z}_{(p)}$. □

Diese Basis von B soll nun zu einer Basis von $B[\omega^{-1}] = B[x^{-1}]$ (für eine beliebige Variable x) erweitert werden. Dies geschieht schrittweise, indem eine Familie von Unterringen von $B[x^{-1}]$ mit jeweils endlichen Basen definiert wird. Diese Basen sind gerade so bestimmt, daß von Unterring zu Unterring jeweils genau ein Basiselement hinzukommt. Da der Beweis hierüber mit Induktion über $n \in \mathbb{N}$ geführt wird, ist damit schließlich sukzessive eine Basis für ganz $B[x^{-1}]$ gefunden.

Zuerst müssen die Unterringe von $B[x^{-1}]$ definiert werden:

Definition 3.7.16: *Für zwei beliebig, aber fest gewählte ganze Zahlen $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $s \leq 0 \leq t$ sei der Unterring $F(s,t) \subset B[x^{-1}]$ definiert durch*

$$F(s,t) := B[x^{-1}] \cap \mathbb{Q} < x^s, \dots x^t > \quad .$$

Dabei sei $\mathbb{Q} < x^s, \dots, x^t >$ der von den Monomen $x^s, \dots, x^t$ aufgespannte $\mathbb{Q}$-Vektorrraum.

Als Element aus $\mathbb{Q} < x^s, \dots x^t >$ ist jedes Polynom $f \in F(s,t)$ von der Form

$$f = \sum_{1=s}^{t} a_i\, x^i \text{ mit } a_i \in \mathbb{Q} \quad .$$

Somit können auf $F(s,t)$ nun zwei Homomorphismen c^+ und c^- definiert werden, die jedem Polynom $f \in F(s,t)$ den Koeffizienten des Monoms mit der höchsten Potenz t bzw. der niedrigsten Potenz s zuordnen:

Definition 3.7.17: *Auf $F(s,t)$ werden die beiden Homomorphismen*

$$\begin{aligned} c^+ &: F(s,t) \longrightarrow \mathbb{Q} \\ c^- &: F(s,t) \longrightarrow \mathbb{Q} \end{aligned}$$

definiert durch

$$\begin{aligned} c^+(f) &:= a_t \\ c^-(f) &:= a_s \quad . \end{aligned}$$

Die Bilder dieser beiden Homomorphismen werden noch von Interesse sein. Darum sollen sie nun näher bestimmt werden.

Dazu wird ausgenutzt, daß sich jedes Polynom $f \in F(s,t)$ als Element aus $B[x^{-1}]$ auch als

$$f = x^s \cdot \widetilde{f} \text{ mit } \widetilde{f} \in B \text{ und } grad(\widetilde{f}) \leq t - s$$

darstellen läßt. Für den Ring B ist aber die Basis $\{g_0, g_1, \dots\}$ gegeben. Somit läßt sich das Polynom $\widetilde{f} \in B$ als $\mathbb{Z}_{(p)}$-Linearkombination der g_i darstellen, und es ergibt sich für das ursprüngliche Polynom $f \in F(s,t)$:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=s}^{t} a_i\, x^i && \text{mit } a_i \in \mathbb{Q} \\ &= x^s \cdot \sum_{i=0}^{t-s} b_i\, g_i && \text{mit } b_i \in \mathbb{Z}_{(p)} \quad . \end{aligned}$$

Somit ist klar, daß nun für die Bilder der beiden Homomorphismen c^+ und c^- gilt:

$$\begin{aligned} Bild\ c^+ &= Bild\ c^+\{x^s g_0, \dots, x^s g_{t-s}\} \cdot \mathbb{Z}_{(p)} \\ Bild\ c^- &= Bild\ c^-\{x^s g_0, \dots, x^s g_{t-s}\} \cdot \mathbb{Z}_{(p)} \quad . \end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der genauen Definition der g_i (3.7.13) lassen sich die Bilder $Bild\ c^+$ und $Bild\ c^-$ noch genauer bestimmen:

Da $grad\ g_i = i$ gilt, ist $grad\ g_i \leq t - s$ für alle $i \leq t - s$. Somit kann der Koeffizient des Polynoms $x^s g_i$ vor dem Monom $x^s \cdot x^{t-s} = x^t$ nur Null sein. Es gilt also:

$$c^+(x^s g_i) = 0 \text{ für alle } i < t - s \quad ,$$

und für $i = t - s$ gilt:

$$c^+(x^s g_{t-s}) = \frac{1}{p^{\nu_p([\frac{t-s}{p-1}]! + [\frac{t-s}{p-1}])}} \quad .$$

Für den Homomorphismus c^- gilt für alle $i = 0, \dots, t - s$:

$$c^-(x^s g_i) = g_i(0) = \frac{\prod_{j=0}^{i} (-k)^j}{p^{\nu_p([\frac{i}{p-1}]! + [\frac{i}{p-1}])}} \quad ,$$

was bedeutet, daß der Homomorphismus c^- auf $x^s \cdot g_{t-s}$ vom Betrag her maximal wird.

Somit ergibt sich zusammengefaßt folgendes Lemma:

Lemma 3.7.18: *Für die Bilder der beiden Homomorphismen*

$$c^+, c^- : F(s,t) \longrightarrow \mathbb{Q}$$

gilt:

$$\begin{aligned} Bild\ c^+ &= c^+(x^s g_{t-s}) \cdot \mathbb{Z}_{(p)} \\ Bild\ c^- &= c^-(x^s g_{t-s}) \cdot \mathbb{Z}_{(p)} \quad . \end{aligned}$$

Die beiden Kerne der Homomorphismen c^+ und c^- sind leichter zu bestimmen. Es gilt offensichtlich:

$$\begin{aligned} Kern\ c^+ &= F(s,t-1) \\ Kern\ c^- &= F(s+1,t) \quad , \end{aligned}$$

und es ergibt sich abschließend folgendes Korollar:

Korollar 3.7.19: *Für zwei beliebig, aber fest gewählte ganze Zahlen $s,t \in \mathbb{Z}$ mit $s \leq 0 \leq t$ ergeben sich die beiden Isomorphismen:*

$$\begin{aligned} Bild\ c^+ &\cong \tfrac{F(s,t)}{Kern\ c^+} \cong \tfrac{F(s,t)}{F(s,t-1)} \\ Bild\ c^- &\cong \tfrac{F(s,t)}{Kern\ c^-} \cong \tfrac{F(s,t)}{F(s+1,t)} \end{aligned}$$

bzw. die beiden kurzen exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccl} F(s,t-1) & \hookrightarrow & F(s,t) & \twoheadrightarrow & Bild\ c^+ = c^+(x^s g_{t-s}) \cdot \mathbb{Z}_{(p)} \\ F(s+1,t) & \hookrightarrow & F(s,t) & \twoheadrightarrow & Bild\ c^- = c^-(x^s g_{t-s}) \cdot \mathbb{Z}_{(p)} \end{array}$$

Nun wird als Familie von Unterringen von $B[x^{-1}]$ die Familie $\left\{F(-\left[\frac{n}{2}\right], -\left[\frac{n}{2}\right]+n)_n\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ betrachtet. Es gilt:

Lemma 3.7.20: *Für alle $n \in \mathbb{N}$ bildet die Folge*

$$\{g_0, g_1, x^{-1}g_2, x^{-1}g_3, x^{-2}g_4, \ldots, x^{-\left[\frac{n}{2}\right]}g_n\}$$

eine Basis von

$$F(-\left[\tfrac{n}{2}\right], -\left[\tfrac{n}{2}\right]+n) \quad .$$

Beweis: Der Beweis wird mit Induktion über $n \in \mathbb{N}$ geführt, wobei der Induktionsanfang für $n=0$ und $n=1$ trivial ist.

Nach Induktionsvoraussetzung gelte also:
$\{g_0, g_1, \ldots x^{-\left[\frac{n}{2}\right]}g_n\}$ ist eine Basis von $F(-\left[\frac{n}{2}\right], -\left[\frac{n}{2}\right]+n)$.

Dann ist im Induktionsschritt $n \longmapsto n+1$ zu zeigen:
$\{g_0, g_1, \ldots x^{-\left[\frac{n}{2}\right]}g_n, x^{-\left[\frac{n+1}{2}\right]}g_{n+1}\}$ ist eine Basis von $F(-\left[\frac{n+1}{2}\right], -\left[\frac{n+1}{2}\right]+n+1)$.

An dieser Stelle müssen nun zwei Fälle unterschieden werden:

<u>1.Fall: $n \in \mathbb{N}$ ist gerade:</u>

Wegen $-\left[\frac{n+1}{2}\right] = -\left[\frac{n}{2}\right]$ und $-\left[\frac{n+1}{2}\right]+n+1 = -\left[\frac{n}{2}\right]+n+1$ ist in diesem Fall zu zeigen:
$\{g_0, g_1, \ldots x^{-\left[\frac{n}{2}\right]}g_n, x^{-\left[\frac{n}{2}\right]}g_{n+1}\}$ ist eine Basis von $F(-\left[\frac{n}{2}\right], -\left[\frac{n}{2}\right]+n+1)$.

Mit $s = -\left[\frac{n}{2}\right]$ und $t = -\left[\frac{n}{2}\right] + n + 1$ gilt nach Korollar 3.7.19 (erste exakte Sequenz): Die Sequenz

$$F(-\left[\tfrac{n}{2}\right], -\left[\tfrac{n}{2}\right] + n) \hookrightarrow F(-\left[\tfrac{n}{2}\right], -\left[\tfrac{n}{2}\right] + n + 1) \twoheadrightarrow \mathit{Bild}\ c^+$$

ist kurz exakt. Da nach Lemma 3.7.18 gilt:

$$\mathit{Bild}\ c^+ = c^+(x^s g_{t-s}) \cdot \mathbb{Z}_{(p)} = c^+(x^{-\left[\frac{n}{2}\right]} g_{n+1}) \cdot \mathbb{Z}_{(p)} \quad ,$$

ist $x^{-\left[\frac{n}{2}\right]} g_{n+1}$ genau das Polynom, das die Basis $\{g_0, g_1, \ldots x^{-\left[\frac{n}{2}\right]} g_n\}$ von $F(-\left[\frac{n}{2}\right], -\left[\frac{n}{2}\right] + n)$ zu einer Basis von $F(-\left[\frac{n}{2}\right], -\left[\frac{n}{2}\right] + n + 1)$ ergänzt.

<u>2.Fall: $n \in \mathbb{N}$ ist ungerade:</u>

Wegen $-\left[\frac{n+1}{2}\right] = -\left[\frac{n}{2}\right] - 1$ und $-\left[\frac{n+1}{2}\right] + n + 1 = -\left[\frac{n}{2}\right] + n$ ist in diesem Fall zu zeigen: $\{g_0, g_1, \ldots x^{-\left[\frac{n}{2}\right]} g_n, x^{-\left[\frac{n}{2}\right]-1} g_{n+1}\}$ ist eine Basis von $F(-\left[\frac{n}{2}\right], -\left[\frac{n}{2}\right] + n)$.

Mit $s = -\left[\frac{n}{2}\right] - 1$ und $t = -\left[\frac{n}{2}\right] + n$ gilt nach Korollar 3.7.19 (zweite exakte Sequenz): Die Sequenz

$$F(-\left[\tfrac{n}{2}\right], -\left[\tfrac{n}{2}\right] + n) \hookrightarrow F(-\left[\tfrac{n}{2}\right] - 1, -\left[\tfrac{n}{2}\right] + n) \twoheadrightarrow \mathit{Bild}\ c^-$$

ist kurz exakt. Da nach Lemma 3.7.18 gilt:

$$\mathit{Bild}\ c^- = c^-(x^s g_{t-s}) \cdot \mathbb{Z}_{(p)} = c^-(x^{-\left[\frac{n}{2}\right]-1} g_{n+1}) \cdot \mathbb{Z}_{(p)} \quad ,$$

ist $x^{-\left[\frac{n}{2}\right]-1} g_{n+1}$ genau das Polynom, das die Basis $\{g_0, g_1, \ldots x^{-\left[\frac{n}{2}\right]} g_n\}$ von $F(-\left[\frac{n}{2}\right], -\left[\frac{n}{2}\right] + n)$ zu einer Basis von $F(-\left[\frac{n}{2}\right] - 1, -\left[\frac{n}{2}\right] + n)$ ergänzt. □

Da die Familie $\left\{F(-\left[\frac{n}{2}\right], -\left[\frac{n}{2}\right] + n)_n\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ gleichzeitig eine Folge von Inklusionen

$$F(0,0) \hookrightarrow F(0,1) \hookrightarrow F(-1,1) \hookrightarrow F(-1,2) \hookrightarrow F(-2,2) \hookrightarrow \ldots$$

definiert, ergänzen sich die Basen der Unterringe $F(-\left[\frac{n}{2}\right], -\left[\frac{n}{2}\right] + n)$ schließlich zu der gesuchten Basis von $B[x^{-1}] = B[\omega^{-1}]$:

Satz 3.7.21: *Die Folge*

$$(\omega^{-\left[\frac{n}{2}\right]} g_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

bildet eine Basis von $B[\omega^{-1}]$. □

Kapitel 4

Die K-Kohomologie $\widetilde{K}^*(K;\mathbb{Z}_{(p)})$ des Bottspektrums K

Nach der Künnethformel mit $\mathbb{Z}_{(p)}$-Koeffizienten gilt für die nullte K-Kohomologiegruppe des Bottspektrums K mit $\mathbb{Z}_{(p)}$-Koeffizienten ([1], [6]):

$$\widetilde{K}^0(K;\mathbb{Z}_{(p)}) \cong Hom_{\mathbb{Z}_{(p)}}(\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Z}_{(p)}),\mathbb{Z}_{(p)}) \quad .$$

In Kapitel 3.7 wurde die nullte K-Homologiegruppe des Bottspektrums K mit $\mathbb{Z}_{(p)}$-Koeffizienten berechnet, und nach Satz 3.7.11 gilt:

$$\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Z}_{(p)}) \cong B[\omega^{-1}] \quad .$$

Weiter wurde eine Basis von $B[\omega^{-1}]$ berechnet: Nach Satz 3.7.21 bildet die Folge $(\omega^{-[\frac{n}{2}]}g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Basis von $B[\omega^{-1}]$.

