Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Bernhard Werner

Geometriekalküle WS 2018/19

www-m10.ma.tum.de/GeometrieKalkueleWS1819

Lösungen zu Aufgabenblatt 6 (2019–01–14)

Level 0

Aufgabe 1. Grundlagen.

(a) Sei Q ein nicht-degenerierter Kegelschnitt gegeben durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass Q genau dann eine Parabel ist, wenn $ac - b^2 = 0$.

(b) Warum kann man die Punkte `I` und `J` nicht dehomogenisieren?

(c) Für vier kollineare, endliche Punkte im $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ ist ihr Doppelverhältnis gleich dem Doppelverhältnis der entsprechenden endlichen Punkte im $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$. Warum?

(d) Gegen sei eine projektive Transformation T im $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, die entweder eine

- Drehung um den Ursprung,
- eine Scherung parallel zur x-Achse oder
- das Strecken in x-Richtung um 5 und in y-Richtung um 3

darstellt. In welchen dieser Fälle lässt T Winkel invariant? Geben Sie jeweils sowohl ein (einfaches,) anschauliches, geometrisches Argument als auch ein formales, algebraisches.

Lösung:

(a) Ein (nicht-degenerierter) Kegelschnitt ist eine Parabel, wenn er die Ferngerade berührt oder, anders ausgedrückt, wenn die Ferngerade eine Tangente ist. Auf dem letzten Übungsblatt haben wir gesehen, wie wir aus Punkten auf Kegelschnitten die Tangenten berechnen und dass sich dieses Konzept zu Polen und Polaren verallgemeinert. Was wir hier also algebraisch nachrechen müssen ist, ob der Pol der Ferngerade, den wir mit $A^{-1}l_\infty$ berechnen können, auf dem Kegelschnitt liegt. Es muss also

$$\left(A^{-1}l_\infty\right)^T A \left(A^{-1}l_\infty\right) = 0$$

gelten. Die linke Seite lässt sich noch zu $l_\infty^T A^{-1} l_\infty$ vereinfachen. Wenn wir das stur ausrechen, kommen wir auf den angegeben Term. Wenn wir aber auf Blatt 3 spicken, müssen wir gar nichts extra ausrechnen: Da $l_\infty = (0, 0, 1)^T$, so ist der Term $l_\infty^T A^{-1} l_\infty$ einfach der $3, 3$-Eintrag der Inversen von A. Und diese Inverse ist bis auf ein Vielfaches die Adjunkte, deren $3, 3$-Eintrag der erste Hauptminor von A ist. Und das ist genau der gegebene Term.

Das Argument, dass wir verwendet haben, funktioniert natürlich für alle Geraden. Sprich, eine Gerade l ist genau dann tangetial an einen (nicht-degenerierten) Kegelschnitt A, wenn $l^T A^{-1} l = 0$. In der Vorlesung *Projektive Geometrie 1* beschäftigt man sich sehr ausführlich damit.

(b) Wenn wir die Standardeinbettung des $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ verwenden – und das tun wir immer standardmäßig – müssen Punkte einen Nicht-Null-Eintrag an letzter Stelle haben, damit wir sie dehomogenisieren können.

(c) Nennen wir die reellen Punkte A, B, C, D und die komplexen Punkte $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$. Dann gilt

