Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Bernhard Werner

Geometriekalküle WS 2018/19

www-m10.ma.tum.de/GeometrieKalkueleWS1819

Lösungen zu Aufgabenblatt 7 (2019–02–04)

Level 0

Aufgabe 1. Wiederholung.

Können Sie die folgenden Fragen beantworten? Falls nein, schlagen Sie die entsprechenden Begriffe noch einmal im Vorlesungsskript nach.

a) Gegeben sei ein endlicher Punkt P des $\mathbb{RP}^2$ mit euklidischen Koordinaten (x, y). Können Sie die homogenen Koordinaten der Gerade durch P und den Ursprung der Zeichenebene bestimmen?

b) Von wie vielen Punkten im $\mathbb{CP}^1$ muss man die Bilder unter einer projektiven Transformation kennen, um diese bestimmen zu können?

c) Von wie vielen Punkten im $\mathbb{RP}^2$ muss man die Bilder unter einer projektiven bzw. affinen Transformation kennen, um diese bestimmen zu können?

d) Wenn man den $\mathbb{RP}^2$ über die Einbettung des $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^3$ definiert, kann dann jede Ebene im $\mathbb{R}^3$ als Einbettungsebene genutzt werden?

e) Gegeben seien Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ und eine Matrix $M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

- Können Sie mit Argumenten der projektiven Geometrie zeigen, dass ein $\lambda \neq 0$ existiert, so dass
$$Mv \times Mw = \lambda \cdot \left(M^{-1}\right)^T \cdot (v \times w)?$$
- Können Sie mit Mitteln der linearen Algebra beweisen, dass $\lambda = \det(M)$ ist? (Oder, in anderen Worten, dass $Mv \times Mw = \mathrm{adj}(M) \cdot (v \times w)$?)

f) Das Doppelverhältnis von vier Punkten im $\mathbb{RP}^1$ kann bis zu sechs verschiedene Werte annehmen – je nachdem, in welcher Reihenfolge die Punkte im Doppelverhältnis stehen. Gibt es einen Fall, sodass das Doppelverhältnis immer denselben Wert annimmt, unabhängig von der Reihenfolge der Punkte?

g) Sei eine projektive Transformation des $\mathbb{RP}^2$ gegeben durch eine Matrix A. Wie berechnet man die Fixgeraden der Transformation?

h) Wann ist eine aus Punkten berechnete Größe projektiv invariant?

i) Für Punkte X, Y, Z im $\mathbb{RP}^2$ und eine projektive Transformation M des $\mathbb{RP}^2$ gilt
$$[MX, MY, MZ] = \det(M) \cdot [X, Y, Z].$$
Können Sie das beweisen?

j) Eine **perspektivische Verzerrung** ist eine projektive Transformation des $\mathbb{RP}^2$, die die Ferngerade auf eine endliche Gerade abbildet. Zwei perspektivische Verzerrungen nennen wir **verwandt**, falls ihre Bilder der Ferngerade gleich sind.

- Können Sie eine perspektivische Verzerrung angeben?
- Gibt es überhaupt *verschiedene* perspektivische Verzerrungen, die verwandt sind? Falls ja, können Sie zwei angeben? Falls nein, warum nicht?

k) Im Lauf der Vorlesung haben wir verschiedene Arten von Objekten im $\mathbb{RP}^2$ definiert. Wir können sie immer durch Matrizen darstellen. Zwei solche Matrizen beschreiben dasselbe Objekt, wenn sie sich nur durch einen skalaren Vorfaktor (ungleich Null) unterscheiden. Gibt es eine Klasse von Objekten, für die diese Bedingung an die Repräsentaten nicht gelten muss? Oder anders gefragt: Können zwei Matrizen dasselbe Objekt beschreiben, ohne dass sie ein Vielfaches voneinander sind?

l) Wenn man drei konkurrente Geraden a, b, c im $\mathbb{RP}^2$ gegeben hat, kann man eine vierte Gerade d konstruieren, die durch denselben Schnittpunkt läuft und mit den ersten drei in harmonischer Lage liegt. Es gilt dann also

$$(a, b; c, d) = -1.$$

Können Sie zwei verschiedene Konstruktionen angeben?

m) Vier nicht-lineare Punkte A, B, C, D im $\mathbb{CP}^1$ sind genau dann kozirkular, wenn $(A, B; C, D)$ reell ist. Können Sie diese Aussage begründen?