Damit ergibt sich:

$$\widetilde{K}^0(K;\mathbb{Z}_{(p)}) \cong Hom_{\mathbb{Z}_{(p)}}(B[\omega^{-1}],\mathbb{Z}_{(p)}) \quad .$$

Das Ziel dieses Kapitels ist es, die K-Kohomologiegruppe nun mithilfe der Homomorphismen aus $Hom_{\mathbb{Z}_{(p)}}(B[\omega^{-1}],\mathbb{Z}_{(p)})$ zu beschreiben.

Dazu wird zunächst in Kapitel 4.1 die Adams-Operation mit Koeffizienten und in Kapitel 4.2 der durch die Adams-Operation definierte Homomorphismus $\psi^k_{Hom} \in Hom_{\mathbb{Z}_{(p)}}(B[\omega^{-1}],\mathbb{Z}_{(p)})$ angegeben. Kapitel 4.3 hat umgekehrt die durch solche Homomorphismen definierten zugehörigen stabilen Operationen zum Inhalt.

In Kapitel 4.4 werden Homomorphismen $\Phi_m \in Hom_{\mathbb{Z}_{(p)}}(B[\omega^{-1}],\mathbb{Z}_{(p)})$ konstruiert, mit deren Hilfe sich alle Elemente in $\widetilde{K}^0(K;\mathbb{Z}_{(p)})$ beschreiben lassen.

4.1 Die Adams-Operation mit Koeffizienten $\psi^k : \widetilde{K}_*(K;R) \longrightarrow \widetilde{K}_*(K;R)$

In Kapitel 3.5.1 war die (stabile) Adams-Operation $\psi^k : \widetilde{K}_*(K) \longrightarrow \widetilde{K}_*(K;R)$ mithilfe der Spektrenabbildung $\psi^k_{Sp} : K \longrightarrow KR$ vorgestellt worden:

$$\psi^k : \widetilde{K}_*(K) = \pi_*(K \wedge K) \xrightarrow{(\psi^k_{Sp} \wedge id_K)_*} \pi_*(KR \wedge K) = \widetilde{KR}_*(K) = \widetilde{K}_*(K;R) \quad .$$

Anschließend wurde in Kapitel 3.5.2 die von dieser Spektrenabbildung $\psi^k_{Sp} : K \longrightarrow KR$ in K-Homologie induzierte Abbildung

$$\widetilde{K}_*(\psi^k_{Sp}) : \widetilde{K}_*(K) = \pi_*(K \wedge K) \xrightarrow{(id_K \wedge \psi^k_{Sp})_*} \pi_*(K \wedge KR) = \widetilde{K}_*(KR)$$

betrachtet sowie die Erweiterung von $\mu_K : K \wedge K \longrightarrow K$ zu $\mu : K \wedge KR \longrightarrow KR$ und deren in Homotopie induzierte Abbildung

$$\mu_* : \pi_*(K \wedge KR) \longrightarrow \pi_*(KR) \cong \widetilde{K}_*(S^0;R) \cong R[u,u^{-1}] \quad .$$

Es wurde gezeigt, daß mit dem Kronecker-Produkt

$$< -,- >: \widetilde{K}^0(K;R) \otimes \widetilde{K}_{2n}(K) \longrightarrow \widetilde{K}_{2n}(S^0;R) \cong R$$

gilt:

$$< \psi^k_{Sp}, - >= \mu_* \circ \widetilde{K}_*(\psi^k_{Sp})(-) \quad .$$

In Kapitel 3 war es unbedingt notwendig gewesen, die Adams-Operation ψ^k auf $\widetilde{K}_0(K)$ ohne Koeffizienten R operieren zu lassen, um die Ganzzahligkeitseigenschaft der Elemente aus $\widetilde{K}_0(K)$ nachweisen zu können.

In diesem Kapitel ist es aber nötig, die Adams-Operation auch auf der K-Homologiegruppe $\widetilde{K}_0(K;R)$ *mit* R-Koeffizienten operieren zu lassen. Natürlich läßt sich die Adams-Operation so erweitern, daß dies möglich ist.

Dazu müssen allerdings auch die Abbildungen ψ^k_{Sp} und μ erweitert sowie auf ein erweitertes Kronecker-Produkt zurückgegriffen werden. Außerdem werden die beiden folgenden Lemmata benötigt:

Lemma 4.1.1: *Ist KR das Spektrum, das die K-Homologietheorie mit Koeffizienten in R induziert, dann gilt:*

$$\widetilde{K}_n(K;R) \cong \widetilde{K}_n(KR;R) \text{ für alle } n \in \mathbb{Z} \quad .$$

Beweis: Es ist

$$\widetilde{K}_n(K;R) = \widetilde{KR}_n(K) = \pi_n(KR \wedge K) \cong \pi_n(K \wedge KR) = \widetilde{K}_n(KR) \quad .$$

Nun ist $\widetilde{K}_n(KR)$ bereits ein R-Modul, so daß das Tensorieren mit R die Gruppe $\widetilde{K}_n(KR)$ nicht verändert. In K-Homologie gilt somit:

$$\widetilde{K}_n(KR) = \widetilde{K}_n(KR) \otimes R \cong \widetilde{K}_n(KR; R) \quad . \qquad \square$$

Dieser Isomorphismus gilt auch in K-Kohomologie:

Lemma 4.1.2: *Ist KR das Spektrum, das die K-Kohomologietheorie mit Koeffizienten in R induziert, dann gilt:*

$$\widetilde{K}^n(K; R) \cong \widetilde{K}^n(KR; R) \textit{ für alle } n \in \mathbb{Z} \quad .$$

Beweis: Da die Gruppe $\widetilde{K}_n(K; R)$ frei ist, gilt nach der Künnethformel ([1], [6]):

$$\widetilde{K}^n(K; R) \cong Hom_R(\widetilde{K}_n(K; R), R) \quad .$$

Mit obigem Lemma 4.1.1 folgt dann

$$Hom_R(\widetilde{K}_n(K; R); R) \cong Hom_R(\widetilde{K}_n(KR; R), R)$$

und schließlich

$$Hom_R(\widetilde{K}_n(KR; R); R) \cong \widetilde{K}^n(KR; R) \quad . \qquad \square$$

Nach dieser Erinnerung und Vorbereitung soll nun die (stabile) Adams-Operation mit Koeffizienten beschrieben werden:

Die Adams-Operation mit Koeffizienten $\psi^k : \widetilde{K}_*(K; R) \longrightarrow \widetilde{K}_*(K; R)$ ist durch die Spektrenabbildung

$$\widetilde{\psi^k_{Sp}} : KR \longrightarrow KR$$

gegeben. Es ist also

$$\psi^k : \widetilde{K}_*(K; R) = \pi_*(KR \wedge K) \xrightarrow{(\widetilde{\psi^k_{Sp}} \wedge id_K)_*} \pi_*(KR \wedge K) = \widetilde{KR}_*(K) = \widetilde{K}_*(K; R) \quad .$$

Genauso wie die Spektrenabbildung $\psi^k_{Sp} : K \longrightarrow KR$ wegen $\widetilde{K}^0(K; R) = \widetilde{KR}^0(K) = [K, KR]$ als Element von $\widetilde{K}^0(K; R)$ aufgefaßt wird, kann die Spektrenabbildung $\widetilde{\psi^k_{Sp}} : KR \longrightarrow KR$ als Element von $\widetilde{K}^0(KR; R) = \widetilde{KR}^0(KR) = [KR, KR]$ verstanden werden.

Unter dem Isomorphismus $\widetilde{K}^0(KR; R) \cong \widetilde{K}^0(K; R)$ nach Lemma 4.1.2 entspricht die Spektrenabbildung $\widetilde{\psi^k_{Sp}}$ natürlich gerade ψ^k_{Sp}.

Wie in Kapitel 3.5 wird nun die von $\widetilde{\psi^k_{Sp}} : KR \longrightarrow KR$ in K-Homologie induzierte Abbildung betrachtet, diesmal allerdings mit R-Koeffizienten. Lemma 4.1.1 liefert zudem ein kommutatives Diagramm, so daß wieder auf die ursprüngliche Spektrenabbildung $\psi^k_{Sp} : K \longrightarrow KR$ zurückgegriffen werden kann:

$$\begin{array}{ccccc}
\widetilde{KR}_*(\widetilde{\psi^k_{Sp}}) : \widetilde{K}_*(KR;R) = \pi_*(KR \wedge KR) & \xrightarrow{(id_{KR} \wedge \widetilde{\psi^k_{Sp}})_*} & \pi_*(KR \wedge KR) = \widetilde{K}_*(KR;R) \\
\wr\| & & \| \\
\widetilde{KR}_*(\psi^k_{Sp}) : \widetilde{K}_*(K;R) = \pi_*(KR \wedge K) & \xrightarrow{(id_{KR} \wedge \psi^k_{Sp})_*} & \pi_*(KR \wedge KR) = \widetilde{K}_*(KR;R)
\end{array}$$

Nun muß noch die von der Erweiterung $\mu_{KR} : KR \wedge KR \longrightarrow KR$ in Homotopie induzierte Abbildung

$$(\mu_{KR})_* : \pi_*(KR \wedge KR) \longrightarrow \pi_*(KR) = \widetilde{K}_*(S^0;R) = R[u,u^{-1}]$$

betrachtet werden, und es gilt wieder:

Korollar 4.1.3: *Bezeichnet*

$$< -,- >: \widetilde{K}^0(K;R) \otimes \widetilde{K}_{2n}(K;R) \longrightarrow \widetilde{K}_{2n}(S^0;R) \cong R$$

das Kronecker-Produkt, so gilt:

$$< \psi^k_{Sp}, - > = (\mu_{KR})_* \circ \widetilde{KR}_*(\psi^k_{Sp})(-) \quad .$$

Beweis: Für $g \in \widetilde{K}_{2n}(K;R) = \widetilde{KR}_{2n}(K) = \pi_0(KR \wedge K) = [\Sigma^{2n}S, KR \wedge K]$ wird das Kronecker-Produkt $< \psi^k_{Sp}, g > \in \widetilde{K}_{2n}(S^0;R) \cong R$ induziert von

$$\Sigma^{2n}S \longrightarrow KR \wedge K \xrightarrow{id_{KR} \wedge \psi^k_{Sp}} KR \wedge KR \xrightarrow{\mu_{KR}} KR \quad .$$

Dies entspricht genau der Konstruktion von $(\mu_{KR})_* \circ \widetilde{KR}_*(\psi^k_{Sp})$. □

4.2 Der Homomorphismus $\psi^k_{Hom} : B[\omega^{-1}] \longrightarrow \mathbb{Z}_{(p)}$

Die stabile Adams-Operation mit Koeffizienten $\psi^k : \widetilde{K}_*(K;R) \longrightarrow \widetilde{K}_*(K;R)$ ist durch die Spektrenabbildung $\widetilde{\psi^k_{Sp}} : KR \longrightarrow KR$ gegeben. Diese ist ein Element in $\widetilde{K}^0(KR;R) = \widetilde{KR}^0(KR) = [KR, KR]$ und entspricht unter dem Isomorphismus $\widetilde{K}^0(KR;R) \cong \widetilde{K}^0(K;R)$ nach Lemma 4.1.2 gerade der Spektrenabbildung ψ^k_{Sp}.

Nach der Künnethformel mit Koeffizienten ([1], [6]) gilt nun:

$$\widetilde{K}^0(K;R) \cong Hom_R(\widetilde{K}_0(K;R), R) \quad .$$

Die Spektrenabbildung ψ^k_{Sp} entspricht also einem Homomorphismus

$$\psi^k_{Hom} \in Hom_R(\widetilde{K}_0(K;R), R) \quad .$$

Dieser Homomorphismus ist bereits bekannt: Es ist die Komposition

$$(\mu_{KR})_* \circ \widetilde{KR}_*(\psi^k_{Sp}) : \widetilde{K}_*(K;R) \longrightarrow R[u,u^{-1}]$$

eingeschränkt auf $\widetilde{K}_0(K;R)$, die sich nach Korollar 4.1.3 für Elemente aus $\widetilde{K}_{2n}(K;R)$, $n \in \mathbb{Z}$, mithilfe des Kronecker-Produkts als

$$(\mu_{KR})_* \circ \widetilde{KR}_*(\psi^k_{Sp})(-) = < \psi^k_{Sp}, - >$$

darstellen läßt.

Definition 4.2.1: *Der der Spektrenabbildung $\psi^k_{Sp} \in \widetilde{K}^0(K;R)$ unter dem Isomorphismus $\widetilde{K}^0(K;R) \cong Hom_R(\widetilde{K}_0(K;R),R)$ entsprechende Homomorphismus*

$$\psi^k_{Hom} : \widetilde{K}_0(K;R) \longrightarrow R$$

wird definiert durch

$$\psi^k_{Hom}(-) = < \psi^k_{Sp}, - > \quad ,$$

wobei

$$< -,- >: \widetilde{K}^0(K;R) \otimes K_0(K;R) \longrightarrow K_0(K;R) \cong R$$

das Kronecker-Produkt bezeichnet.

Damit überträgt sich Lemma 3.5.5 aus Kapitel 3.5 wie folgt:

Lemma 4.2.2: *Für alle Elemente $\omega^i = (v \cdot u^{-1})^i \in \widetilde{K}_0(K) \subset K_0(K;R)$, $i \in \mathbb{Z}$, gilt:*

$$\psi^k_{Hom}(\omega^i) = < \psi^k_{Sp}, \omega^i > = k^i \in \widetilde{K}_0(S^0;R) \cong R \quad .$$

Aufgrund der besonderen Eigenschaften der stabilen Adams-Operation ist der Homomorphismus ψ^k_{Hom} ein Ringhomomorphismus.

Sei nun $R = \mathbb{Z}_{(p)}$ und $k \not\equiv 0(p)$, damit $k \in \mathbb{Z}$ in $R = \mathbb{Z}_{(p)}$ invertierbar ist.