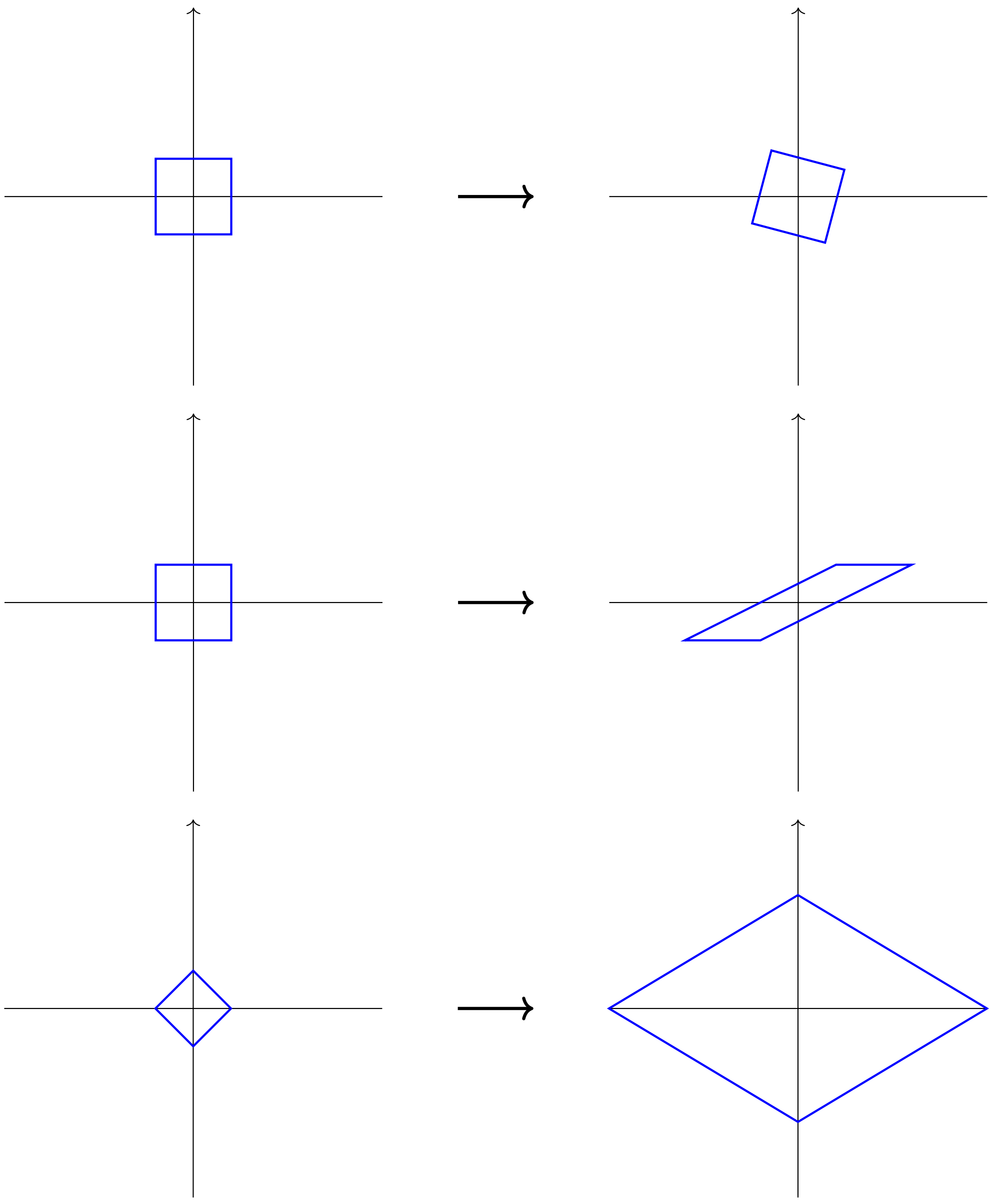
$$[\tilde{A}, \tilde{B}] = -[A, B, \mathtt{I}]$$

und ensprechen auch für die anderen fünf Punktepaare. Damit ist dann insbesondere

$$(\tilde{A}, \tilde{B}; \tilde{C}, \tilde{D}) = (A, B; C, D)_{\mathtt{I}}.$$

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass das linke Doppelverhältnis reell ist, also muss es auch das rechte sein. Auf Blatt 4 haben wir gesehen, dass $(A, B; C, D)_P$ unabhängig von P ist, wenn A, B, C, D kollinear sind, und dass es dann insbesondere gleichr $(A, B; C, D)$ ist. Das haben wir nur für reelle P gemacht. Aber da die Argumente rein algebraisch waren, kann man sie leicht auf komplexe P verallgemeinern.

(d) Die anschaulichen Argumente macht man sich am besten mit Skizzen klar: Drehungen erhalten offensichtlich Winkel. Scherungen machen aus einem achsenparallelen Quadrat ein allgemeines Parallelogramm. Das Strecken macht aus einem Quadrat mit Ecken auf den Achsen eine allgemeine Raute.



Um das alles algebraisch nachzuweisen, müssen wir zeigen, dass T die Punkte $\mathtt{I}$ und $\mathtt{J}$ als Fixpunkte hat. Denn genau dann bleibt der Winkel, den wir mittels Laguerre's Formel berechnen können, gleich. Wir rechnen im Folgenden nur mit $\mathtt{I}$, da T immer eine reelle Matrix hat. Wir bekommen für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) - i \cdot \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) + i \cdot \cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sin(\alpha)+i\cdot\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)-i\cdot\sin(\alpha)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i\cdot(\cos(\alpha)^2+\sin(\alpha)^2)}{\cos(\alpha)^2+\sin(\alpha)^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathtt{I}$$

und für alle $s \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+is \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \not\sim \mathtt{I}$$

und

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 0 \end{pmatrix} \not\sim \mathtt{I}.$$

Level 1

Aufgabe 2. Kreis als Kegelschnitt, der $\mathtt{I}$ und $\mathtt{J}$ enthält.

Ein Kreis in der projektiven Ebene ist gegeben durch

$$C = \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{RP}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 + \alpha xz + \beta yz + \gamma z^2 = 0\right\} \qquad \text{für geeignete } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

a) Warum (oder wann) ist dies ein Kreis? Wie lautet sein Mittelpunkt?

b) Zeigen Sie, dass die Kreise mit obiger Kreisgleichung die Punkte $\mathtt{I} = (-i,1,0)^T$ und $\mathtt{J} = (i,1,0)^T$ enthalten.

c) Geben Sie die Matrix $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, die diesen Kreis beschreibt.

d) Zeigen Sie, dass man den Mittelpunkt des Kreises wie folgt ausrechnen kann: $M = (Q \cdot \mathtt{I}) \times (Q \cdot \mathtt{J})$

e) Gibt es Quadriken, die $\mathtt{I}$ und $\mathtt{J}$ enthalten, aber nicht durch eine Gleichung in der oben angegebenen Form beschrieben werden können?

<u>Lösung:</u>

a) Die allgemeine Kreisgleichung eines Kreises in $\mathbb{R}^2$ lautet:

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 - r^2 = 0$$

mit $x_M, y_M, r \in \mathbb{R}$. An dieser Gleichung lassen sich sofort der Mittelpunkt $M = (x_M, y_M)$ und der Radius r ablesen.