LÖSUNG:

a) Der Punkt P hat die homogenen Koordinaten $(x, y, 1)^T$. Die Ursprungsgerade hat dann die homogenen Koordinaten $(y, -x, 0)$, denn

$$y \cdot x - x \cdot y + 0 \cdot 1 = 0.$$

b) Von dreien. Eine projektive Transformation des $\mathbb{CP}^1$ ist eine 2×2-Matrix, hat also modulo Skalarer drei Freiheitsgrade. Jeder Punkt im $\mathbb{CP}^1$ eliminiert einen Freiheitsgrad.

c) Von vieren bzw. dreien. Diese müssen aber in allgemeiner Lage liegen. Eine projektive Transformation des $\mathbb{RP}^2$ ist eine 3×3-Matrix, hat also modulo Skalarer acht Freiheitsgrade. Eine affine Transformation hat die Form

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit hat sie also sechs Freiheitsgrade. Jeder Punkt im $\mathbb{RP}^2$ eliminiert zwei Freiheitsgrade.

d) Nein, nur Ebenen, die nicht durch den Ursprung gehen. Die Idee der Einbettung war es, Ursprungsgeraden im $\mathbb{R}^3$ mit Punkten im $\mathbb{R}^2$ zu identifizieren. Ursprungsgeraden, die die Einbettungsebene schneiden, entsprechen dabei dann endlichen Punkten. Die, die das nicht tun, Fernpunkten. Würde die Einbettungsebene den Ursprung enthalten, würden alle Urpsrungsgeraden sie dort schneiden.

e) O.B.d.A. seien v und w verschieden und keiner davon der Nullvektor.

- Fassen wir v und w als Punkte im $\mathbb{RP}^2$ und M als projektive Transformation auf, dann ist $Mv \times Mw$ die Verbindungsgerade der Bildpunkte von v und w. Da projektive Transformationen Kollinearitäten sind, muss das gleich dem Bild der Verbindungsgerade von v und w sein. Und projektive Transformationen M operieren auf den homogenen Koordinatenvektoren von Geraden durch Linksmultiplikation mit $\left(M^{-1}\right)^T$. Und da wir es mit homogenen Koordinaten zu haben, sind $Mv \times Mw$ und $\left(M^{-1}\right)^T (v \times w)$ nur bis auf ein skalares Vielfaches ungleich Null gleich.
- Für beliebiges $u \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$(Mv \times Mw)^T u = \det(Mv, Mw, u) = \det(M) \cdot \det\left(v, w, M^{-1}u\right) = \det(M) \cdot (v \times w)^T \cdot M^{-1}u.$$

  Und das gilt nur dann für alle u, wenn $(Mv \times Mw)^T = \det(M) \cdot (v \times w)^T \cdot M^{-1}$.

f) Nein. Sei λ das gesuchte Doppelverhältnis. Es müsste dann $\lambda = \frac{1}{\lambda}$ gelten, was $\lambda = \pm 1$ bedeutet. Es müsste aber auch $\lambda = 1 - \lambda$ gelten, was $\lambda = \frac{1}{2}$ impliziert.

g) Man bestimmt die Eigenvektoren von $\left(A^{-1}\right)^T$.

h) So eine Größe ist projektiv invariant, wenn das Ergebnis gleich bleibt, nachdem man eine beliebige projektive Transformation auf alle beteiligten Punkte angewendet hat. Werden zur Berechnung die homogenen Koordinaten von Punkten verwendet (was bei uns immer der Fall ist), so muss die Größe zudem auch wohldefiniert sein – also unabhänigig von der Wahl der Punktrepräsentanten.

i) Das folgt direkt aus dem Determinantenmultiplikationssatz. Vergleiche Vorlesung 4.

j)

- Es reicht sich zu überlegen, dass ein Fernpunkt (hier z.B. $(1,0,0)^T$) auf einen endlichen Punkt abgebildet werden muss:

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Als erste nehme man M von oben. Als zweite nehme man

$$N := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Da die Fernpunkte $(1,0,0)^T$ und $(0,1,0)^T$ jeweils dieselben Bilder haben, wird auch die Ferngerade als Ganzes auf dieselbe endliche Gerade abgebildet. Der Punkt $(0,0,1)^T$ (der Ursprung in der Anschauungsebene) wird von M auf sich selbst abgebildet. Von N aber nicht.

k) Ja, Kegelschnitte. Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

beschreiben denselben Kegelschnitt (einen Kreis mit Radius 2 um den Punkt $(1,1)$), sind aber offensichtlich kein Vielfaches voneinander.

l) Die erste Möglichkeit ist, die Definition vom Doppelverhältnis von konkurrenten Geraden zu nutzen: Man schneidet a, b und c mit einer Geraden, die nicht durch den gemeinsamen Schnittpunkt läuft. Auf dieser kann man für die Schnittpunkte A, B und C einen vierten Punkt D in harmonischer Lage konstruieren. Verbindet man ihn anschließend mit $a \wedge b$, erhält man d.

Die zweite Möglichkeit ist, die Konstruktion eines vierten Punkts in harmonischer Lage zu dualisieren.

m) Ja, mit Hilfe des Satz vom Fasskreisbogen. Siehe Vorlesungen 10.

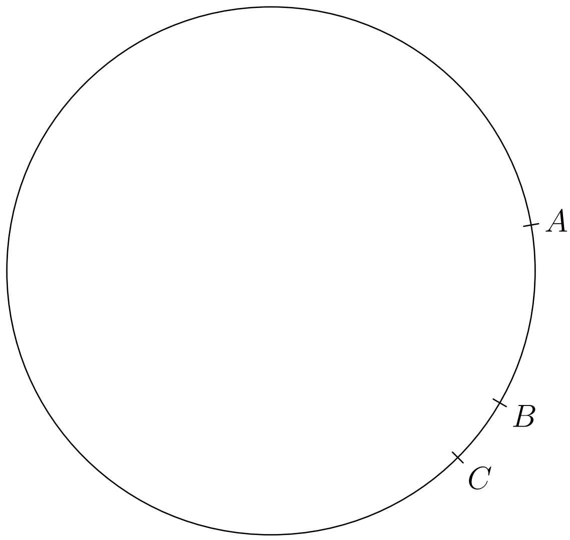
Level 1

Aufgabe 2. Doppelverhältnisse im Kreis.

a) Es seien A, B, C, D vier endliche Punkte in $\mathbb{RP}^2$, von denen keine drei auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Beweisen Sie: Die Punkte A, B, C, D liegen *genau dann* auf einem Kreis, wenn ihr Doppelverhältnis von $\mathtt{I}$ aus betrachtet reell ist, also $(A, B; C, D)_{\mathtt{I}} \in \mathbb{R}$.

b) Seien A, B, C, D vier Punkte auf einem Kreis. Begründen Sie *kurz*, warum das Doppelverhältnis $(A, B; C, D)_E$ gesehen von einem Punkt E auf dem Kreis unabhängig davon ist, wo auf dem Kreis sich der Punkt E befindet.

c) In der nachfolgenden Zeichnung sind drei Punkte A, B, C sowie der durch sie definierte Kreis dargestellt. Konstruieren Sie einen reellen Punkt D, so dass $A, B; C, D$ von $\mathtt{I}$ aus gesehen in harmonischer Lage sind.



<u>Lösung:</u>

a) Es gibt zwei Möglichkeiten, das zu beweisen.

In $\mathbb{RP}^2$ mit $\mathtt{I}$ und $\mathtt{J}$ ist ein Kreis ein Kegelschnitt durch $\mathtt{I}$ und $\mathtt{J}$. Wenn $\mathtt{I}$ die Punkte unter einem reellen Doppelverhältnis sieht, muss auch der dazu konjugierte Punkt $\mathtt{J}$ sie unter dem gleichen DV sehen, weil das Konjugieren aller Punkte auch das Ergebnis konjugiert, was auf die ganzen reellen Punkte und das reelle DV keine Auswirkung hat. Umgekehrt muss das Doppelverhältnis reell sein, wenn es von $\mathtt{I}$ und $\mathtt{J}$ aus gesehen das gleiche ist.