Dann gilt nach Satz 3.7.11 für die nullte K-Homologiegruppe des Bottspektrums K mit $\mathbb{Z}_{(p)}$-Koeffizienten:

$$\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Z}_{(p)}) \cong B[\omega^{-1}]$$

und somit für die nullte K-Kohomologiegruppe

$$\widetilde{K}^0(K;\mathbb{Z}_{(p)}) \cong Hom_{\mathbb{Z}_{(p)}}(B[\omega^{-1}],\mathbb{Z}_{(p)}) \quad .$$

Die Elemente aus $B[\omega^{-1}]$ sind Polynome $f \in \mathbb{Q}[\omega,\omega^{-1}]$ mit besonderen Eigenschaften. Wie zu Beginn des Kapitels 3.5 ausführlich diskutiert worden ist, entspricht unter dem

Isomorphismus $\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Z}_{(p)}) \cong B[\omega^{-1}]$ das Element $\omega^i \in \widetilde{K}_0(K;\mathbb{Z}_{(p)})$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ nun dem Monom ω^i bzw. dem Polynom $f \in B[\omega^{-1}]$ mit $f(\omega) = \omega^i$, und $f(\omega)$ kann nicht als Polynom, sondern als Funktions*wert* bzw. Element aus $\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Z}_{(p)})$ verstanden werden.

Unter dieser Voraussetzung und mit Lemma 4.2.2 sowie der Kenntnis der Basis von $B[\omega^{-1}]$ nach Satz 3.7.21 gilt dann für den Homomorphismus $\psi^k_{Hom} : B[\omega^{-1}] \longrightarrow \mathbb{Z}_{(p)}$ folgendes Lemma:

Lemma 4.2.3: *Für den Homomorphismus*

$$\psi^k_{Hom} : B[\omega^{-1}] \longrightarrow \mathbb{Z}_{(p)}$$

gilt für alle $f \in B[\omega^{-1}]$:

$$\psi^k_{Hom}(f) = < \psi^k_{Sp}, f(\omega) > = f(k) \quad .$$

4.3 Operationen auf $\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Z}_{(p)})\simeq B[\omega^{-1}]$

Im Zusammenhang mit der Adams-Operation ψ^k sind bisher einige weitere Abbildungen genannt worden: die beiden Spektrenabbildungen ψ^k_{Sp} und $\widetilde{\psi^k_{Sp}}$, die Komposition $(\mu_{KR})_* \circ \widetilde{KR}_*(\psi^k_{Sp})$, die sich auf geraden K-Homologiegruppen gut durch das Kronecker-Produkt $< \psi^k_{Sp}, - >$ beschreiben läßt und eingeschränkt auf die nullte K-Homologiegruppe den Homomorphismus $\psi^k_{Hom} : \widetilde{K}_0(K;R) \longrightarrow R$ definiert, der selbst wiederum für $R = \mathbb{Z}_{(p)}$ eine spezielle Form annimmt.

Alle diese Abbildungen bedingen sich aber gegenseitig: Genaugenommen beschreiben sie alle die Adams-Operation - eben nur jeweils auf einer anderen Ebene.

Da aber auf allen Ebenen nur mit in Homotopie induzierten Abbildungen gearbeitet wird, lassen sich im Prinzip für jede beliebige Operation $\Phi : \widetilde{K}_*(K;R) \longrightarrow \widetilde{K}_*(K;R)$ die entsprechenden Abbildungen konstruieren - sofern der Koeffizientenring R keine zusätzlichen Einschränkungen bedingt. Ist der Ring R so gewählt, daß $\mathbb{Z} \subset R \subset \mathbb{Q}$, dann ist jeweils die K-Homologie $\widetilde{K}_*(K;R)$ torsionsfrei, und es treten keine Probleme auf.

Es folgt nun eine kurze Übersicht aller mit der Adams-Operation in Zusammenhang stehenden Abbildungen sowie der entsprechenden Abbildungen für die Identität und die k^n-fache Identität für $k, n \in \mathbb{Z}$, da diese später noch benötigt werden.

Lemma 4.3.1: *Sei R ein Ring mit $\mathbb{Z} \subset R \subseteq \mathbb{Q}$ und $k \in \mathbb{Z}$ in R invertierbar. Dann existieren folgende Abbildungen:*

1.) die Spektrenabbildungen

$$\psi^k_{Sp}\ ,\ id_{Sp}\ ,\ (k^n \cdot id)_{Sp}\ : K \longrightarrow KR$$

bzw. $$\widetilde{\psi^k_{Sp}}\ ,\ \widetilde{id_{Sp}} = id_{KR}\ ,\ (\widetilde{k^n \cdot id})_{Sp}\ : KR \longrightarrow KR$$

2.) *die Operationen*

$$\psi^k\ ,\ id\ ,\ k^n \cdot id\ : \widetilde{K}_*(K;R) \longrightarrow \widetilde{K}_*(K;R)$$

mit

a.) $\psi^k(x) = (\widetilde{\psi^k_{Sp}} \wedge id_K)_*(x)$

b.) $id(x) = (id_{KR} \wedge id_K)_*(x) = x$

c.) $(k^n \cdot id)(x) = ((k^n \cdot id)_{Sp} \wedge id_K)_*(x) = k^n \cdot x$

für alle $x \in \widetilde{K}_*(K;R)$.

3.) *die Kompositionen*

$$\left.\begin{array}{l} (\mu_{KR})_* \circ \widetilde{KR}_*(\psi^k_{Sp}) \\ (\mu_{KR})_* \circ \widetilde{KR}_*(id_{Sp}) \\ (\mu_{KR})_* \circ \widetilde{KR}_*((k^n \cdot id)_{Sp}) \end{array}\right\} : K_*(K;R) \longrightarrow R$$

mit

a.) $((\mu_{KR})_* \circ \widetilde{KR}_*(\psi^k_{Sp}))(x) = (id_{KR} \wedge \psi^k_{Sp})_*(x) =< \psi^k_{Sp}, x >$

b.) $((\mu_{KR})_* \circ \widetilde{KR}_*(id_{Sp}))(x) = (id_{KR} \wedge id_{KR})_*(x) =< id_{KR}, x >$

c.) $((\mu_{KR})_* \circ \widetilde{KR}_*((k^n \cdot id)_{Sp}))(x) = (id_{KR} \wedge (k^n \cdot id)_{Sp})_*(x)$
$= < (k^n \cdot id)_{Sp}, x >$

für alle $x \in \widetilde{K}_*(K;R)$.

4.) *die Homomorphismen*

$$\psi^k_{Hom}\ ,\ 1_{Hom}\ ,\ k^n_{Hom}\ : K_0(K;R) \longrightarrow R$$

mit

a.) $\psi^k_{Hom}(\omega^i) =< \psi^k_{Sp}, \omega^i >= k^i$

b.) $1_{Hom}(\omega^i) =< id_{KR}, \omega^i >= 1^i$

c.) $k^n_{Hom}(\omega^i) =< (k^n \cdot id)_{Sp}, \omega^i >= k^n \cdot 1^i$

für alle $\omega^i \in \widetilde{K}_0(K;R)$.

5.) *für* $R = \mathbb{Z}_{(p)}$ *die Homomorphismen*

$$\psi^k_{Hom}\ ,\ 1_{Hom}\ ,\ k^n_{Hom}\ : B[\omega^{-1}] \longrightarrow \mathbb{Z}_{(p)}$$

mit

a.) $\psi^k_{Hom}(f) =< \psi^k_{Sp}, f(\omega) >= f(k)$

b.) $1_{Hom}(f) =< id_{KR}, f(\omega) >= f(1)$

c.) $k^n_{Hom}(f) =< (k^n \cdot id)_{Sp}, f(\omega) >= k^n \cdot f(1)$

für alle $f \in B[\omega^{-1}]$.

Nun ist noch die Frage von Interesse, wann zwei Operationen auf $\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Z}_{(p)})$ gleich sind. Dazu wird betrachtet, wie die Operationen auf den Koeffizienten $\widetilde{K}_{2n}(S^0;\mathbb{Z}_{(p)})$ für $n \in \mathbb{Z}$ operieren.

Die stabile Adams-Operation $\psi^k : \widetilde{K}_*(K;R) \longrightarrow \widetilde{K}_*(K;R)$ operiert auf den Koeffizienten $\widetilde{K}_{2n}(S^0;R)$ von $\widetilde{K}_*(K;R)$ durch Multiplikation mit $k^n \in R$, denn für alle $u^n \in \widetilde{K}_{2n}(S^0;R)$ gilt nach dem Beweis von Lemma 3.5.1:

$$\psi^k(u^n) = k^n \cdot u^n \quad .$$

Sie nun eine beliebige andere Operation

$$\Phi : \widetilde{K}_*(K;R) \longrightarrow \widetilde{K}_*(K;R)$$

als Homomorphismus

$$\Phi_{Hom} : \widetilde{K}_0(K;R) \longrightarrow R$$

gegeben. Dann existiert auch die zugehörige Spektrenabbildung

$$\Phi_{Sp} : K \longrightarrow KR$$

bzw.
$$\widetilde{\Phi_{Sp}} : KR \longrightarrow KR \quad ,$$

und es gilt:

$$\Phi = (\widetilde{\Phi_{Sp}} \wedge id)_*$$

und

$$\Phi_{Hom}(-) = (\mu_{KR})_* \circ \widetilde{KR}_*(\Phi_{Sp})(-) =< \Phi_{Sp}, - > \quad .$$

Die Frage, wie Φ auf den Koeffizienten operiert, wird durch folgenden Satz beantwortet:

Satz 4.3.2: *Die Operation $\Phi : \widetilde{K}_*(K;R) \longrightarrow \widetilde{K}_*(K;R)$ operiert auf den Koeffizienten $\widetilde{K}_{2n}(S^0;R)$ von $\widetilde{K}_*(K;R)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ durch Multiplikation mit der Zahl $\Phi_{Hom}(\omega^n) \in R$, d. h. es gilt:*

$$\Phi(u^n) = \Phi_{Hom}(\omega^n) \cdot u^n \textit{ für alle } u^n \in \widetilde{K}_{2n}(S^0;R), n \in \mathbb{Z} \quad .$$

Beweis: Die Operation $\Phi : \widetilde{K}_*(K;R) \longrightarrow \widetilde{K}_*(K;R)$ soll nur als Homomorphismus $\Phi_{Hom} : \widetilde{K}_0(K;R) \longrightarrow R$ gegeben sein. Also muß $\Phi(u^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mithilfe von Φ_{Hom} dargestellt werden.

Dazu wird folgendes kommutative Diagramm betrachtet:

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{K}_{2n}(S^0;R) \arrow[d, equal] & & \widetilde{K}_{2n}(S^0;R) \arrow[d, equal] & \\
\Phi : & \pi_{2n}(KR\wedge S) \arrow[rr, "\Phi=(\widetilde{\Phi_{Sp}}\wedge id_S)_*"] \arrow[d, "\cong"'] & & \pi_{2n}(KR\wedge S) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\cong"'] & \pi_{2n}(KR) \arrow[dddddd, equal] \\
 & \pi_{2n}(S\wedge KR) \arrow[d, "\eta_R"] & & \pi_{2n}(S\wedge KR) \arrow[d, "\eta_R"] & \\
 & \pi_{2n}(KR\wedge KR) \arrow[rr, "\widetilde{KR}_*(\widetilde{\Phi_{Sp}})=(id_{KR}\wedge\widetilde{\Phi_{Sp}})_*"] \arrow[d, equal] & & \pi_{2n}(KR\wedge KR) \arrow[dd, equal] & \\
 & \widetilde{K}_{2n}(KR;R) \arrow[d, "\cong"'] & & & \\
 & \widetilde{K}_{2n}(K;R) \arrow[d, equal] & & \widetilde{K}_{2n}(KR;R) \arrow[d, equal] & \\
 & \pi_{2n}(KR\wedge K) \arrow[rr, "\widetilde{KR}_*(\Phi_{Sp})=(id_{KR}\wedge\Phi_{Sp})_*"] & & \pi_{2n}(KR\wedge KR) \arrow[r, "(\mu_{KR})_*"] & \pi_{2n}(KR)\cong R \\
\Phi_{Hom} : & \pi_0(KR\wedge K) \arrow[rr, "\widetilde{KR}_*(\Phi_{Sp})=(id_{KR}\wedge\Phi_{Sp})_*"] \arrow[u, "\beta="', "\cdot u^n"] \arrow[d, equal] & & \pi_0(KR\wedge KR) \arrow[r, "(\mu_{KR})_*"] \arrow[u, "\beta="', "\cdot u^n"] \arrow[d, equal] & \pi_0(KR)\cong R \arrow[u, "\beta="', "\cdot u^n"] \arrow[d, equal] \\
 & \widetilde{K}_0(K;R) & & \widetilde{K}_0(KR;R) & \widetilde{K}_0(S^0;R)
\end{tikzcd}$$

Die Kommutativität der einzelnen Rechtecke des Diagramms ist klar. Somit gilt nun:

$$\begin{aligned}
\Phi(u^n) &= \beta\circ\Phi_{Hom}\circ\beta^{-1}\circ\eta_R(u^n)\\
&= \Phi_{Hom}(\eta_R(u^n)\cdot u^{-n})\cdot u^n\\
&= \Phi_{Hom}(v^n\cdot u^{-n})\cdot u^n\\
&= \Phi_{Hom}(\omega^n)\cdot u^n
\end{aligned}$$
□

Bemerkung: Für den Homomorphismus $\psi^k_{Hom}:\widetilde{K}_0(K;R)\longrightarrow R$ gilt nach Lemma 4.2.2 gerade $\psi^k_{Hom}(\omega^n)=k^n\in R$.