Die Gleichung für C lässt sich (durch quadratische Ergänzung) umschreiben:

$$\begin{aligned} C(x,y,z) &= x^2 + y^2 + \alpha xz + \beta yz + \gamma z^2 \\ &= \left(x^2 + 2x\left(\frac{\alpha}{2}z\right) + \left(\frac{\alpha}{2}z\right)^2\right) - \left(\frac{\alpha}{2}z\right)^2 + \left(y^2 + 2y\left(\frac{\beta}{2}z\right) + \left(\frac{\beta}{2}z\right)^2\right) - \left(\frac{\beta}{2}z\right)^2 + \gamma z^2 \\ &= \left(x - \left(-\frac{\alpha}{2}\right)z\right)^2 + \left(y - \left(-\frac{\beta}{2}\right)z\right)^2 - \left(\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma\right)z^2 \end{aligned}$$

Wird diese Gleichnug dehomogenisiert ($z = 1$ einsetzen), so ist sofort ersichtlich, dass C in $\mathbb{R}^2$ den Kreis um den Mittelpunkt $M = (-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2})^T$ mit Radius $r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma}$ beschreibt.

Für $\gamma > \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4}$ wird der Radius imaginär, und zumindest in $\mathbb{R}^2$ kann man dann nicht mehr von einem „normalen“ Kreis reden.

b) Einfaches Einsetzen von $\mathtt{I}$ und $\mathtt{J}$ zeigt die Aussage:

$$\begin{aligned} (-i)^2 + 1^2 + \alpha \cdot (-i) \cdot 0 + \beta \cdot 1 \cdot 0 + \gamma \cdot 0^2 &= -1 + 1 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ i^2 + 1^2 + \alpha \cdot i \cdot 0 + \beta \cdot 1 \cdot 0 + \gamma \cdot 0^2 &= -1 + 1 + 0 + 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

c) Gesucht ist eine symmetrische Matrix $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$(x, y, z) \cdot Q \cdot (x, y, z)^T = x^2 + y^2 + \alpha xz + \beta yz + \gamma z^2$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man das Ergebnis. Wenn man will, kann man dabei die Koordinaten des Mittelpunkts aus Teilaufgabe a) verwenden, in Vorarbeit auf Teilaufgabe d).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & 1 & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\beta}{2} & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_M \\ 0 & 1 & -y_M \\ -x_M & -y_M & \gamma \end{pmatrix}$$

d) Es gilt

$$\begin{aligned}(Q \cdot \mathtt{I}) \times (Q \cdot \mathtt{J}) &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_M \\ 0 & 1 & -y_M \\ -x_M & -y_M & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_M \\ 0 & 1 & -y_M \\ -x_M & -y_M & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ ix_M - y_M \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -ix_M - y_M \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2i \cdot x_M \\ -2i \cdot y_M \\ -2i \end{pmatrix} = -2i \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Man kann mit Blick auf Aufgabe 2 des letzten Blattes die Vektoren $Q \cdot \mathtt{I}$ und $Q \cdot \mathtt{J}$ als homogene Koordinaten der Tangenten an den Kreis in den Punkten $\mathtt{I}$ und $\mathtt{J}$ auffassen. Deren Schnittpunkt ist folglich der Mittelpunkt.

e) Ein allgemeiner Kegelschnitt in der projektiven Ebene $\mathbb{RP}^2$ wird durch

$$C = \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{RP}^2 \,\middle|\, ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0 \right\}$$

beschrieben.

Wenn die Punkte $\mathtt{I}$ und $\mathtt{J}$ auf einem Kegelschnitt liegen, so ergibt sich durch Einsetzen von $\mathtt{I}$ und $\mathtt{J}$ in die Kegelschnittgleichung, dass $a - b + di = 0$ und $a - b - di = 0$ gelten muss, woraus folgt, dass

$$d = 0 \text{ und } a = b$$

erfüllt sein muss.

Für $a \neq 0$ reduziert sich die Kegelschnittgleichung dann zu

$$x^2 + y^2 + \frac{e}{a}xz + \frac{f}{a}yz + \frac{c}{a}z^2 = 0 \quad ,$$

was – wie oben gezeigt – gerade einer Kreisgleichung entspricht (mit $\alpha = \frac{e}{a}$, $\beta = \frac{f}{a}$, $\gamma = \frac{c}{a}$).

Für $a = b = 0$ ergibt sich die Gleichung

$$cz^2 + exz + fyz = (ex + fy + cz) \cdot z = (ex + fy + cz) \cdot (0x + 0y + 1z) = 0$$

Diese Gleichung ist das Produkt aus zwei Geraden: der Geraden mit homogenen Koordinaten $(e, f, c)^T$ und der Ferngeraden. Der Kegelschnitt ist also degeneriert und zerfällt in zwei (nicht notwendigerweise verschiedene) Geraden.

Aufgabe 3. Laguerres Formel.