Ein Punkt, der vier andere unter dem gleichen Doppelverhältnis sieht wie ein fünfter, liegt mit allen fünfen auf einem gemeinsamen Kegelschnitt. Also muss $\mathtt{J}$ auch auf dem Kegelschnitt durch $A, B, C, D, \mathtt{I}$ liegen. Damit ist dieser Kegelschnitt ein Kreis. Umgekehrt sehen alle Punkte auf einem Kegelschnitt vier andere Punkte auf dem gleichen Kegelschnitt unter dem gleichen Doppelverhältnis.

Zusammengefasst:

$$
\begin{aligned}
& A, B, C, D \text{ liegen auf einem Kreis} \\
\Leftrightarrow\ & A, B, C, D, \mathtt{I}, \mathtt{J} \text{ liegen auf einem Kegelschnitt} \\
\Leftrightarrow\ & (A, B; C, D)_{\mathtt{I}} = (A, B; C, D)_{\mathtt{J}} \\
\Leftrightarrow\ & (A, B; C, D)_{\mathtt{I}} = \overline{(A, B; C, D)_{\overline{\mathtt{I}}}} \\
\Leftrightarrow\ & (A, B; C, D)_{\mathtt{I}} = \overline{(A, B; C, D)_{\mathtt{I}}} \\
\Leftrightarrow\ & (A, B; C, D)_{\mathtt{I}} \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Im degenerierten Fall, wo $\mathtt{I}$ und $\mathtt{J}$ auf dem Kegelschnitt liegen und dieser dennoch kein Kreis ist, ist er statt dessen ein Paar von Geraden, von denen eine die Ferngerade ist. Damit das passiert, müssten entweder alle vier Punkte A, B, C, D auf der Gerade, die nicht die Ferngerade ist, liegen, oder aber zumindest einer dieser vier Punkte müsste ein Fernpunkt sein. Beide Fälle sind in der Angabe ausgeschlossen worden.

In $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ gilt, dass vier Punkte genau dann auf einem Kreis oder einer Geraden liegen, wenn ihr Doppelverhältnis reell ist, wobei der Fall kollinearer Punkte in der Angabe ausgeschlossen ist.

Man kann die Determinanten benutzen, um die Aufgabenstellung nach $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ zu transferieren. Dabei kann man sich auf die Standardeinbettung für die Punkte A bis D zurückziehen, da das Doppelverhältnis ja von der Wahl der Repräsentanten unabhängig ist, und alle vier Punkte endlich sind.

$$[A, B, I] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & i \\ a_2 & b_2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a_1 + ia_2 - b_1 - ib_2 = \begin{vmatrix} a_1 + ia_2 & b_1 + ib_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = [\tilde{A}, \tilde{B}]$$

Dabei entspricht $\tilde{A}$ dem endliche Punkt A, wenn man die Zeichenebene als komplexe Zahlenebene auffasst. Es handelt sich also um unterschiedliche Repräsentantionen der gleichen geometrischen Situation.

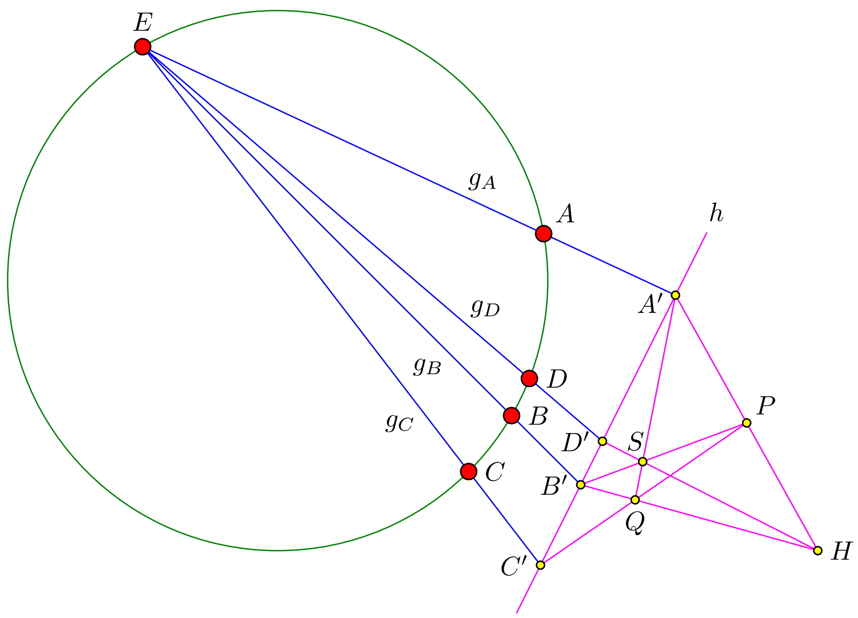
Der Repräsentant von $\mathtt{I}$ ist hier geschickt gewählt – das Negative von dem aus der Vorlesung. Bei einer anderen Wahl würde sich noch ein Vorfaktor ergeben, der sich jedoch aus dem Doppelverhältnis wieder kürzen würde. Daher ist das Doppelverhältnis in $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ von $\mathtt{I}$ aus betrachtet gleich dem Doppelverhältnis der entsprechenden Punkte in $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$.