Das kommutative Diagramm aus dem Beweis von Satz 4.3.2 ergibt sich für jede Operation $\Phi:\widetilde{K}_*(K;R)\longrightarrow\widetilde{K}_*(K;R)$. Somit lassen sich nun je zwei Operationen miteinander vergleichen:

Korollar 4.3.3: *Zwei Operationen*

$$\varphi^1,\varphi^2 \quad:\quad \widetilde{K}_*(K;R)\longrightarrow\widetilde{K}_*(K;R)$$

seien durch ihre Homomorphismen

$$\varphi^1_{Hom}, \varphi^2_{Hom} \quad : \quad \widetilde{K}_0(K;R) \longrightarrow R$$

gegeben. Operieren φ^1 und φ^2 dann auf den Koeffizientengruppen $\widetilde{K}_{2n}(S^0;R)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gleich, so folgt:

$$\varphi^1 = \varphi^2 \quad .$$

Beweis: Nach dem Beweis von Satz 4.3.2 gilt für alle $u^n \in \widetilde{K}_{2n}(S^0;R)$, $i = 1, 2$:

$$\varphi^i(u^n) = \varphi^i_{Hom}(\omega^n) \cdot u^n \quad .$$

Operieren also φ^1 und φ^2 auf allen Koeffizientengruppen gleich, so gilt auch für die Homomorphismen φ^1_{Hom} und φ^2_{Hom}:

$$\varphi^1_{Hom}(\omega^n) = \varphi^2_{Hom}(\omega^n) \text{ für alle } n \in \mathbb{Z} \quad .$$

Damit stimmen die beiden Homomorphismen auf ganz $\widetilde{K}_0(K;R) \subset \mathbb{Q}[\omega, \omega^{-1}]$ überein und damit ebenfalls die beiden Operationen φ^1 und φ^2. □

4.4 Beschreibung von $\widetilde{K}^0(K;\mathbb{Z}_{(p)})$ durch stabile Operationen

Es gilt:

$$\widetilde{K}^0(K;\mathbb{Z}_{(p)}) \cong Hom_{\mathbb{Z}_{(p)}}(\widetilde{K}_0(K;\mathbb{Z}_{(p)}), \mathbb{Z}_{(p)}) \cong Hom_{\mathbb{Z}_{(p)}}(B[\omega^{-1}], \mathbb{Z}_{(p)}) \quad ,$$

und der durch die stabile Adams-Operation mit Koeffizienten definierte Homomorphismus $\psi^k_{Hom} : B[\omega^{-1}] \longrightarrow \mathbb{Z}_{(p)}$ ist ein Element aus $Hom_{\mathbb{Z}_{(p)}}(B[\omega^{-1}], \mathbb{Z}_{(p)})$.

Da $\widetilde{K}^0(K;\mathbb{Z}_{(p)})$ überabzählbar ist, werden unendliche Reihen in den ψ^k_{Hom} benötigt, um alle Elemente in $\widetilde{K}^0(K;\mathbb{Z}_{(p)})$ zu beschreiben.

Unter bestimmten Bedingungen definieren aber auch solche unendlichen Reihen wohldefinierte Elemente in $\widetilde{K}^0(K;\mathbb{Z}_{(p)})$:

Lemma 4.4.1: *Gegeben sei ein Familie $\{\Phi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ von Homomorphismen*

$$\Phi_m \in Hom_{\mathbb{Z}_{(p)}}(B[\omega^{-1}], \mathbb{Z}_{(p)}) \quad ,$$

sowie eine unbeschränkte, monoton fallende Funktion $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ und eine unbeschränkte, monoton steigende Funktion $\beta : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$. Gilt dann für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle Monome $\omega^i : (\omega \mapsto \omega^i) \in B[\omega^{-1}]$, $i \in \mathbb{Z}$:

$$\Phi_m(\omega^i) = 0 \text{ für alle } \alpha(m) \leq i \leq \beta(m) \quad ,$$

so definiert die unendliche Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m\Phi_m \; \textit{mit } c_m \in \mathbb{Z}_{(p)} \textit{ für alle } m \in \mathbb{N}$$

ein wohldefiniertes Element in $Hom_{\mathbb{Z}_{(p)}}(B[\omega^{-1}],\mathbb{Z}_{(p)})$ *und somit in* $\widetilde{K}^0(K;\mathbb{Z}_{(p)})$.

Beweis: Sei ein beliebiges Polynom $f \in B[\omega^{-1}]$ gegeben. Dann läßt sich f als Linearkombination endlich vieler Monome $\omega^i : (\omega \mapsto \omega^i) \in B[\omega^{-1}]$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ darstellen.

Mit der Voraussetzung folgt dann

$$\Phi_m(f) = 0 \quad ,$$

sobald $m \in \mathbb{N}$ genügend groß ist.

Die unendliche Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} c_m\Phi_m \in Hom_{\mathbb{Z}_{(p)}}(B[\omega^{-1}],\mathbb{Z}_{(p)})$ reduziert sich somit zu einer endlichen Summe. □

Definition 4.4.2: *Für* $m \in \mathbb{N}$ *werde die Familie* $\{\Phi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *von Homomorphismen* $\Phi_m \in Hom_{\mathbb{Z}_{(p)}}(B[\omega^{-1}],\mathbb{Z}_{(p)})$ *definiert durch:*

$$\begin{aligned}
\Phi_0 &= 1_{Hom}\\
\Phi_1 &= \psi^k_{Hom} - 1_{Hom}\\
\Phi_m &= (\psi^k_{Hom} - k_{Hom}^{-\left[\frac{m-1}{2}\right]})(\psi^k_{Hom} - k_{Hom}^{-\left[\frac{m-1}{2}\right]+1})\cdot\ldots\cdot(\psi^k_{Hom} - k_{Hom}^{\left[\frac{m}{2}\right]}) \textit{ für } m \geq 0
\end{aligned}$$

Diese Familie von Homomorphismen soll die in Lemma 4.4.1 angegebene Bedingung erfüllen. Also müssen zwei unbeschränkte Funktionen $\alpha, \beta : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ angegeben werden, von denen α monoton fallend und β monoton steigend ist :

Definition 4.4.3: *Die beiden unbeschränkten Funktionen*

$$\alpha \;,\; \beta : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

werden definiert durch

$$\alpha(m) := -\left[\frac{m-1}{2}\right] \qquad \textit{und} \qquad \beta(m) := \left[\frac{m}{2}\right] \quad .$$

Mit diesen beiden Funktionen α und β erfüllen nun alle Homomorphismen Φ_m die Bedingung aus Lemma 4.4.1:

Satz 4.4.4: *Für alle Monome $\omega^i : (\omega \mapsto \omega^i) \in B[\omega^{-1}]$, $i \in \mathbb{Z}$, gilt für alle $m \in \mathbb{N}$:*

$$\Phi_m(\omega^i) = 0 \textit{ für alle } \alpha(m) = -\left[\frac{m-1}{2}\right] \leq i \leq \left[\frac{m}{2}\right] = \beta(m) \quad .$$

Beweis: Für $m = 0$ ist zu zeigen:

$$\Phi_0(\omega^i) = 0 \text{ für alle } \alpha(0) = -1 \leq i \leq 0 = \beta(0) \quad .$$

Dies ist erfüllt, da es sich um eine leere Bedingung handelt.

Für $m = 1$ ist zu zeigen:

$$\Phi_1(\omega^i) = 0 \text{ für alle } \alpha(1) = 0 \leq i \leq 0 = \beta(1) \quad .$$

Dies ist erfüllt, denn nach Lemma 4.3.1 gilt: $\Phi_1(\omega^0) = \Phi_1(1) = (\psi^k_{Hom} - 1_{Hom})(1) = 1 - 1 = 0$.

Für $m \geq 2$ ist zu zeigen:

$$\Phi_m(\omega^i) = 0 \text{ für alle } \alpha(m) = -\left[\frac{m-1}{2}\right] \leq i \leq \left[\frac{m}{2}\right] = \beta(m) \quad .$$

Dies ist erfüllt, denn nach Lemma 4.3.1 gilt für alle Monome $\omega^i : (\omega \mapsto \omega^i) \in B[\omega^{-1}]$: $\psi^k_{Hom}(\omega^i) = k^i$ und $k^n_{Hom}(\omega^i) = k^n$.

Daraus folgt: $\Phi_m(\omega^i) = (k^i - k^{-\left[\frac{m-1}{2}\right]})(k^i - k^{-\left[\frac{m-1}{2}\right]+1}) \cdot \ldots \cdot (k^i - k^{\left[\frac{m}{2}\right]})$. □

Nun ist von Interesse, wie die Homomorphismen Φ_m auf den Basiselementen von $B[\omega^{-1}]$ operieren. Die Basiselemente von $B[\omega^{-1}]$ sind nach Satz 3.7.21 von der Form

$$(\omega^{-\left[\frac{n}{2}\right]} g_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad ,$$

wobei die Polynome $g_n \in B$ wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} g_0(\omega) &:= 1 \text{ für alle } \omega \\ g_n(\omega) &:= \frac{(\omega-1)(\omega-k)(\omega-k^2)\cdot\ldots\cdot(\omega-k^{n-1})}{p^{\nu_p(\bar{n}!)+\bar{n}}} \text{ für alle } n > 0 \quad . \end{aligned}$$

Die Polynome g_n lassen sich auch schreiben als

$$g_n(\omega) = \frac{\sum_{s=0}^{n} a_s \omega^s}{Nenner \ von \ g_n}$$

mit $a_s \in \mathbb{Z}$, $a_n = 1$ und $a_0 = (-1)^{n+1} k^{\sum_{s=0}^{n-1} s} \not\equiv 0(p)$,da $k \not\equiv 0(p)$,

bzw. als Polynom mit Monomen $\omega^s : (\omega \mapsto \omega^s) \in B[\omega^{-1}]$:

$$g_n = \frac{\sum_{s=0}^{n} a_s \omega^s}{Nenner \ von \ g_n} \quad .$$

Nun gilt folgender Satz:

Satz 4.4.5: *Für alle Homomorphismen Φ_m, $m \in \mathbb{N}$, und alle Basiselemente $\omega^{-[\frac{n}{2}]} g_n$ von $B[\omega^{-1}]$ mit $n < m$ gilt:*

$$\Phi_m(\omega^{-[\frac{n}{2}]} g_n) = 0 \text{ für alle } n < m \quad .$$

Beweis: Es ist

$$\Phi_m(\omega^{-[\frac{n}{2}]} g_n) = \frac{\sum_{s=0}^{n} a_s \Phi_m(\omega^{-[\frac{n}{2}]+s})}{Nenner\ von\ g_n} \quad .$$

Nach Voraussetzung gilt:

$$\Phi_m(\omega^i) = 0 \ \text{ für alle } \alpha(m) \leq i \leq \beta(m) \quad .$$

Daraus folgt:

$$\Phi_m(\omega^{-[\frac{n}{2}]+s}) = 0 \ \text{ für alle } \alpha(m) \leq -\left[\frac{n}{2}\right] + s \leq \beta(m) \quad .$$

Die Variable s durchläuft alle natürlichen Zahlen von 1 bis n:

$$s : 0 \longmapsto n \quad .$$

Daraus folgt, daß der Term $(-\left[\frac{n}{2}\right] + s)$ alle ganzen Zahlen von $-\left[\frac{n}{2}\right]$ bis $-\left[\frac{n}{2}\right] + n$ durchläuft:

$$(-\left[\tfrac{n}{2}\right] + s) : -\left[\tfrac{n}{2}\right] \longmapsto -\left[\tfrac{n}{2}\right] + n \quad .$$

Die Variable n wiederum durchläuft alle Werte von 0 bis $m-1$:

$$n : 0 \longmapsto m - 1 \quad .$$

Somit gilt für die linken Schranken $-\left[\frac{n}{2}\right]$ die Ungleichungskette:

$$-\left[\frac{m-1}{2}\right] \leq -\left[\frac{m-1}{2}\right] - 1 \leq \ldots \leq -\left[\frac{2}{2}\right] \leq -\left[\frac{1}{2}\right] \leq -\left[\frac{0}{2}\right]$$

und für die rechten Schranken $-\left[\frac{n}{2}\right] + n$ die Ungleichungskette

$$-\left[\frac{0}{2}\right] + 0 \leq -\left[\frac{1}{2}\right] + 1 \leq -\left[\frac{2}{2}\right] + 2 \leq \ldots \leq -\left[\frac{m-1}{2}\right] + m - 1 \quad .$$

Da nun aber $\alpha(m) = -\left[\frac{m-1}{2}\right]$ und $\beta(m) = -\left[\frac{m-1}{2}\right] + m - 1 = \left[\frac{m}{2}\right]$ gilt, liegt $-\left[\frac{n}{2}\right] + s$ also für alle $s \in \{0, \ldots, n\}$ und alle $n \in \{0, \ldots, m-1\}$ innerhalb der nach der Voraussetzung gegebenen Schranken. $\square$

Für den Fall $n = m$ gilt der folgende Satz:

Satz 4.4.6: *Für alle Homomorphismen Φ_m, $m \in \mathbb{N}$, und das Basiselement $\omega^{-[\frac{m}{2}]} g_m \in B[\omega^{-1}]$ gilt:*

$$\Phi_m(\omega^{-[\frac{m}{2}]} g_m) \not\equiv 0(p) \quad .$$

Beweis: Es ist

$$\Phi_m(\omega^{-[\frac{m}{2}]} g_m) = \frac{\sum_{s=0}^{m} a_s \Phi_m(\omega^{-[\frac{m}{2}]+s})}{Nenner\ von\ g_m} \quad .$$

Nach Voraussetzung gilt:

$$\Phi_m(\omega^i) = 0 \text{ für alle } \alpha(m) \le i \le \beta(m) \quad .$$

Daraus folgt

$$\Phi_m(\omega^{-[\frac{m}{2}]+s}) = 0 \text{ für alle } \alpha(m) \le -\left[\frac{m}{2}\right] + s \le \beta(m) \quad .$$

Nun gilt:

$$\alpha(m) = -\left[\tfrac{m-1}{2}\right] = \begin{cases} -\left[\frac{m}{2}\right]+1 & \text{für } m \text{ gerade} \\ -\left[\frac{m}{2}\right] & \text{für } m \text{ ungerade} \end{cases}$$

und

$$\beta(m) = \left[\tfrac{m}{2}\right] = \begin{cases} -\left[\frac{m}{2}\right]+\mathrm{m} & \text{für } m \text{ gerade} \\ -\left[\frac{m}{2}\right]+\mathrm{m}\text{-}1 & \text{für } m \text{ ungerade} \end{cases}$$