Zeigen Sie mit Hilfe von Laguerres Formel folgende Aussagen:

a) Für die Winkelsumme im Dreieck gilt:

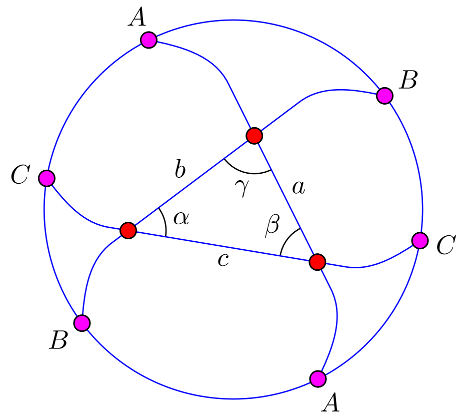
$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \pmod{\pi}$$

b) Gegenüberliegende Winkel eines Parallelogramms sind (modulo π) gleich groß.

c) Begründen Sie, warum sich mit Laguerres Formel Winkel nur Modulo π bestimmen lassen.

LÖSUNG:

a) Es sei a, b und c die den Winkeln α, β und γ gegenüberliegenden Seiten. Die Schnittpunkte dieser Seiten mit der Ferngerade seien als A, B und C bezeichnet. Dann gilt

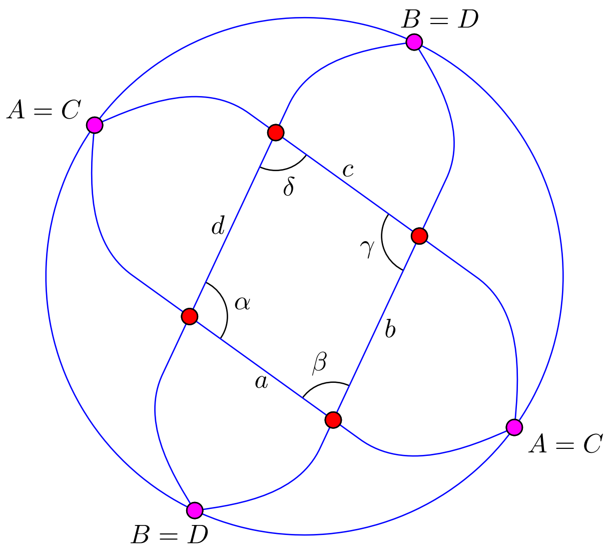


$$\alpha = \frac{1}{2i} \cdot \log(B, C; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \pmod{\pi}$$
$$\beta = \frac{1}{2i} \cdot \log(C, A; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \pmod{\pi}$$
$$\gamma = \frac{1}{2i} \cdot \log(A, B; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \pmod{\pi}$$

Damit folgt nun

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta + \gamma &= \frac{1}{2i}\Big(\log(B, C; \mathtt{I}, \mathtt{J}) + \log(C, A; \mathtt{I}, \mathtt{J}) + \log(A, B; \mathtt{I}, \mathtt{J})\Big) \\
&= \frac{1}{2i}\log\Big((B, C; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \cdot (C, A; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \cdot (A, B; \mathtt{I}, \mathtt{J})\Big) \\
&= \frac{1}{2i}\log(1) = 0 \pmod{\pi}
\end{aligned}$$

b) Verwendet man Bezeichnungen analog zur Situation im Dreieck, so ergibt sich nachfolgendes Bild. Die Winkel errechnen sich darin als



$$\alpha = \frac{1}{2i}\log(D, A; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \pmod{\pi}$$
$$\beta = \frac{1}{2i}\log(A, B; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \pmod{\pi}$$
$$\gamma = \frac{1}{2i}\log(B, C; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \pmod{\pi}$$
$$\delta = \frac{1}{2i}\log(C, D; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \pmod{\pi}$$

Da die gegenüberliegenden Seiten jedoch parallel sind, fallen ihre Fernpunkte zusammen: $A = C$ und $B = D$. Damit sind auch die Winkel offensichtlich gleich, da genau das gleiche Doppelverhältnis ausgerechnet wird:

$$\alpha = \gamma = \frac{1}{2i}\log(D = B, A = C; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \pmod{\pi}$$
$$\beta = \delta = \frac{1}{2i}\log(A = C, B = D; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \pmod{\pi}$$

Nebenbemerkung: Die beiden verbleibenden Doppelverhältnisse unterscheiden sich nur noch in der Reihenfolge der beiden Fernpunkte. Das entspricht einem Kehrwert des Doppelverhältnisses und somit einem Vorzeichenwechsel des Logarithmus. Modulo π ist also $\alpha = -\beta$ und so fort, was der Tatsache Ausdruck verleiht, dass sich benachbarte Winkel im Parallelogramm zu π addieren.

c) Der komplexe Logarithmus ist mehrdeutig. Da $e^{x+k2\pi i}$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ den gleichen Wert annimmt, kann der Logarithmus den Imaginärteil eines Exponenten nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π bestimmen. Nach Division durch $2i$ ergibt sich, dass der Realteil des Winkels nur bis auf ganzzahlige Vielfache von π bestimmt werden kann.

Da projektive Geraden unorientiert sind, also keine ausgezeichnete Richtung haben, kann der Winkel zwischen zwei Geraden gar nicht genauer bestimmt werden. Winkelmessungen modulo 2π funktionieren nur zwischen Geraden mit vorgegebener Richtung. Klassische Winkelmessung zwischen vorgegebenen Schenkeln entspricht Halbgeraden mit vorgegebener Ausdehnungsrichtung ab dem gemeinsamen Startpunkt.