Zusammengefasst:

A, B, C, D liegen auf einem Kreis in $\mathbb{R}^2$
$\Leftrightarrow$ $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ liegen auf einem Kreis in $\mathbb{C}$
$\Leftrightarrow$ $(\tilde{A}, \tilde{B}; \tilde{C}, \tilde{D}) \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow$ $(A, B; C, D)_{\mathtt{I}} \in \mathbb{R}$

b) Diese Aussage ist ein Spezialfall der Aussage, dass das Doppelverhältnis von vier Punkten auf dem Kegelschnitt, gesehen von jedem beliebigen anderen Punkt des Kegelschnitts das gleiche ist.

c) Wie in a) gezeigt, muss ein reeller Punkt D, der von $\mathtt{I}$ aus gesehen ein reelles DV mit A, B, C hat, auf dem Kreis liegen. Nach b) gilt daher $(A, B; C, D)_E = (A, B; C, D)_{\mathtt{I}} = -1$ für jeden Punkt E auf dem Kreis. Gesucht ist also ein Punkt D auf dem Kreis, der von einem Punkt E auf dem Kreis aus gesehen harmonisch zu A, B, C liegt. Das entspricht der Tatsache, dass die Verbindungsgeraden harmonisch liegen, und das wiederum entspricht der Tatsache, dass die Verbindungsgeraden eine weitere Gerade in einem Satz harmonischer Punkte schneiden.



Konstruktionsbeschreibung:

1. Wahl der Punktes E beliebig auf dem Kreis, aber von A, B, C verschieden
2. Verbindungsgeraden $g_A = E \vee A$, $g_B = E \vee B$ und $g_C = E \vee C$
3. Hilfsgerade h beliebig, aber nicht durch E
4. Schnittpunkte $A' = g_A \wedge h$, $B' = g_B \wedge h$ und $C' = g_C \wedge h$
5. Konstruktion D' auf h so dass $(A', B'; C', D') = -1$ ist

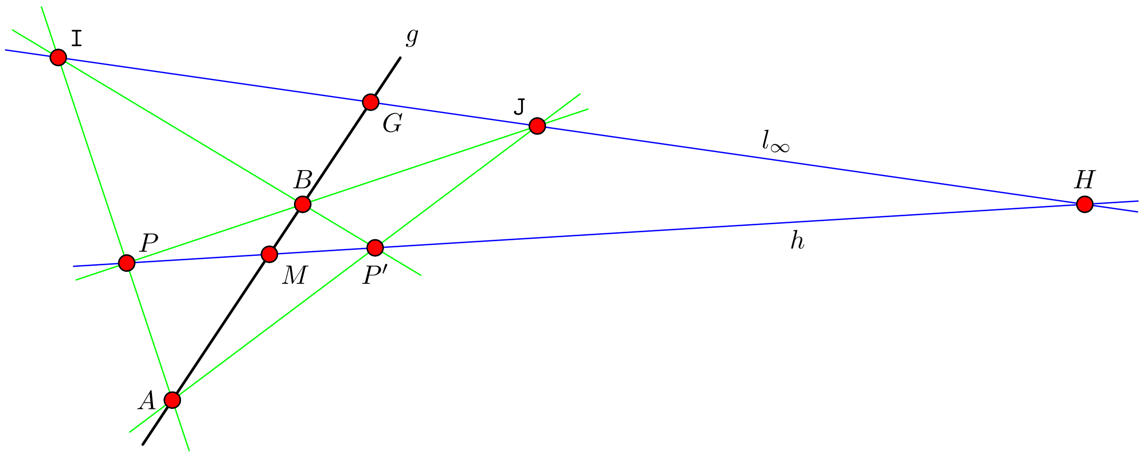
(1) Wahl von H beliebig, aber nicht auf h
(2) Wahl von P beliebig auf $A' \vee H$, aber von A' und H verschieden
(3) $Q = (B' \vee H) \wedge (C' \vee P)$
(4) $S = (A' \vee Q) \wedge (B' \vee P)$
(5) $D' = g \wedge (H \vee S)$