Daraus folgt

$$\Phi_m(\omega^{-[\frac{m}{2}]+s}) = 0 \begin{cases} \text{für alle} \quad 1 \le s \le m & \text{wenn } m \text{ gerade} \\ \text{für alle} \quad 0 \le s \le m-1 & \text{wenn } m \text{ ungerade} \end{cases} ,$$

und somit

$$\Phi_m(\omega^{-[\frac{m}{2}]} g_m) = \begin{cases} \frac{a_o \cdot \Phi_m(\omega^{-[\frac{m}{2}]})}{Nenner\ von\ g_m} & \text{für } m \text{ gerade} \\ \frac{\Phi_m(\omega^{-[\frac{m}{2}]+m})}{Nenner\ von\ g_m} & \text{für } m \text{ ungerade} \end{cases} .$$

Die beiden Fälle werden nun einzeln behandelt:

<u>1.Fall : m gerade</u>

In diesem Fall gilt:

$$\Phi_m(\omega^{-[\frac{m}{2}]}) = (k^{-[\frac{m}{2}]})^{m-1} \cdot \prod_{i=0}^{m}(1-k^i) \quad .$$

Da nun $a_0 \not\equiv 0(p)$ und $(k^{-[\frac{m}{2}]})^{m-1} \not\equiv 0(p)$, folgt:

$$\nu_p(a_0 \cdot \Phi_m(\omega^{-[\frac{m}{2}]})) = \nu_p(\prod_{i=0}^{m}(1-k^i)) = \sum_{i=1}^{m} \nu_p(k^i - 1) \quad .$$

2.Fall : m ungerade

In diesem Fall gilt:

$$\Phi_m(\omega^{-[\frac{m}{2}]+m}) = k^{-[\frac{m}{2}]}k^{-[\frac{m}{2}]+1} \cdot \ldots \cdot k^{-[\frac{m}{2}]+m-1} \cdot \prod_{i=0}^{m}(1-k^i) \quad .$$

Da nun $k^i \not\equiv 0(p)$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ folgt:

$$\nu_p(\Phi_m(\omega^{-[\frac{m}{2}]+m})) = \nu_p(\prod_{i=0}^{m}(k^i-1)) = \sum_{i=1}^{m} \nu_p(k^i - 1) \quad .$$

In beiden Fällen gilt nach Lemma 3.7.6:

$$\sum_{i=1}^{m} \nu_p(k^i-1) = \left[\frac{n}{p-1}\right] + \nu_p\left(\left[\frac{n}{p-1}\right]!\right) \quad ,$$

so daß also in beiden Fällen die p-Potenz des Nenners von $\Phi_m(\omega^{-[\frac{m}{2}]}\, g_m)$ mit der seines Zählers übereinstimmt. Daraus folgt nun die Behauptung:

$$\Phi_m(\omega^{-[\frac{m}{2}]}\, g_m) \not\equiv 0(p) \text{ für alle } m \in \mathbb{N} \quad . \qquad \square$$

Sei nun eine beliebige Operation $\phi : \widetilde{K}^0(K;\mathbb{Z}_{(p)}) \cong Hom_{\mathbb{Z}_{(p)}}(B[\omega^{-1}], \mathbb{Z}_{(p)})$ als $\phi_{Hom} : B[\omega^{-1}] \longrightarrow \mathbb{Z}_{(p)}$ gegeben. Da nach den soeben bewiesenen Sätzen 4.4.5 und 4.4.6 für alle Φ_m, $m \in \mathbb{N}$, und alle Basiselemente $\omega^{-[\frac{n}{2}]}g_n$ von $B[\omega^{-1}]$ gilt:

$$\Phi_m(\omega^{-[\frac{n}{2}]}g_n) = \begin{cases} 0 & \text{für } n < m \\ \not\equiv 0(p) & \text{für } n = m \\ ? & \text{für } n > m \end{cases} \quad ,$$

können induktiv Koeffizienten $c_i \in \mathbb{Z}_{(p)}$ gefunden werden mit

$$\sum_{i=0}^{n} c_i\Phi_i = \phi \text{ auf } \{g_0, g_1, \omega^{-1}g_2, \omega^{-1}g_3, \ldots, \omega^{-[\frac{n}{2}]}g_n\} \quad .$$

Daraus folgt

$$\sum_{i=0}^{n} c_i\Phi_i = \phi \text{ auf ganz } B[\omega^{-1}] \quad ,$$

und somit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 4.4.7: *Jede stabile Operation $\Phi \in \widetilde{K}^0(K; \mathbb{Z}_{(p)}) = [K, K\mathbb{Z}_{(p)}]$ vom Grad 0 läßt sich auf eindeutige Weise als unendliche Reihe in den Φ_i darstellen:*

$$\Phi = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \, \Phi_i \text{ mit } c_i \in \mathbb{Z}_{(p)} \quad . \qquad \square$$

Anhang A

Spektren und Spektren(ko-)homologie

Die in diesem Anhang aufgeführten Sätze und Definitionen orientieren sich im wesentlichen an [6, §§8 und 13] sowie punktuell an [1], [4] und [5].

A.1 Spektren

Definition A.1.1: *Ein Spektrum E ist eine Familie $\{E_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ von CW-Komplexen E_n mit Basispunkt, für die gilt: Für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist die reduzierte Einhängung SE_n von E_n vermöge einer basispunkterhaltenden Abbildung $\varepsilon_n^E : SE_n \longrightarrow E_{n+1}$ homöomorph zu einem Unterkomplex von E_{n+1}; kurz: $\varepsilon_n^E : SE_n \approx E_n^{'} \hookrightarrow E_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.*

Definition A.1.2: *Ein Spektrum $E = \{E_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ heißt Ω-Spektrum, wenn gilt: Für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist die zur (Inklusions-) Abbildung $\varepsilon_n^E : SE_n \longrightarrow E_{n+1}$ adjungierte Abbildung $ad(\varepsilon_n^E) : E_n \longrightarrow \Omega E_{n+1}$ eine schwache Homotopieäquivalenz.*

Definition A.1.3: *Ein Teilspektrum $F \subset E$ eines Spektrums E besteht aus Unterkomplexen $F_n \subset E_n$ der CW-Komplexe E_n, so daß für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt: $SF_n \hookrightarrow F_{n+1}$. (Die F_n existieren für alle $n \in \mathbb{Z}$).*

Definition A.1.4: *E sei ein Spektrum. Das Teilspektrum $F \subset E$, dessen einzelne Räume F_n für alle $n \in \mathbb{Z}$ nur jeweils den Basispunkt von E_n enthalten, heißt Zelle der Dimension $-\infty$ des Spektrums E.*

Ist e_n^d eine d-Zelle des CW-Komplexes E_n, wobei für $d = 0$ die Zelle e_n^d ungleich dem Basispunkt von E_n sein soll, dann ist ihre (reduzierte) Einhängung Se_n^d eine $(d+1)$-Zelle in E_{n+1}. Allgemein ist $S^m e_n^d$ eine $(d+m)$-Zelle in E_{n+m}.

Die Zelle $e_n^d \in E_n$ kann aber auch selbst die Einhängung einer $(d-1)$-Zelle $e_{n-1}^{d-1} \in E_{n-1}$ sein. Allgemein kann $e_n^d \in E_n$ eine mehrfache (höchstens aber d-fache) Einhängung einer Zelle $e_{n'}^{d'} \in E_{n'}^{d'}$ sein, also $e_n^d = S^{d-d'} e_{n'}^{d'}$, und zwar so, daß $e_{n'}^{d'} \in E_{n'}^{d'}$ keine Einhängung einer Zelle $e_{n'-1}^{d'-1} \in E_{n'-1}^{d'-1}$ mehr ist.

Definition A.1.5: *Die Sequenz* $(e_{n'}^{d'}, Se_{n'}^{d'}, S^2 e_{n'}^{d'}, \dots)$ *heißt Zelle der Dimension* $d' - n'$ *des Spektrums* E.

Bemerkung: Für alle $n \in \mathbb{Z}$ liegt damit jede Zelle des CW-Komplexes E_n in genau einer Zelle des zugehörigen Spektrums E.

Definition A.1.6: *Ein Spektrum* E *heißt endlich, wenn es nur endlich viele Zellen besitzt. Ein Spektrum* E *heißt abzählbar, wenn es abzählbar viele Zellen besitzt.*

Definition A.1.7: *Ein Teilspektrum* $F \subset E$ *eines Spektrums* E *heißt kofinal, wenn jede Zelle von* E *irgendwann vermöge der basispunkterhaltenden Abbildungen* $\varepsilon_n^E : SE_n \longrightarrow E_{n+1}$ *nach* F *abgebildet wird, d.h. für jede Zelle* $e_n \in E_n$ *des* CW*-Komplexes* E_n *gibt es ein* $m \in \mathbb{N}$*, so daß* $S^m e_n \in F_{n+m}$*. (Offensichtlich gibt es dann auch zu jedem endlichen Unterkomplex* $E_n' \subset E_n$ *ein* $m \in \mathbb{N}$*, so daß* $S^m E_n' \subset F_{n+m}$*.)*

Lemma A.1.8: *Der Schnitt endlich vieler und die Vereinigung beliebig vieler kofinaler Teilspektren eines Spektrums* E *ist wieder ein kofinales Teilspektrum von* E*.*
Ist $G \subset F$ *ein kofinales Teilspektrum von* F *und* $F \subset E$ *ein kofinales Teilspektrum von* E*, so ist* $G \subset E$ *auch ein kofinales Teilspektrum von* E*.*

Definition A.1.9: *Eine Spektren-Funktion* $f : E \longrightarrow F$ *zwischen zwei Spektren* E *und* F *ist eine Familie* $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ *von basispunkterhaltenden zellulären Abbildungen* $f_n : E_n \longrightarrow F_n$ *zwischen den* CW*-Komplexen* E_n *und* F_n *mit der Eigenschaft, daß*

$$f_{n+1}|_{SE_n} = Sf_n \quad .$$

Ist $E' \subset E$ ein Teilspektrum von E, dann ist die Inklusionsabbildung $i' : E' \longrightarrow E$ eine Spektren-Funktion.
Außerdem ist dann für jede Spektren-Funktion $f : E \longrightarrow F$ die Abbildung $f|_{E'} = f \circ i'$ wieder eine Spektren-Funktion.

Lemma A.1.10: *Für zwei Spektren E und F und eine Spektren-Funktion $f : E \longrightarrow F$ existiert zu jedem kofinalen Teilspektrum $F^{'} \subset F$ ein kofinales Teilspektrum $E^{'} \subset E$, so daß $f(E^{'}) \subset F^{'}$.*

Für zwei Spektren E und F sei die Menge M als die Menge aller Paare $(E^{'}, f^{'})$ definiert, für die gilt: $E^{'} \subset E$ ist ein kofinales Teilspektrum von E, und $f^{'} : E^{'} \longrightarrow F$ ist eine Spektren-Funktion. Dann läßt sich auf M folgende Relation $\sim$ definieren:

$(E^{'}, f^{'}) \sim (E^{''}, f^{''})$ genau dann, wenn es ein Paar $(E^{'''}, f^{'''}) \in M$ gibt, für das gilt: $E^{'''} \subset E^{'} \cap E^{''}$ ist ein kofinales Teilspektrum und $f^{'''} : E^{'''} \longrightarrow F$ ist eine Spektren-Funktion mit der Eigenschaft, daß $f^{'''} = f^{'}|_{E^{'''}} = f^{''}|_{E^{'''}}$.

Wegen Lemma A.1.8 ist diese Relation eine Äquivalenzrelation.

Definition A.1.11: *Ein Spektren-Morphismus $f : E \longrightarrow F$ zwischen zwei Spektren E und F ist eine Äquivalenzklasse bezüglich der oben definierten Äquivalenzrelation $\sim$ und wird dargestellt durch einen Repräsentanten $(E^{'}, f^{'})$.*

Die Komposition zweier Spektren-Morphismen durch geeignete Repräsentanten wird durch Lemma A.1.10 gewährleistet.

Ist $E^{'} \subset E$ ein Teilspektrum von E, dann ist die Inklusionsabbildung $i^{'} : E^{'} \longrightarrow E$ nicht nur eine Spektren-Funktion, sondern sie definiert auch einen Spektren-Morphismus $i^{'} : E^{'} \longrightarrow E$. Für jeden Spektren-Morphismus $f : E \longrightarrow F$ ist dann die Abbildung $f|_{E^{'}} = f \circ i^{'}$ wieder ein Spektren-Morphismus.

Definition A.1.12: *Die Spektren zusammen mit den Spektren-Morphismen bilden eine Kategorie. Diese wird mit $\mathcal{SP}$ bezeichnet.*

Bemerkung: Der Vorteil von Spektren-Morphismen ist, daß ein Spektren-Morphismus *nicht* - wie eine Spektren-Funktion - auf jeder Zelle der CW-Komplexe E_n definiert sein muß , sondern nur auf den Zellen eines kofinalen Teilspektrums und somit erst „später“ auf den Zellen der CW-Komplexe E_n.

Dadurch gibt es mehr Spektren-Morphismen als Spektren-Funktionen. Zudem wird mit den Spektren-Morphismen das *Raum*-Niveau der CW-Komplexe verlassen.

Satz A.1.13: *In der Kategorie $\mathcal{SP}$ der Spektren und Spektren-Morphismen ist jedes Spektrum E äquivalent zu jedem seiner kofinalen Teilspektren. Ebenso sind zwei kofinale Teilspektren desselben Spektrums äquivalent zum jeweils anderen und zum Spektrum E.*

Definition A.1.14: *Wichtige Spektren sind*

a.) **das Einhängungsspektrum eines *CW*-Komplexes**
Das Einhängungsspektrum $\Sigma^\infty X$ eines CW-Komplexes $X \in \mathcal{CW}_0$ wird definiert durch

$$(\Sigma^\infty X)_n = \begin{cases} \text{Basispunkt von } X & \text{für } n < 0 \\ S^n X & \text{für } n \geq 0 \end{cases} .$$

b.) **das „verschobene“ Spektrum**
Für ein Spektrum E bezeichnet $\Sigma^n E$ das um $n \in \mathbb{Z}$ nach links verschobene Spektrum, d. h. es ist $(\Sigma^n E)_k := E_{n+k}$ und $\varepsilon_k^{\Sigma^n E} := \varepsilon_{n+k}^E$.

c.) **das Sphärenspektrum S**
Die einzelnen CW-Komplexe des Sphärenspektrums S sind für alle $n < 0$ jeweils ein Basispunkt und für alle $n \geq 0$ jeweils die n-Sphäre. Anders formuliert ist das Einhängungsspektrum der Null-Sphäre gerade das Sphärenspektrum; kurz: $\Sigma^\infty S^0 = S$.