Aufgabe 4. Euklidischer Abstand.

Üblicherweise bestimmt man die Entfernung $\|x-y\|$ zweier Punkte $x=(x_1,x_2)^T, y=(y_1,y_2)^T \in \mathbb{R}^2$ über den Satz von Pythagoras. Es gilt nämlich

$$\|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}.$$

Im Folgenden soll eine projektive Invariante hergeleitet werden, die den euklidischen Abstand bezüglich der Standardeinbettung in $\mathbb{RP}^2$ wiedergibt. Lösen Sie dafür die folgenden Teilaufgaben:

a) Zeigen Sie, dass $\|x-y\| = \sqrt{[X,Y,\mathtt{I}][X,Y,\mathtt{J}]}$ ist, wenn $X=(x_1,x_2,1)^T$ und $Y=(y_1,y_2,1)^T$.

b) Zeigen Sie, dass $\sqrt{[X,Y,\mathtt{I}][X,Y,\mathtt{J}]}$ keine projektive Invariante ist.

c) Begründen Sie, dass

$$d := \frac{\sqrt{[X,Y,\mathtt{I}][X,Y,\mathtt{J}]}\ [A,\mathtt{I},\mathtt{J}][B,\mathtt{I},\mathtt{J}]}{\sqrt{[A,B,\mathtt{I}][A,B,\mathtt{J}]}\ [X,\mathtt{I},\mathtt{J}][Y,\mathtt{I},\mathtt{J}]}$$

eine projektive Invariante ist.

d) Interpretieren Sie diesen Term d als Verhältnis von Abständen in $\mathbb{R}^2$.

e) Was muss für A, B gelten, damit d den Abstand $\|x-y\|$ wiedergibt?

<u>LÖSUNG:</u>

a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\sqrt{[X,Y,\mathtt{I}]\cdot[X,Y,\mathtt{J}]} &= \sqrt{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & i \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & -i \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} \\
&= \sqrt{((x_2-y_2)+i(y_1-x_1))\cdot((x_2-y_2)-i(y_1-x_1))} \\
&= \sqrt{(x_2-y_2)^2+(y_1-x_1)^2} \\
&= \|x-y\|
\end{aligned}$$

b) Der ist Ausdruck ist z.B. nicht unabhängig von der speziellen Wahl der Repräsentanten, denn es gilt

$$\sqrt{[\lambda\cdot X,Y,\mathtt{I}]\cdot[\lambda\cdot X,Y,\mathtt{J}]} = \lambda\cdot\sqrt{[X,Y,\mathtt{I}]\cdot[X,Y,\mathtt{J}]} \neq \sqrt{[X,Y,\mathtt{I}]\cdot[X,Y,\mathtt{J}]}$$

für $\lambda \notin \{0,1\}$.

Genauso ist der Ausdruck nicht invariant unter einer projektiven Transformation, dargestellt durch die Matrix M:

$$\sqrt{[MX,MY,M\mathtt{I}]\cdot[MX,MY,M\mathtt{J}]} = \det(M)\cdot\sqrt{[X,Y,\mathtt{I}]\cdot[X,Y,\mathtt{J}]} \neq \sqrt{[X,Y,\mathtt{I}]\cdot[X,Y,\mathtt{J}]}$$

für $\det(M) \notin \{0,1\}$. Zur Frage, ob nicht der Betrag der Determinante notiert werden sollte, finden sich bei der nächsten Teilaufgabe noch Details.

c) Der Ausdruck d ist unabhängig von der Wahl der speziellen Repräsentanten, denn für $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_X, \lambda_Y, \lambda_{\mathtt{I}}, \lambda_{\mathtt{J}} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{[\lambda_X X,\lambda_Y Y,\lambda_{\mathtt{I}}\mathtt{I}][\lambda_X X,\lambda_Y Y,\lambda_{\mathtt{J}}\mathtt{J}]}\ [\lambda_A A,\lambda_{\mathtt{I}}\mathtt{I},\lambda_{\mathtt{J}}\mathtt{J}][\lambda_B B,\lambda_{\mathtt{I}}\mathtt{I},\lambda_{\mathtt{J}}\mathtt{J}]}{\sqrt{[\lambda_A A,\lambda_B B,\lambda_{\mathtt{I}}\mathtt{I}][\lambda_A A,\lambda_B B,\lambda_{\mathtt{J}}\mathtt{J}]}\ [\lambda_X X,\lambda_{\mathtt{I}}\mathtt{I},\lambda_{\mathtt{J}}\mathtt{J}][\lambda_Y Y,\lambda_{\mathtt{I}}\mathtt{I},\lambda_{\mathtt{J}}\mathtt{J}]} \\
=&\frac{\lambda_A\lambda_B\lambda_X\lambda_Y(\lambda_{\mathtt{I}}\lambda_{\mathtt{J}})^{5/2}}{\lambda_A\lambda_B\lambda_X\lambda_Y(\lambda_{\mathtt{I}}\lambda_{\mathtt{J}})^{5/2}} \cdot \frac{\sqrt{[X,Y,\mathtt{I}][X,Y,\mathtt{J}]}\ [A,\mathtt{I},\mathtt{J}][B,\mathtt{I},\mathtt{J}]}{\sqrt{[A,B,\mathtt{I}][A,B,\mathtt{J}]}\ [X,\mathtt{I},\mathtt{J}][Y,\mathtt{I},\mathtt{J}]} = d
\end{aligned}$$