6. Verbindungsgerade $g_D = E \vee D'$
7. Der von E verschiedene Schnittpunkt von g_D mit dem Kreis ist D

Aufgabe 3. Lot fällen.

Gegeben seien die homogenen Koordinaten eines Punktes P und einer Gerade g. Geben Sie eine Vorschrift zur projektiven Bestimmung des Lotfußpunkts M des Lots von P auf g.

Lösung:



Man konstruiert wie in der Vorlesung den Spiegelpunkt P', verbindet diesen mit dem ursprünglichen Punkt P, und schneidet diese Gerade mit g, um die orthogonale Projektion M von P auf g zu erhalten.

$$\begin{aligned} A &= (P \times \mathtt{I}) \times g \\ B &= (P \times \mathtt{J}) \times g \\ P' &= (A \times \mathtt{J}) \times (B \times \mathtt{I}) \\ h &= P \times P' \\ M &= h \times g \end{aligned}$$

Oder als ein einziger Ausdruck:

$$M = \Bigg(P \times \bigg(\Big(\big((P \times \mathtt{I}) \times g\big) \times \mathtt{J}\Big) \times \Big(\big((P \times \mathtt{J}) \times g\big) \times \mathtt{I}\Big)\bigg)\Bigg) \times g$$

Aufgabe 4. Rechnen in einer Cayley-Klein-Geometrie.

Gegeben sei die Cayley-Klein-Geometrie mit dem Einheitskreis als Fundamentalgebilde und den Konstanten $c_{dist} = \frac{1}{2}$ und $c_{ang} = \frac{1}{2}$ sowie die Punkte

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und die Geraden

$$l = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad m = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie den Abstand zwischen P und Q.

(b) Berechnen Sie den Winkel zwischen l und m.

<u>Lösung:</u>

(a) Wenn wir die Punkte dehomogenisieren, sehen wir, dass sie die Koordinaten $P = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ und $Q = \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ haben. Sie liegen innerhalb des Einheitskreises und auf der x-Achse. Die Referenzpunkte, die wir brauchen, um den Abstand zu berechnen, sind die Schnittpunkte von $P \vee Q$ mit dem Einheitskreis. Hier sind das also $X = (-1, 0)$ und $Y = (1, 0)$. Damit bekommen wir den Abstand als

$$|P, Q| = c_{dist} \cdot \ln(P, Q; X, Y) = \frac{1}{2} \cdot \ln 6 \approx 0{,}896.$$

Die Reihenfolge/Beschriftung der Punkte X und Y ist nicht eindeutig. Wenn wir sie vertauschen, erhalten wir den Kehrwert des Doppleverhältnisses und, folglich, einen Vorzeichenwechsel für den Abstand.

(b) Da beide Geraden eine Null als zweite Koordianten haben, sind beide senkrecht. Der Schnittpunkt $l \wedge m$ ist damit der Fernpunkt der y-Achse. Damit sind die beiden Referenzgeraden X und Y, die wir brauchen, um den Winkel zu berechnen, auch senkrecht und laufen durch die Punkte $(-1, 0)$ und $(1, 0)$. Ihre homogenen Koordinaten sind also

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wenn man das Doppelverhältnis $(l, m; X, Y)$ nun berechnen möchte, kann man feststellen, dass die Schnittpunkte aller vier Geraden genau die Punkte aus Teil (a) sind; bis auf einen Vorzeichenwechsel in P und Q. Das Ergebnis ist also dasselbe; bis auf einen Vorzeichenwechsel des Winkels. Aber man kann $(l, m; X, Y)$ natürlich auch anders berechnen...