A.2 Homotopie

Um Homotopie von Spektren und Spektren-Morphismen und darauf aufbauend Homotopiegruppen von Spektren definieren zu können, wird die Existenz eines Smashproduktes von Spektren und CW-Komplexen verwendet:

Definition A.2.1: *Für ein Spektrum $E \in \mathcal{SP}$ und einen CW-Komplex $X \in \mathcal{CW}_0$ läßt sich das Smashprodukt $E \wedge X$ durch $(E \wedge X)_n := E_n \wedge X$ (mit der schwachen Topologie) für alle $n \in \mathbb{Z}$ definieren. Das Ergebnis $E \wedge X$ ist wieder ein Spektrum.*

Ist $f : E \longrightarrow F$ ein Spektren-Morphismus, der durch das Paar (E', f') repräsentiert wird, und $g : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung zwischen CW-Komplexen, dann repräsentiert $(E' \wedge X, f' \wedge g)$ den Spektren-Morphismus $f \wedge g : E \wedge X \longrightarrow F \wedge Y$.

Nun ist es möglich, sowohl Homotopieklassen von Spektren-Morphismen als auch Homotopiegruppen von Spektren zu definieren:

Die beiden Inklusionen $i_0 : 0 \hookrightarrow I^+ = [0,1]$ und $i_1 : 1 \hookrightarrow I^+ = [0,1]$ von 0 und 1 in das positive Einheitsintervall I^+ induzieren für ein Spektrum E zwei Spektren-Morphismen $i_0 : E \longrightarrow E \wedge I^+$ und $i_1 : E \longrightarrow E \wedge I^+$.

Definition A.2.2: *Ein Spektren-Morphismus $h : E \wedge I^+ \longrightarrow F$ heißt Homotopie der beiden Spektren-Morphismen $f_0 : E \longrightarrow F$ und $f_1 : E \longrightarrow F$, wenn $h \circ i_0 = f_0$ und $h \circ i_1 = f_1$ gilt; d. h. in folgendem Diagramm kommutieren oberes und unteres*

Rechteck:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, shift left, "i_0"] \arrow[r, shift right, "i_1"'] \arrow[rr, bend left, "f_0"] \arrow[rr, bend right, "f_1"'] & E \wedge I^+ \arrow[r, "h"] & F \end{tikzcd}$$

Bemerkung: Soll Homotopie mithilfe von Repräsentanten von Spektren-Morphismen beschrieben werden, dann heißen zwei Spektren-Morphismen $f_0 : E \longrightarrow F$ und $f_1 : E \longrightarrow F$, dargestellt durch die beiden Paare (E^0, f^0) und (E^1, f^1), homotop, wenn es ein kofinales Teilspektrum $E^{'} \subset E^0 \cap E^1$ und eine Spektren-Funktion $h^{'} : E^{'} \wedge I^+ \longrightarrow F$ gibt, mit der Eigenschaft, daß $h^{'} \circ i_0^{'} = f^0|_{E'}$ und $h^{'} \circ i_1^{'} = f^1|_{E'}$.

Dabei seien $i_0^{'} : E^{'} \longrightarrow E^{'} \wedge I^+$ und $i_1^{'} : E^{'} \longrightarrow E^{'} \wedge I^+$ die Spektren-Funktionen, die als Paare $(E^{'}, i_0^{'})$ und $(E^{'}, i_1^{'})$ die Spektren-Morphismen $i_0 : E \longrightarrow E \wedge I^+$ und $i_1 : E \longrightarrow E \wedge I^+$ repräsentieren.

$(E^{'}, h^{'})$ ist dann ein Repräsentant für die Homotopie $h : E \wedge I^+ \longrightarrow F$.

Es müssen also in folgendem Diagramm von Spektren-Funktionen oberes und unteres Rechteck kommutieren:

$$\begin{tikzcd} E^0 \arrow[rrd, "f^0"] & & \\ E^{'} \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[d, phantom, "\cap"] \arrow[r, shift left, "i_0^{'}"] \arrow[r, shift right, "i_1^{'}"'] & E^{'} \wedge I^+ \arrow[r, "h^{'}"] & F \\ E^1 \arrow[rru, "f^1"'] & & \end{tikzcd}$$

Definition A.2.3: *Die Gruppe der Homotopieklassen von Spektren-Morphismen zwischen zwei Spektren E und F wird mit [E,F] bezeichnet, die Homotopieklasse eines Spektren-Morphismus* $f : E \longrightarrow F$ *mit* $[f]$.

Mithilfe der Homotopieklassen von Spektren-Morphismen läßt sich nun die Homotopiegruppe eines Spektrums definieren:

Definition A.2.4: *Für alle* $n \in \mathbb{Z}$ *wird die* n*-te Homotopiegruppe* $\pi_n(E)$ *eines Spektrums* $E \in \mathcal{SP}$ *definiert durch*

$$\pi_n(E) := [\Sigma^n S, E] \quad .$$

Alternativ gilt für die Homotopiegruppen von Spektren folgender Satz:

Satz A.2.5: *Für die n-te Homotopiegruppe $\pi_n(E)$, $n \in \mathbb{Z}$, eines Spektrums $E \in \mathcal{SP}$ gilt:*

$$\pi_n(E) \cong \varinjlim_k \pi_{n+k}(E_k) = \varinjlim_k [S^{n+k}, E_k]_0 \quad ,$$

wobei mit $[S^{n+k}, E_k]_0$ die Gruppe der Homotopieklassen von Abbildungen (aus $\mathcal{CW}_0$) zwischen den CW-Komplexen S^{n+k} und E_k bezeichnet wird.

Definition A.2.6: *Die Spektren bilden zusammen mit den Homotopieklassen von Spektren-Morphismen eine Kategorie. Diese wird mit $\mathcal{SP}^H$ bezeichnet.*

Aufgrund der Existenz eines Smashprodukts von Spektren mit CW-Komplexen läßt sich nun auch die Einhängung eines Spektrums definieren:

Definition A.2.7: *Die (reduzierte) Einhängung SE eines Spektrums $E \in \mathcal{SP}$ wird definiert durch*

$$SE := S^1 \wedge E$$

mit $(SE)_k = (S^1 \wedge E)_k = S^1 \wedge E_k \simeq SE_k$ und $\varepsilon_k^{SE} = S\varepsilon_k^E$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Entsprechend wird die n-fache Einhängung S^nE durch $S^nE := S^n \wedge E$ definiert.

Es gilt folgender Satz:

Satz A.2.8: *Für jeden CW-Komplex $X \in \mathcal{CW}_0$ und jedes Spektrum $E \in \mathcal{SP}^H$ gilt:*

a.) $SE = S^1 \wedge E \simeq \Sigma E$

b.) $S^nE = S^n \wedge E \simeq \Sigma^n E$

c.) $\Sigma^n E \simeq \Sigma^n S \wedge E$

d.) $S \wedge X \simeq \Sigma^\infty X$

Bemerkung: Durch die Einhängung von CW-Komplexen und Spektren werden zwei wichtige Funktoren definiert:

a.) Der Funktor

$$\Sigma^\infty : \mathcal{CW}_0 \longrightarrow \mathcal{SP}$$

ordnet jedem CW-Komplex $X \in \mathcal{CW}_0$ sein Einhängungsspektrum $\Sigma^\infty X \in \mathcal{SP}$ zu.

Für eine basispunkterhaltende Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ mit $X, Y \in \mathcal{CW}_0$ wird der Spektren-Morphismus $\Sigma^\infty f : \Sigma^\infty X \longrightarrow \Sigma^\infty Y$ durch $(\Sigma^\infty f)_n := S^n f : S^n X \longrightarrow S^n Y$ definiert.

Somit ist $\Sigma^\infty : \mathcal{CW}_0 \longrightarrow \mathcal{SP}$ ein Funktor, der die Morphismen der Kategorie $\mathcal{CW}_0$ injektiv auf die Morphismen der Kategorie $\mathcal{SP}$ abbildet.
Für den in Homotopie induzierten Funktor

$$\Sigma^\infty : \mathcal{CW}_0^H \longrightarrow \mathcal{SP}^H$$

gilt dies jedoch nicht, denn es können zwei Morphismen $f_1, f_2 \in \mathcal{CW}_0$ mit $Sf_1 \simeq Sf_2$, aber $f_1 \not\simeq f_2$ existieren.

b.) Der Funktor

$$\Sigma^n : \mathcal{SP} \longrightarrow \mathcal{SP}$$

ordnet jedem Spektrum $E \in \mathcal{SP}$ sein um $n \in \mathbb{Z}$ nach links verschobenes Spektrum $\Sigma^n E$ zu.
Für eine Spektren-Funktion $f : E \longrightarrow F$ wird die Spektren-Funktion $\Sigma^n f : \Sigma^n E \longrightarrow \Sigma^n F$ durch $(\Sigma^n f)_k := f_{n+k}$ definiert.
Für einen Spektren-Morphismus $f : E \longrightarrow F$, repräsentiert durch das Paar (E', f'), wird der Spektren-Morphismus $\Sigma^n f : \Sigma^n E \longrightarrow \Sigma^n F$ durch den Repräsentanten $(\Sigma^n E', \Sigma^n f')$ definiert.
Da für zwei Spektren-Morphismen $f_1, f_2 \in \mathcal{SP}$ mit $f_1 \simeq f_2$ auch $\Sigma^n f_1 \simeq \Sigma^n f_2$ gilt, induziert der Funktor $\Sigma^n : \mathcal{SP} \longrightarrow \mathcal{SP}$ den Homotopie-Funktor

$$\Sigma^n : \mathcal{SP}^H \longrightarrow \mathcal{SP}^H \quad .$$

Offensichtlich gilt für alle $n, m \in \mathbb{Z}$, daß $\Sigma^n \circ \Sigma^m = \Sigma^{n+m}$.
Anhand von Satz A.2.8 wird deutlich, daß die Einhängung in der Kategorie $\mathcal{SP}^H$ invertierbar ist.

Ein weiteres wichtiges Spektrum, das jetzt beschrieben werden kann, ist das Eilenberg-MacLane-Spektrum:

Zu jeder abelschen Gruppe G existiert für alle $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, zunächst der (bis auf Homotopieäquivalenz eindeutig bestimmbare) Eilenberg-MacLane-Komplex $H(G, n) \in \mathcal{CW}_0$ mit

$$\pi_k(H(G,n)) = \begin{cases} G & \text{für } k = n \\ 0 & \text{für } k \neq n \end{cases} \quad .$$

Zusätzlich lassen sich folgende schwache Homotopieäquivalenzen für alle $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, konstruieren:

$$\varepsilon_n : H(G,n) \longrightarrow \Omega H(G, n+1) \quad .$$

Definition A.2.9: *Das Eilenberg-MacLane-Spektrum HG für eine abelsche Gruppe G ist gegeben durch*

$$(HG)_k = \begin{cases} * & \textit{für } k \leq 0 \\ H(G,k) & \textit{für } k > 0 \end{cases}$$

mit den (Inklusions-)Abbildungen

$$\varepsilon_n^{HG} = ad(\varepsilon_n) : SH(G,n) \longrightarrow H(G,n+1) \quad .$$

Es gilt folgendes Lemma:

Lemma A.2.10: *Für die n-te Homotopiegruppe $\pi_n(HG)$ des Eilenberg-MacLane-Spektrums HG zur abelschen Gruppe G gilt:*

$$\pi_n(HG) = \varinjlim_k \pi_{n+k}(H(G,k)) = \begin{cases} G & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{für } n \neq 0 \end{cases} \quad .$$

Das Eilenberg-MacLane-Spektrum ist ein Ω-Spektrum.

A.3 Spektren(ko-)homologie für *CW*-Komplexe

Zu jedem Spektrum läßt sich eine zugehörige Homologie- und Kohomologietheorie definieren. Dabei handelt es sich um eine verallgemeinerte Homologie- bzw. Kohomologietheorie, d. h. bis auf das Dimensionsaxiom sind alle Eilenberg-Steenrod-Axiome erfüllt.