Ferner sei eine projektive Transformation durch die Matrix M beschrieben. Diese Transformation wird auf alle Punkte angewandt, also auch auf I und J. Es gilt $\det(M) \neq 0$ und somit

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{[MX, MY, M\mathtt{I}][MX, MY, M\mathtt{J}]}\ [MA, M\mathtt{I}, M\mathtt{J}][MB, M\mathtt{I}, M\mathtt{J}]}{\sqrt{[MA, MB, M\mathtt{I}][MA, MB, M\mathtt{J}]}\ [MX, M\mathtt{I}, M\mathtt{J}][MY, M\mathtt{I}, M\mathtt{J}]}\\ =&\frac{\det(M)^3}{\det(M)^3} \cdot \frac{\sqrt{[X, Y, \mathtt{I}][X, Y, \mathtt{J}]}\ [A, \mathtt{I}, \mathtt{J}][B, \mathtt{I}, \mathtt{J}]}{\sqrt{[A, B, \mathtt{I}][A, B, \mathtt{J}]}\ [X, \mathtt{I}, \mathtt{J}][Y, \mathtt{I}, \mathtt{J}]} = d\end{aligned}$$

Man beachte, dass hier in beiden Fällen quadratische Faktoren aus der Wurzel gezogen wurden, ohne dabei das Vorzeichen zu beachten. Dazu gibt es zwei mögliche Interpretationen.

In $\mathbb{RP}^2$, erweitert um zwei zusätzliche spezielle Punkte I und J (sowie die Objekte, die sich daraus konstruieren lassen, also etwa $M \cdot \mathtt{I}$ und $M \cdot \mathtt{J}$), erwarten wir positive relle Zahlen als Abstände. Daher sollte der gesamte Ausdruck in Betragsstriche gesetzt werden, und wir können Vorzeichen in einzelnen Komponenten ignorieren. Da der Ausdruck faktisch nicht in Betragsstrichen notiert ist, greift diese Erklärung nicht ganz.

In $\mathbb{CP}^2$, wo I und J sich natürlich als zwei ganz gewöhnliche projektive Punkte einbetten, muss auch die Wurzel komplexwertig betrachtet werden. Spätestens dann wird es unvermeidbar, die Wurzel als eine mehrwertige Funktion aufzufassen, die ihr Ergebnis nur bis auf ein Vorzeichen bestimmt. Im Sinne dieser Unbestimmtheit ist es wiederum zulässig, einen quadratischen Faktor aus der Wurzel zu ziehen und dabei das Quadrat wegzulassen. An dem unbestimmten Vorzeichen des Ausdrucks ändert diese Operation nichts.

d) Betrachten wir $[X, \mathtt{I}, \mathtt{J}]$ in Standardeinbettung:

$$[X, \mathtt{I}, \mathtt{J}] = \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & i & -i \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2i$$

Das Ergebnis hängt nicht von den Koordinaten x_1, x_2 ab, und gilt daher auch für die anderen drei Punkte Y, A, B. In Standardeinbettung gilt also

$$[A, \mathtt{I}, \mathtt{J}] = [B, \mathtt{I}, \mathtt{J}] = [X, \mathtt{I}, \mathtt{J}] = [Y, \mathtt{I}, \mathtt{J}] = -2i$$

Da sich diese Determinanten alle kürzen, kann man d als Verhältnis zweier Längen auffassen:

$$d = \frac{\overbrace{\sqrt{[X, Y, \mathtt{I}][X, Y, \mathtt{J}]}}^{\|x-y\|}\ \overbrace{[A, \mathtt{I}, \mathtt{J}]}^{-2i}\overbrace{[B, \mathtt{I}, \mathtt{J}]}^{-2i}}{\underbrace{\sqrt{[A, B, \mathtt{I}][A, B, \mathtt{J}]}}_{\|a-b\|}\ \underbrace{[X, \mathtt{I}, \mathtt{J}]}_{-2i}\underbrace{[Y, \mathtt{I}, \mathtt{J}]}_{-2i}} = \frac{\|x - y\|}{\|a - b\|}$$

wobei $a = (a_1, a_2)^T, b = (b_1, b_2)^T \in \mathbb{R}^2$ zwei Punkte in der euklidischen Ebene und $A = (a_1, a_2, 1)^T, B = (b_1, b_2, 1)^T \in \mathbb{RP}^2$ ihre Standardeinbettungen in der projektiven Ebene sind.

In Teilaufgabe c) haben wir gezeigt, dass der Ausdruck d von der Wahl der Repräsentanten unabhängig ist. Wenn andere Repräsentanten gewählt werden, gelten für die einzelnen Teile des Ausdrucks zwar nicht mehr notwendigerweise die gleichen Zahlenwerte (etwa die $-2i$), aber der gesamte Ausdruck behält seinen Wert und somit seine Bedeutung als Verhältnis der euklidischen Abstände bei.

e) A und B muss so gewählt sein, dass $\|a - b\| = 1$ gilt. Diese beiden Punkte definieren somit die Längeneinheit.