$$\angle(l, m) = c_{ang} \cdot \ln(l, m; X, Y) = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1}{6} \approx -0{,}896.$$

Aufgabe 5. Koplanare Punkte

Entscheiden Sie, ob die folgenden Punkte in einer gemeinsamen Ebene im $\mathbb{RP}^3$ liegen.

$$A = (1, 3, 2, 1)^T$$
$$B = (2, 1, -3, 1)^T$$
$$C = (0, 4, 0, 0)^T$$
$$D = (0, 1, 1, 1)^T$$

Lösung:

Vier Punkte liegen in einer Ebene, wenn die Determinante der von ihnen gebildeten Matrix Null ist. Ob man dabei die Vektoren als Zeilen oder Spalten in die Matrix schreibt, ist dabei ohne Belang.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-4) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = (-4) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = (-4) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-6) = 24$$

Das Ergebnis ist von Null verschieden, die vier Punkte sind also nicht koplanar.

Das ist natürlich nur einer von vielen möglichen Berechnungswegen. Er verwendet jedoch einige nützliche Techniken:

- Die Entwicklung der Determinante nach einer Zeile oder Spalte. Diese ist besonders günstig, wenn eine Zeile oder Spalte viele Nuller enthält. Zu beachten ist das alternierende Vorzeichen.
- Die Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen ändert den Wert der Determinante nicht. Zu beachten ist, dass die Zeile, zu der addiert wird, dabei *nicht* skaliert werden darf, da Skalieren (aufgrund der Multilinearität) den Wert der Determinante ändert. Man kann Determinanten mit Gauß-Elimination behandeln.
- Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonalelemente.

Der wichtigste Lerneffekt dieser Aufgabe ist jedoch die folgende: die beliebte Regel von Sarrus gilt *nur* für 3×3-Matrizen. Man hätte sie nach dem ersten Entwicklungsschritt anwenden können, aber bitte nicht auf die volle 4×4-Matrix.

Aufgabe 6. Geraden in $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$.

Die Verbindungsgerade von zwei Punkten $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$ und $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)^T$ im $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ kann durch einen sechsdimensionalen Plücker-Koordinaten-Vektor beschrieben werden.

a) Geben Sie den Plücker-Koordinaten-Vektor der Geraden an. Schreiben Sie dabei jeden einzelnen Eintrag explizit als Determinante, deren Einträge Koordinaten der Ausgangspunkte a und b sind.

b) Zeigen Sie, dass die Koordinaten der Gerade bis auf skalares Vielfaches unabhängig von der Wahl der Punkte auf der Geraden sind.

c) Was geschieht, wenn die beiden Punkte zusammenfallen?

Lösung:

a) Man notiert alle 2×2-Unterdeterminanten der Punktkoordinaten, und kennzeichnet jeden Eintrag mit einer zweielementigen Indexmenge. Das sieht dann so aus:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \vee \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} 12 \\ 13 \\ 14 \\ 23 \\ 24 \\ 34 \end{array} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

b) Zwei Punkte auf der Geraden durch a und b seien c und d, gegeben durch $c = \lambda_c a + \mu_c b$ und $d = \lambda_d a + \mu_d b$. Da Determinanten linear in jeder Spalte sind, kann man alle Unterdeterminanten von $c \vee d$ schreiben als:

$$\begin{vmatrix} c_i & d_i \\ c_j & d_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_c a_i + \mu_c b_i & \lambda_d a_i + \mu_d b_i \\ \lambda_c a_j + \mu_c b_j & \lambda_d a_j + \mu_d b_j \end{vmatrix} = (\lambda_c \mu_d - \lambda_d \mu_c) \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix}$$

Diese Unterdeterminanten unterscheiden sich also nur durch einen Faktor, der für alle i, j der gleiche ist und daher als skalarer Vorfaktor die Äquivalenzklasse des Koordinatenvektors nicht beeinflusst. Der Vorfaktor wird jedoch Null, wenn die Punkte c und d zusammenfallen.

c) Wenn die beiden Punkte zusammenfallen, geben die Plücker-Koordinaten alle Null.