Definition A.3.1: *Für ein Spektrum $E \in \mathcal{SP}^H$ wird seine zugehörige (reduzierte) E-Homologie- und E-Kohomologietheorie $E_n(-)$ bzw. $E^n(-)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und alle CW-Komplexe $X \in \mathcal{CW}_0^H$ definiert durch:*

$$\begin{aligned} E_n(X) &:= \pi_n(E \wedge X) &&= [\Sigma^n S, E \wedge X] \\ E^n(X) &:= [\Sigma^\infty X, \Sigma^n E] &&\cong [\Sigma^{-n} S \wedge X, E] \quad . \end{aligned}$$

In Verbindung mit Satz A.2.5 ergibt sich der folgende Satz:

Satz A.3.2:

a.) Für die E-Homologie eines CW-Komplexes $X \in \mathcal{CW}_0^H$ gilt:

$$E_n(X) \cong \varinjlim_k \pi_{n+k}(E_k \wedge X) = \varinjlim_k [S^{n+k}, E_k \wedge X]_0 \quad .$$

b.) Ist E ein Ω-Spektrum, so gilt für die E-Kohomologie eines CW-Komplexes $X \in \mathcal{CW}_0^H$:

$$E^n(X) \cong [X, E_n]_0 \quad .$$

Die beiden Einhängungs-Isomorphismen sind wie folgt gegeben:

Definition A.3.3:

a.) Der Einhängungs-Isomorphismus σ in E-Homologie wird definiert durch

$$\begin{tikzcd}
E_n(X) \arrow[rr, "\sigma=\sigma_1"] \arrow[d, equal] & & E_{n+1}(SX) \arrow[d, equal] \\
{[\Sigma^n S, \Sigma E \wedge X]} \arrow[r, "\cong", "\Sigma"'] & {[\Sigma^{n+1} S, E \wedge X]} \arrow[r, "\cong"] & {[\Sigma^{n+1} S, E \wedge S^1 \wedge X]}
\end{tikzcd}$$

Der k-fache Einhängungs-Isomorphismus werde mit

$$\sigma_k : E_n(X) \longrightarrow E_{n+k}(S^k X) = E_{n+k}(\Sigma^k X)$$

bezeichnet.

b.) Der Einhängungs-Isomorphismus σ in E-Kohomologie wird definiert durch

$$\begin{tikzcd}
E^{n+1}(SX) \arrow[rr, "\sigma=\sigma^1"] \arrow[d, equal] & & E^n(X) \arrow[d, equal] \\
{[\Sigma^\infty(SX), \Sigma^{n+1} E]} & {[\Sigma(\Sigma^\infty X), \Sigma^{n+1} E]} \arrow[l, "\cong"', "i^*"] \arrow[r, "\cong", "\Sigma^{-1}"'] & {[\Sigma^\infty X, \Sigma^n E]}
\end{tikzcd}$$

Dabei bezeichne i^* den von der Inklusion $i : \Sigma^\infty(SX) \hookrightarrow \Sigma(\Sigma^\infty X)$ induzierten Isomorphismus. ($\Sigma^\infty(SX)$ ist ein kofinales Teilspektrum von $\Sigma(\Sigma^\infty X)$.)
Der k-fache Einhängungs-Isomorphismus werde mit

$$\sigma^k : E^{n+k}(S^k X) = E^{n+k}(\Sigma^k X) \longrightarrow E^n(X)$$

bezeichnet.

Lemma A.3.4: *Für jedes Spektrum $E \in \mathcal{SP}^H$ erfüllen die zugehörige E-Homologie- und E-Kohomologietheorie jeweils das Wedge-Axiom.*

Die Koeffizientengruppen sind wie folgt gegeben:

Lemma A.3.5: *Die Koeffizientengruppen der Homologie- und Kohomologietheorie $E_n(-)$ und $E^n(-)$ sind gegeben durch*

$$\begin{aligned}
E_n(S^0) &= \pi_n(E \wedge S^0) = \pi_n(E) && \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \\
E^n(S^0) &= [\Sigma^\infty S^0, \Sigma^n E] = [S, \Sigma^n E] \cong [\Sigma^{-n} S, E] = \pi_{-n}(E) && \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \quad .
\end{aligned}$$

Beispiele: Es folgen nun einige wichtige Beispiele für die von Spektren induzierten Homologie- und Kohomologietheorien:

a.) Das Sphärenspektrum S induziert die stabile Homotopie und Kohomotopie π_n^s und π_s^n.

b.) Das Eilenberg-MacLane-Spektrum HG induziert für $G = \mathbb{Z}$ die (reduzierte) gewöhnliche Homologie- und Kohomologietheorie: $(H\mathbb{Z})_n \cong \widetilde{H}_n$ und $(H\mathbb{Z})^n \cong \widetilde{H}^n$.

A.4 Spektren(ko-)homologie für Spektren

Um die durch ein Spektrum E definierte E-Homologietheorie auch auf Spektren anwenden zu können, wird ein Smashprodukt von Spektren mit Spektren benötigt. Auf die aufwendige Konstruktion dieses Smashprodukts soll an dieser Stelle nicht eingegangen werden. Sie kann in [6, §13] nachgelesen werden. Es gilt folgendes Lemma:

Lemma A.4.1: *Ist $E \in \mathcal{SP}^H$ ein Spektrum, $X \in \mathcal{CW}_0^H$ ein CW-Komplex und $\Sigma^\infty X$ sein Einhängungsspektrum, so gilt:*

$$E \wedge X \simeq E \wedge \Sigma^\infty X \quad .$$

Das Smashprodukt von Spektren mit Spektren hat folgende Eigenschaften:

Satz A.4.2: *Es seien vier Spektren $E, F, G, H \in \mathcal{SP}^H$ und das Sphärenspektrum S gegeben. Dann ist $(E, F) \longrightarrow E \wedge F$ ein Funktor in zwei Variablen, und es existieren folgende natürliche Homotopieäquivalenzen:*

$$\begin{aligned}
\alpha :& (E \wedge F) \wedge G \longrightarrow E \wedge (F \wedge G)\\
\tau :& \quad E \wedge F \longrightarrow F \wedge E\\
l :& \quad S \wedge E \longrightarrow E\\
r :& \quad E \wedge S \longrightarrow E \qquad ,
\end{aligned}$$

so daß folgende Diagramme (in der Homotopiekategorie $\mathcal{SP}^H$) kommutieren:

a.)

$$\begin{tikzcd}
& (E \wedge F) \wedge (G \wedge H) \arrow[r, "\alpha"] & E \wedge (F \wedge (G \wedge H)) \\
((E \wedge F) \wedge G) \wedge H \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha \wedge id"'] & & \\
& (E \wedge (F \wedge G)) \wedge H \arrow[r, "\alpha"] & E \wedge ((F \wedge G) \wedge H) \arrow[uu, "id \wedge \alpha"']
\end{tikzcd}$$

b.)

$$\begin{tikzcd}
& F \wedge E \arrow[dr, "\tau"] & \\
E \wedge F \arrow[ur, "\tau"] \arrow[rr, "id"'] & & E \wedge F
\end{tikzcd}$$

c.)

$$\begin{tikzcd}
& (F \wedge E) \wedge G \arrow[dr, "\alpha"] & \\
(E \wedge F) \wedge G \arrow[ur, "\tau \wedge id"] \arrow[d, "\alpha"'] & & F \wedge (E \wedge G) \arrow[d, "id \wedge \tau"] \\
E \wedge (F \wedge G) \arrow[dr, "\tau"'] & & F \wedge (G \wedge E) \\
& (F \wedge G) \wedge E \arrow[ur, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

d.)

$$\begin{tikzcd} (S\wedge E)\wedge F \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "l\wedge id"'] & & S\wedge(E\wedge F) \arrow[dl, "l"] \\ & E\wedge F & \end{tikzcd}$$

e.)

$$\begin{tikzcd} (E\wedge S)\wedge F \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "r\wedge id"'] & & E\wedge(S\wedge F) \arrow[dl, "id\wedge l"] \\ & E\wedge F & \end{tikzcd}$$

f.)

$$\begin{tikzcd} (E\wedge F)\wedge S \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "r"'] & & E\wedge(F\wedge S) \arrow[dl, "id\wedge r"] \\ & E\wedge F & \end{tikzcd}$$

g.)

$$\begin{tikzcd} S\wedge E \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "l"'] & & E\wedge S \arrow[dl, "r"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

h.)

$$\begin{tikzcd} S\wedge S \arrow[r, bend left, "\tau"] \arrow[r, bend right, "id"'] & S\wedge S \end{tikzcd}$$

Ausgestattet mit diesem Smashprodukt läßt sich nun die E-Homologie auf ein Spektrum $F \in \mathcal{SP}^H$ anwenden. Die E-Kohomologie, angewendet auf ein Spektrum $F \in \mathcal{SP}^H$, hätte bereits nach der Definition von Homotopie von Spektren-Morphismen definiert werden können:

Definition A.4.3: *Für ein Spektrum $E \in \mathcal{SP}^H$ wird seine zugehörige (reduzierte) E-Homologie- und E-Kohomologietheorie $E_n(-)$ bzw. $E^n(-)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und alle Spektren $F \in \mathcal{SP}^H$ definiert durch*

$$\begin{aligned} E_n(F) &= \pi_n(E\wedge F) &&= [\Sigma^n S, E\wedge F] \\ E^n(F) &= [F, \Sigma^n E] &&\cong [\Sigma^{-n} S\wedge F, E] \quad . \end{aligned}$$

Die so definierte Homologie- bzw. Kohomologietheorie ist eine verallgemeinerte Homologie- bzw. Kohomologietheorie, d. h. bis auf das Dimensionsaxiom gelten alle Eilenberg-Steenrod-Axiome.

Für die E-Homologietheorie gilt alternativ folgender Satz:

Satz A.4.4: *Für die n-te E-Homologiegruppe $E_n(F)$ eines Spektrums $F \in \mathcal{SP}^H$ gilt:*

$$E_n(F) \cong \varinjlim_k E_{n+k}(F_k) = \varinjlim_k \pi_{n+k}(E \wedge F_k) = \varinjlim_k [\Sigma^{n+k} S, E \wedge F_k] \quad .$$

Das direkte System wird dabei durch

$$E_{n+k}(F_k) \xrightarrow[\sigma_1]{\cong} E_{n+k+1}(SF_k) \xrightarrow{E_*(\varepsilon_k^F)} E_{n+k+1}(F_{k+1})$$

definiert, wobei $E_*(\varepsilon_k^F)$ die von der (Inklusions-)Abbildung $\varepsilon_k^F : F_k \longrightarrow F_{k+1}$ in E-Homologie induzierte Abbildung bezeichnet.

Mit Lemma A.4.1 ergibt sich dann sofort folgendes Korollar:

Korollar A.4.5: *Sei $X \in \mathcal{CW}_0^H$ ein CW-Komplex und $\Sigma^\infty X$ sein Einhängungsspektrum. Dann gilt in E-Homologie:*

$$E_n(\Sigma^\infty X) = E_n(X)$$

und in E-Kohomologie:

$$E^n(\Sigma^\infty X) = E^n(X) \quad ;$$

im besonderen ist $E_n(S) = E_n(S^0) = E^{-n}(S^0) = E^{-n}(S)$.

Die Definition der Einhängungs-Isomorphismen aus A.3.3 für CW-Komplexe $X \in \mathcal{CW}_0$ gilt genauso für Spektren $F \in \mathcal{SP}^H$.

Folgender Satz, der aus der (Homotopie-)Kommutativität des Smashprodukts resultiert, wird häufig verwendet:

Satz A.4.6: *Für zwei Spektren $E, F \in \mathcal{SP}^H$ gilt immer:*

$$E_n(F) \cong F_n(E) \quad .$$

Beispiele:

a.) Die vom Sphärenspektrum S induzierte Homologietheorie entspricht - angewendet auf CW-Komplexe $X \in \mathcal{CW}_0$ - der stabilen Homotopietheorie π_n^s. Wird die vom Sphärenspektrum S induzierte Homologietheorie nun auf ein Spektrum $F \in \mathcal{SP}^H$ angewendet, stimmt diese wegen $S_n(F) = \pi_n(S \wedge F) \cong \pi_n(F)$ mit der Homotopie von F überein. Mit anderen Worten: Für Spektren (und *nur* für Spektren) ist die vom Sphärenspektrum S induzierte Homotopietheorie eine Homologietheorie. Die *stabile* Homotopie eines CW-Komplexes $X \in \mathcal{CW}_0^H$ entspricht der Homotopie seines Einhängungsspektrums $\Sigma^\infty X \in \mathcal{SP}^H$.

b.) Wie für CW-Komplexe $X \in \mathcal{CW}_0$ induziert das Eilenberg-MacLane-Spektrum zur Gruppe $G = \mathbb{Z}$ die (reduzierte) Homologie und Kohomologietheorie auch für Spektren $F \in \mathcal{SP}$.

A.5 Ringspektren

Definition A.5.1: *Ein Ringspektrum E ist ein Spektrem $E \in \mathcal{SP}^H$ zusammen mit einem Produkt (auch „Paarung“ genannt)*

$$\mu_E : E \wedge E \longrightarrow E$$

und einer Einheit

$$\iota_E : S \longrightarrow E \quad ,$$

so daß folgende Diagramme bis auf Homotopie kommutieren:

a.)

$$\begin{tikzcd} E \wedge E \wedge E \arrow[r, "\mu_E \wedge id"] \arrow[d, "id \wedge \mu_E"'] & E \wedge E \arrow[d, "\mu_E"] \\ E \wedge E \arrow[r, "\mu_E"'] & E \end{tikzcd}$$

b.)

$$\begin{tikzcd} S \wedge E \arrow[r, "\iota_E \wedge id"] \arrow[dr, "l"'] & E \wedge E \arrow[d, "\mu_E"] & E \wedge S \arrow[l, "id \wedge \iota_E"'] \arrow[dl, "r"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Das Produkt μ_E heißt kommutativ, wenn zusätzlich folgendes Diagramm bis auf Homotopie kommutiert:

$$\begin{tikzcd} E \wedge E \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\mu_E"'] & & E \wedge E \arrow[dl, "\mu_E"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Mit den Abbildungen r, l und τ sind diejenigen Abbildungen aus Satz A.4.2 gemeint.

Bemerkung: Die Einheit $\iota_E : S \longrightarrow E$ repräsentiert gerade das Einselement der Koeffizientengruppe $E_0(S^0) = E_0(S) = \pi_0(E \wedge S) \cong \pi_0(E) = [S, E]$ bzw. der Koeffizientengruppen $E_0(S^0) \xrightarrow[\sigma_n]{\cong} E_n(S^n) = [\Sigma^n S, \Sigma^n E]$.

Für Ringspektren lassen sich fast alle üblichen inneren und äußeren Produkte definieren.

A.6 Homologie und Kohomologie mit Koeffizienten

Anhand von Lemma A.2.10 läßt sich für das Eilenberg-MacLane-Spektrum zu einer beliebigen abelschen Gruppe G sofort eine induzierte Homologie- und Kohomologietheorie mit G-Koeffizienten bestimmen:

Definition A.6.1: *Das Eilenberg-MacLane-Spektrum HG zu einer beliebigen abelschen Gruppe G induziert die gewöhnliche Homologie- und Kohomologietheorie mit G-Koeffizienten:*

$$\begin{aligned} HG_n(-) &= \widetilde{H}_n(-;G) \\ HG^n(-) &= \widetilde{H}^n(-;G) \quad , \end{aligned}$$

und zwar sowohl für CW-Komplexe $X \in \mathcal{CW}_0^H$ als auch für Spektren $F \in \mathcal{SP}^H$.