Aufgabe 5. Fläche einer Ellipse.

Für den Umfang dieser Aufgabe führen wir die folgende Notation ein.

Für eine beliebige 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}$$

sei A' definiert als

$$A' = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix},$$

also der 2×2-Hauptminor.

Sei nun A die Matrix, die eine Ellipse $\mathcal{E}$ (als Kegelschnitt) beschreibt. Zeigen Sie, dass die Fläche $F_\mathcal{E}$ der Ellipse gegeben ist durch

$$F_\mathcal{E} = -\frac{\det(A)}{\sqrt{\det(A')^3}} \cdot \pi.$$

Gehen Sie dazu in den folgenden Schritten vor.

a) Zeigen Sie, dass die Formel für den Einheitskreis

$$\mathcal{E}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \mid \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 - \mathrm{z}^2 = 0\}$$

gilt.

b) Zeigen Sie, dass die Formel für eine allgemeine zentrierte, achsenparallele Ellipse

$$\mathcal{E}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \mid \alpha\mathrm{x}^2 + \beta\mathrm{y}^2 - \mathrm{z}^2 = 0\}$$

gilt.

c) Folgern Sie, dass die Formel auch für beliebige Ellipsen gilt. Reduzieren Sie diesen Fall auf Teil b), indem Sie euklidische Transformation (Kombinationen aus Rotationen und Translationen) auf eine allgemeine Ellipse anwenden.

<u>Lösung:</u>

Sei $f(A)$ die rechte Seite der zu zeigenden Gleichung. Also, $f(A) = -\frac{\det(A)}{\sqrt{\det(A')^3}} \cdot \pi$.

a) Das lässt sich leicht nachrechnen. Der Einheitskreis $\mathcal{E}_1$ wird durch die Matrix

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Es gilt, dass

$$f(A_1) = -\frac{\det(A_1)}{\sqrt{\det(A_1')^3}} \cdot \pi = -\frac{-1}{\sqrt{1^3}} \cdot \pi = \pi = 1^2 \cdot \pi = F_{\mathcal{E}_1}.$$

b) Wenn man weiß, dass eine Ellipse einfach nur ein gestreckter Kreis ist, kann man die Formel aus a) einfach mit den ensprechenden Streckungsfaktoren multiplizieren. Und eine Ellipse mit (dehomogenisierter) Gleichung $\alpha x^2 + \beta y^2 - 1 = 0$ schneidet die x-Achse bei $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ und die die y-Achse bei $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$. Der Streckungsfaktor ist damit also $\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}$.

Wenn man das nicht weiß, kann man die Gleichung $\alpha x^2 + \beta y^2 - 1^2 = 0$ nach y auflösen und integrieren und damit nachrechnen, dass das so stimmt. Auflösen nach y liefert

$$e_{\alpha,\beta}(x) := y = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\sqrt{1 - \alpha x^2},$$

wenn man den Ast über der x-Achse betrachtet. Die Fläche $F_{\mathcal{E}_2}$ ist durch das Integral dieser Funktion in x gegeben:

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{E}_2} &= 2 \cdot \int_{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}^{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} e_{\alpha,\beta}(x)dx \\ &= 2 \cdot \int_{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}^{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} \frac{1}{\sqrt{\beta}}\sqrt{1 - \alpha x^2}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \cdot 2 \cdot \int_{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}^{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} \sqrt{1 - \alpha x^2}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \cdot 2 \cdot \int_{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}^{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} e_{\alpha,1}(x)dx \end{aligned}$$

Anschließend spalten wir das Integral bei $x = 0$ auf, substituieren $t := \pm\sqrt{\alpha x^2}$ je nach Hälfte, fassen wieder zusammen und erhalten

$$F_{\mathcal{E}_2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \cdot 2 \cdot \int_{-1}^{1} e_{1,1}(t)dt = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} F_{\mathcal{E}_1}.$$

Nun bleibt noch zu zeigen, dass derselbe Zusammenhang auch für die Terme $f(A)$ gilt. Die Ellipse $\mathcal{E}_2$ wird durch die Matrix

$$A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Man sieht sofort, dass

$$\det(A_2) = \alpha\beta \cdot \det(A_1) \qquad \text{und} \qquad \det(A_2') = \sqrt{\alpha^3\beta^3} \cdot \det(A_1')$$

gilt. In die Formel eingesetzt, heißt das, dass tatsächlich

$$f(A_2) = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} f(A_1)$$

gilt.

c) Euklidische Transformationen ändern natürlich die Fläche einer Ellipse nicht. Wir müssen also zeigen, dass auch die Formel $f(A)$ sich nicht ändert. Da die Determinante von euklidischen Transformationen gleich 1 ist, ist das sehr schnell einzusehen. Wir rechnen es aber natürlich im Detail nach:

Eine beliebige Translation lässt sich schreiben als

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und eine Rotation als

$$R = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

mit der Zusatzbedingung, dass $\det(R') = c^2 + s^2 = 1$. Eine euklidische Transformation S ist eine affine Transformation, die, wenn der $3,3$-Eintrag auf 1 normiert ist, die Determinante 1 hat. Dann finden wir immer eine Translation T und eine Rotation R wie oben beschrieben, so dass

$$S := TR = \begin{pmatrix} c & -s & t_x \\ s & c & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Natürlich sind die Werte c und s Cosinus und Sinus des Drehwinkel und im Allgmeinen hängen hier dann auch t_x und t_y von diesem Winkel ab. Für die folgenden Berechnungen ist das allerdings irrelevant.)