Eine allgemeine Konstruktion von durch Spektren induzierten Homologie- und Kohomologietheorien mit Koeffizienten ist mithilfe der Moore-Räume und des Moore-Spektrums möglich:

Zu einer abelschen Gruppe G läßt sich für alle $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, der Moore-Raum $M(G,n)$ definieren mit

$$\widetilde{H}_k(M(G,n)) = \begin{cases} G & \text{für } k = n \\ 0 & \text{für } k \neq n \end{cases}$$

und das Moore-Spektrum MG mit

$$\begin{aligned} \pi_k(MG) &= 0 \quad \text{für } k \leq 0 \\ \pi_0(MG) &\cong G \\ \widetilde{H}_k(MG) &= 0 \quad \text{für } k \geq 0 \quad . \end{aligned}$$

Beispiel: Für $G = \mathbb{Z}/p$, p *prim*, ist der Moore-Raum $M(\mathbb{Z}/p,n)$ durch $M(\mathbb{Z}/p,n) = S^n \cup_p e^{n+1}$ definiert. Wie üblich bezeichnet e^{n+1} dabei eine $(n+1)$-Zelle, die mithilfe einer Abbildung vom Grad p an die n-Sphäre angeheftet wird. Der so bestimmte Moore-Raum heißt auch *mod* p Moore-Raum.

Für $G = \mathbb{Z}/p$, p *prim*, ist das *mod* p Moore-Spektrum $M\mathbb{Z}/p$ definiert durch $(M\mathbb{Z}/p)_n = M(\mathbb{Z}/p,n)$. Die (Inklusions-)Abbildungen $\varepsilon_n^{M\mathbb{Z}/p} : SM(\mathbb{Z}/p,n) \longrightarrow M(\mathbb{Z}/p,n+1)$ sind durch die kanonischen Homöomorphismen gegeben.
Für $p = 2$ ist $M\mathbb{Z}/2$ *kein* Ringspektrum. Für $p = 3$ ist die Assoziativität der Multiplikation verletzt. Erst für $p > 3$ ist $M\mathbb{Z}/p$ ein Ringspektrum.

Wie dieses Beispiel zeigt, ist das Moore-Spektrum MG für eine beliebige abelsche Gruppe i.a. *kein* Ringspektrum. Sei jedoch R ein Ring R mit $\mathbb{Z} \subset R \subseteq \mathbb{Q}$. Dann besitzt das zugehörige Moore-Spektrum MR eine Ringstruktur. Seine Multiplikation wird mit $\mu_{MR} : MR \wedge MR \longrightarrow MR$ bezeichnet.

Nun läßt sich die von einem Spektrum induzierte Homologie- und Kohomologietheorie mit Koeffizienten wie folgt definieren:

Definition A.6.2: *Sei $E \in \mathcal{SP}^H$ ein Spektrum und R ein Ring mit $\mathbb{Z} \subset R \subseteq \mathbb{Q}$. Dann läßt sich mithilfe des Moorespektrums MR zum Ring R das Spektrum*

$$ER := E \wedge MR$$

definieren, das wiederum E-Homologie und E-Kohomolgie mit R-Koeffizienten definiert:

$$\begin{aligned} E_n(-;R) &:= ER_n(-) \\ E^n(-;R) &:= ER^n(-) \quad , \end{aligned}$$

und zwar sowohl für CW-Komplexe $X \in \mathcal{CW}_0^H$ als auch für Spektren $F \in \mathcal{SP}^H$.

Bemerkung:

a.) Die Konstruktion von $M\mathbb{Z}/2$ und $M\mathbb{Z}/3$ läßt sich so modifizieren, daß sich mithilfe der *mod p* Moore-Spektren für eine beliebige Primzahl p die durch Spektren induzierte Homologie- und Kohomologietheorie mit $\mathbb{Z}/p$-Koeffizienten wie in A.6.2 konstruieren läßt.

b.) Natürlich gilt für das Eilenberg-MacLane-Spektrum HG zu einer abelschen Gruppe G nun gerade $HG = H\mathbb{Z} \wedge MG$.

Es gilt noch folgendes Lemma:

Lemma A.6.3: *Sind E, F und MR Ringspektren, so ist*

$$E_*(F;R) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} E_n(F;R)$$

ein Ring.

A.7 Der Hurewicz-Homomorphismus

Definition A.7.1: *Zu jeder durch ein Ringspektrum $E \in \mathcal{SP}^H$ induzierten Homologietheorie $E_n(-)$ ist der Hurewicz-Homomorphismus sowohl für CW-Komplexe $X \in \mathcal{CW}_0^H$ als auch für Spektren $F \in \mathcal{SP}^H$ gegeben durch*

$$\begin{aligned} h_E &: \pi_n(X) \longrightarrow E_n(X) \\ h_E &: \pi_n(F) \longrightarrow E_n(F) \quad . \end{aligned}$$

Für CW-Komplexe $X \in \mathcal{CW}_0^H$ existiert zusätzlich noch der stabile Hurewicz-Homomorphismus

$$h_E^s : \pi_n^s(X) \longrightarrow E_n(X) \quad .$$

Ist $E \in \mathcal{SP}^H$ ein Ringspektrum mit Einheit $\iota_E : S \longrightarrow E$, dann induziert diese Einheit gerade den Hurewicz-Homomorphismus, und zwar wieder sowohl für CW-Komplexe $X \in \mathcal{CW}_0^H$ als auch für Spektern $F \in \mathcal{SP}^H$:

Satz A.7.2: *Es sei E ein Ringspektrum und $i_E : S \longrightarrow E$ dessen Einheit. Dann wird der Hurewicz-Homomorphismus wie folgt induziert:*

$$h_E : \pi_n^s(X) = \pi_n(S \wedge X) \xrightarrow{(\iota_E \wedge id_X)_*} \pi_n(E \wedge X) = E_n(X)$$

für CW-Spektren $X \in \mathcal{CW}_0^H$ und

$$h_E : \pi_n(F) = \pi_n(S \wedge F) \xrightarrow{(\iota_E \wedge id_F)_*} \pi_n(E \wedge F) = E_n(F)$$

für Spektren $F \in \mathcal{SP}^H$.

Lemma A.7.3: *Sei $f : S^n \longrightarrow X$ eine Abbildung aus der Kategorie $\mathcal{CW}_0^H$, $[f]$ die Homotopieklasse von f in $\pi_n^s(X) = \pi_n(S \wedge X)$ und $E_*(f) : E_n(S^n) \longrightarrow E_n(X)$ die von f induzierte Abbildung in E-Homologie. Dann gilt:*

$$h_E([f]) = E_*(f)(\sigma_n(1)) \quad ,$$

wobei $1 \in E_0(S^0) \xrightarrow[\sigma_n]{\cong} E_n(S^n)$.

Da sowohl das Sphärenspektrum S als auch das die gewöhnliche Homologietheorie definierende ganzzahlige Eilenberg-MacLane-Spektrum $H\mathbb{Z}$ Ringspektren sind, gilt für alle Ringspektren E und Ringe R mit $\mathbb{Z} \subset R \subseteq \mathbb{Q}$, MR Ringspektrum, daß $\pi_*(E;R) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \pi_n(E;R)$ und $\widetilde{H}_*(E;R) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{H}_n(E;R)$ Ringe sind.

Der Hurewicz-Homomorphismus mit R-Koeffizienten

$$h_H : \pi_*(E;R) \longrightarrow \widetilde{H}_*(E;R)$$

ist dann ein Ringhomomorphismus.

Anhang B

Liste aller verwendeten Symbole

CW-Komplexe

$\mathcal{CW}$	Kategorie der CW-Komplexe mit zellulären Abbildungen
$\mathcal{CW}_0$	Kategorie der CW-Komplexe mit Basispunkt mit basispunkterhaltenden zellulären Abbildungen
X, Y, Z	in der Regel Bezeichnung für CW-Komplexe
X_+	CW-Komplex mit zusätzlichem Basispunkt
$[X, Y]_0$	Gruppe der Homotopieklassen von Abbildungen zwischen den CW-Komplexen $X, Y \in \mathcal{CW}_0$
$[f]_0$	Homotopieklasse der Abbildung $f \in \mathcal{CW}_0$
$\mathcal{CW}_0^H$	Kategorie der CW-Komplexe mit Homotopieklassen der Abbildungen aus $\mathcal{CW}_0$

Spektren

Spektrum	CW-Spektrum
Spektrenabbildung	Spektren-Morphismus
$\mathcal{SP}$	Kategorie der Spektren mit Spektren-Morphismen
E, F, G	in der Regel Bezeichnung für Spektren
$[E, F]$	Gruppe der Homotopieklassen von Abbildungen zwischen den Spektren $E, F \in \mathcal{SP}$
$[f]$	Homotopieklasse der Abbildung $f \in \mathcal{SP}$
$\mathcal{SP}^H$	Kategorie der Spektren mit Homotopieklassen der Abbildungen aus $\mathcal{SP}$

Spezielle Räume und Spektren

$G_n(\mathbb{C}^m)$	Grassmannmannigfaltigkeit
$P_n\mathbb{C}$	n-dimensionaler komplex-projektiver Raum

$P_n\mathbb{C}_+$	n-dimensionaler komplex-projektiver Raum mit zusätzlichem Basispunkt
$P_\infty\mathbb{C}$	∞-dimensionaler komplex-projektiver Raum
$P_\infty\mathbb{C}_+$	∞-dimensionaler komplex-projektiver Raum mit zusätzlichem Basispunkt
S^n	n-Sphäre
$H(G,n)$	Eilenberg-MacLane-Komplex zur abelschen Gruppe G
$M(G,n)$	Moore-Raum zur abelschen Gruppe G
$\Sigma^\infty X$	Einhängungsspektrum eines CW-Komplexes $X \in \mathcal{CW}_0$
S	Sphärenspektrum
$\Sigma^n E$	das um $n \in \mathbb{Z}$ nach links verschobene Spektrum
HG	Eilenberg-MacLane-Spektrum zur abelschen Gruppe G
MG *bzw.* MR	Moore-Spektrum zur abelschen Gruppe G bzw. zum Ring R
SX *bzw.* SE	*reduzierte* Einhängung eines CW-Komplexes $X \in \mathcal{CW}_0$ bzw. eines Spektrums $E \in \mathcal{SP}$
S^nX *bzw.* S^nE	n-fache reduzierte Einhängung eines CW-Komplexes $X \in \mathcal{CW}_0$ bzw. eines Spektrums $E \in \mathcal{SP}$

Homotopie-, Homologie- und Kohomologietheorien

$\pi_*(-)$	Homotopie
$\pi_*^s(-)$	stabile Homotopie (von CW-Komplexen)
$\widetilde{H}_*(-)$ / $\widetilde{H}^*(-)$	reduzierte gewöhnliche Homologie- und Kohomologietheorie
$H_*(-)$ / $H^*(-)$	unreduzierte gewöhnliche Homologie- und Kohomologietheorie
$E_*(-)$ / $E^*(-)$	die vom Spektrum $E \in \mathcal{SP}$ induzierte (reduzierte) Homologie- und Kohomologietheorie
$\widetilde{K}_*(-)$ / $\widetilde{K}^*(-)$	die vom Bottspektrum $K \in \mathcal{SP}$ induzierte (reduzierte) K-Homologie- und K-Kohomologietheorie
$K_*(-)$ / $K^*(-)$	unreduzierte K-Homologie- und K-Kohomologietheorie (von CW-Komplexen)

Abbildungen und Isomorphismen

f_*	die von der Abbildung f in *Homotopie* induzierte Abbildung
$E_*(f)$ / $E^*(f)$	die von der Abbildung f in E-Homologie- bzw. E-Kohomologietheorie induzierte Abbildung
σ_k	k-facher Einhängungs-Isomorphismus in Homologie: $\sigma_k : E_n(-) \longrightarrow E_{n+k}(S^k(-))$
σ^k	k-facher Einhängungs-Isomorphismus in Kohomologie: $\sigma^k : E^{n+k}(S^k(-)) \longrightarrow E^n(-)$

Produkte

$-\otimes-$	Tensorprodukt
$-\hat{\otimes}-$	äußeres Produkt ($x\hat{\otimes}x \in K^0(X \times X)$)
$-\wedge-$	je nach Zusammenhang: - Smashprodukt von CW-Komplexen, Spektren oder Spektren mit CW-Komplexen - äußeres K-Homologie- bzw. K-Kohomologieprodukt
$<-,->$	Kronecker-Produkt (in der jeweils benötigten Form)

Standard-Bezeichnungen

$\approx$	homöomorph
$\simeq$	homotop / homotopieäquivalent
$\cong$	isomorph
$\hookrightarrow$	injektive Abbildung
$\twoheadrightarrow$	surjektive Abbildung
$\varinjlim_k G_k$	direkter Limes über Gruppen G_k
$R[x]$	Ring der Polynome in x mit Koeffizienten in R
$R[x, x^{-1}]$	Ring der Laurent-Polynome in x mit Koeffizienten in R
$R[[x]]$	Ring der Potenzreihen in x mit Koeffizienten in R
$\mathbb{Z}_{(p)}$	Ring der ganzen p-adischen Zahlen
$\mathbb{Z}_{(p)}^*$	Gruppe der Einheiten von $\mathbb{Z}_{(p)}$

Literaturverzeichnis

[1] Adams, J.F.: *Stable Homotopy and Generalized Homology*,
Univ. of Chicago Press 1974

[2] Atiyah, M.F.: *K-Theory*,
Addison-Wesley 1989 (orig. Benjamin 1967)

[3] Dodson, C.T.J. and Parker, P.E.: *A User's Guide to Algebraic Topology*,
Kluwer Academic Publishers 1997

[4] Knapp, K. und Eich, J.: *K-Theorie*,
Scriptum Bergische Universität Gesamthochschule Wuppertal 1998

[5] Margolis, H.R.: *Spectra and the Steenrod Algebra*,
North-Holland 1983

[6] Switzer, R.M.: *Algebraic Topology - Homotopy and Homology*,
Springer 1975