Eine beliebige Ellipse $\mathcal{E}$ sei nun durch die Matrix A gegeben. Diese lässt sich für eine passende euklidische Transformation S schreiben als

$$A = \left(S^{-1}\right)^T A_2 S^{-1}.$$

(Beachten Sie, wie projektive Transformationen auf die Matrizen von Kegelschnitten wirken.) Um diesen Term nun in die Formel $f(A)$ einsetzen zu können, müssen wir uns noch überlegen, wie sich die Hauptminoren unter dieser Transformation verändern.

Die Matrix A_2 ist, ganz allgemein, von der Form

$$A_2 = \begin{pmatrix} A_2' & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

und S^{-1} von der Form

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \left(S^{-1}\right)' & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

(Wobei zudem $\left(S^{-1}\right)' = (S')^{-1}$ gilt.) Die transformierte Matrix hat dann die Form

$$\left(S^{-1}\right)^T A_2 S^{-1} = \begin{pmatrix} \left(\left(S^{-1}\right)'\right)^T A_2' \left(S^{-1}\right)' & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

(Das gilt aber nur, wenn S die gegebene Form hat.) Das heißt, wenn wir eine euklidischen Transformation auf eine Kegelschnittmatrix anwenden, dann ist der Operator $'$ multiplikativ:

$$\left(\left(S^{-1}\right)^T A_2 S^{-1}\right)' = \left(\left(S^{-1}\right)^T\right)' A_2' \left(S^{-1}\right)'$$

Beachten Sie, dass Transponieren und Hauptminorbilden vertauschen.

Damit können wir nun die Formel $f(A)$ ausrechnen. Der Zähler ergibt, zusammen mit dem Determinatenmultiplikationssatz,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det\left(\left(S^{-1}\right)^T A_2 S^{-1}\right) \\ &= \det(S)^{-1} \det(A_2) \det(S)^{-1} \\ &= \det(A_2). \end{aligned}$$

Mit obiger Rechnung zum Operator $'$ ergibt sich völlig analog im Nenner:

$$\begin{aligned} \det(A') &= \det\left(\left(\left(S^{-1}\right)^T A_2 S^{-1}\right)'\right) \\ &= \det(S')^{-1} \det(A_2') \det(S')^{-1} \\ &= \det(A_2'). \end{aligned}$$

Damit gilt in der Tat, dass $f(A) = f(A_2)$. Die Formel zur Berechnung der Ellipsenfläche ist also invariant unter euklidischen Transformationen. Damit reicht es, die Formel für achsenparallele, zentrierte Ellipsen zu zeigen, was wir in Teil b) gemacht haben.

Aufgabe 6. Projektive Invarianz.

Vier Punkte A, B, C, D liegen genau dann auf einem Kreis oder einer Geraden, wenn

$$[CA\mathtt{I}][DB\mathtt{I}][DA\mathtt{J}][CB\mathtt{J}] - [CA\mathtt{J}][DB\mathtt{J}][DA\mathtt{I}][CB\mathtt{I}] = 0$$

Außerdem kann der Abstand zwischen zwei Punkten X, Y bestimmt werden mit Hilfe der Formel

$$d = \frac{\sqrt{[X, Y, \mathtt{I}][X, Y, \mathtt{J}]}\ [A, \mathtt{I}, \mathtt{J}][B, \mathtt{I}, \mathtt{J}]}{\sqrt{[A, B, \mathtt{I}][A, B, \mathtt{J}]}\ [X, \mathtt{I}, \mathtt{J}][Y, \mathtt{I}, \mathtt{J}]}$$

Die beiden oben angegebenen Formeln sind projektiv invariant. Auf der anderen Seite ist von perspektivischen Abbildungen hinreichend bekannt, dass diese projektive Abbildungen sind, aber Längen verzerren und Kreise zu Ellipsen verbiegen können. Wie passt das zusammen?

<u>Lösung:</u>

Die Ausdrücke sind projektiv invariant, wenn die Projektion auf alle vorkommenden Elemente gleichermaßen angewandt wird, also einschließlich $\mathtt{I}$ und $\mathtt{J}$ sowie der für die Längenmessung verwendeten Referenzpunkte A und B. Bildet man nur einen Teil der Punkte projektiv ab, so ist der Ausdruck im Allgemeinen nicht invariant, sondern verändert seinen Wert.

Die euklidische Bedeutung hängt jedoch davon ab, dass $\mathtt{I}$ und $\mathtt{J}$ auf ihren vorgegebenen Positionen liegen, und der Abstand zwischen A und B genau 1 beträgt. Eine andere Wahl dieser Punkte entspricht einer projektiv verzerrten euklidischen Ebene, in der zwar projektiv die gleichen Eigenschaften gelten, aber euklidische Messungen sich nicht mehr direkt durchführen lassen.