Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Bernhard Werner

Geometriekalküle WS 2018/19

`www-m10.ma.tum.de/GeometrieKalkueleWS1819`

Lösungen zu Aufgabenblatt 5 (2018–12–17)

Level 0

Aufgabe 1. Grundlagen.

(a) Finden Sie eine Klasse von Matrizen, die nie Kegelschnitte darstellen kann.

(b) Die Punkte A bis E definieren einen Kegelschnitt, der durch eine Matrix M repräsentiert werden kann. Bestimmen Sie diese Matrix. Geben Sie zunächst Ihren Ansatz an, und berechnen Sie dann das Ergebnis.

$$A = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$$

(c) Gegeben seien die homogenen Koordinaten eines endlichen Punktes in $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$:

$$\begin{pmatrix}a+bi\\c+di\end{pmatrix} \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

– Geben Sie die homogenen Koordinaten des entsprechenden Punktes in $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ an. Verwenden Sie dazu nur Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen, ausgehend von den vier oben angegebenen reellen Zahlen.

– Was ist das Ergebnis dieser Abbildung, wenn die Eingabe den unendlich fernen Punkt in $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ beschreibt?

Lösung:

(a) Hier ist das Ziel einfach nur zu üben, Kegelschnitte von Matrix- bzw. Bilinearform-Darstellung in explizite quadratische Gleichungen umzuformen. Wenn man ein bisschen mit verschieden Matrizen experimentiert, stellt man fest, dass anti-symmetrische Matrizen keine Kegelschnitte darstellen. Der Grund ist, dass sich die Einträge, die sich gegenüberliegen beim Ausmultiplizieren gegenseitig wegheben:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}0 & -a & b\\ a & 0 & -c\\ -b & c & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0\cdot x^2 + 0\cdot y^2 + 0\cdot z^2 + (a-a)\cdot xy + (b-b)\cdot xz + (c-c)\cdot yz = 0$$

In der Vorlesung *Projektive Geometrie 1* nutzt man das dann aus, um Matrizen von Kegelschnitt zu verändern. Wenn man zu einer gegebenen Kegelschnittmatrix eine anti-symmetrische Matrix addiert, ändert sich die Lösungsmenge der zugehörigen quadratischen Gleichung nicht.

(b) Hier geht es mehr darum, sich dieverschiedenen möglichen Ansätze für diese Aufgabe klar zu machen, als tatsächlich den Kegelschnitt auszurechnen. (Wobei man das natürlich können sollte.)

Lineares Gleichungssystem: Ein Kegelschnitt ist beschrieben durch eine Gleichung

$$a\cdot x^2 + b\cdot y^2 + c\cdot xy + d\cdot xz + e\cdot yz + f\cdot z^2 = 0$$

Setzt man die fünf vorgegebenen Punkte in diese Gleichung ein, erhält man ein Gleichungssystem mit fünf Gleichungen und den sechs Unbekannten a bis f. Dieses hat einen eindimensionalen Lösungsraum. Jeder vom Nullvektor verschiedene Parametervektor beschreibt den richtigen Kegelschnitt. Aber das ist uns natürlich zu „schwierig“.

Doppelverhältnis: Aus der Vorlesung ist bekannt, dass sechs Punkte A bis F genau dann auf einem Kegelschnitt liegen, wenn sie die Gleichung

$$(A,B;C,D)_E = (A,B;C,D)_F$$

bzw.

$$[A,C,E][B,D,E][A,D,F][B,C,F] - [A,D,E][B,C,E][A,C,F][B,D,F] = 0$$

erfüllen.

Setzt man für F einen Punkt mit unbekannten Koordinaten $F = (x,y,z)^T$ ein, erhält man eine Gleichung, die in diesen Variablen homogen quadratisch ist, sprich jedes Monom ist das Produkt von genau zwei dieser Variablen. Die entsprechenden Koeffizienten lassen sich in eine Matrix schreiben, mit einem Faktor 2 auf der Hauptdiagonalen wen diese Matrix symmetrisch notiert wird.

Rechnung:

$$[A,C,E][B,D,E][A,D,F][B,C,F] = [A,D,E][B,C,E][A,C,F][B,D,F]$$

$$\begin{vmatrix}1&2&0\\0&1&2\\1&1&-1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}-1&0&0\\1&1&2\\0&0&-1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&0&x\\0&1&y\\1&0&z\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}-1&2&x\\1&1&y\\0&1&z\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&2\\1&0&-1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}-1&2&0\\1&1&2\\0&1&-1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&2&x\\0&1&y\\1&1&z\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}-1&0&x\\1&1&y\\0&0&z\end{vmatrix}$$

$$(-1+4-2)\cdot 1\cdot(z-x)\cdot(-z+x+y-2z) = (-1)\cdot(1+2+2)\cdot(z+2y-x-y)\cdot(-z)$$

$$(x-z)(x+y-3z) = 5(x-y-z)z$$

$$x^2+xy-3xz-xz-yz+3z^2 = 5xz-5yz-5z^2$$

$$x^2+xy-9xz+4yz+8z^2 = 0$$

$$2\cdot x^2+1\cdot 2xy+(-9)\cdot 2xz+0\cdot y^2+4\cdot 2yz+16\cdot z^2 = 0$$

$$(x,y,z)\cdot\begin{pmatrix}2&1&-9\\1&0&4\\-9&4&16\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0$$

$$M = \begin{pmatrix}2&1&-9\\1&0&4\\-9&4&16\end{pmatrix}$$

Plückers μ: Man kann sich vier der Punkte aussuchen und degenerierte Kegelschnitte durch diese legen, also Kegelschnitte, die jeweils aus zwei Geraden bestehen. Es gibt drei Kegelschnitte, die dafür in Frage kommen, von denen man zwei beliebig wählt. Dann bestimmt man über Plückers μ eine geeignete Linearkombination dieser beiden Kegelschnitte, die den Punkt E enthält.

Rechnung:

$$A\times B = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} \qquad C\times D = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} \qquad M_1 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot(-1,0,2) = \begin{pmatrix}1&0&-2\\1&0&-2\\-1&0&2\end{pmatrix}$$

$$A\times C = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad B\times D = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot(0,0,-1) = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$M = \lambda M_1 + \mu M_2$$

$$\lambda = E^T M_2 E = (0,2,-1)\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} = 2-1 = 1$$

$$\mu = -E^T M_1 E = -(0,2,-1)\cdot\begin{pmatrix}1&0&-2\\1&0&-2\\-1&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} = -(4+2) = -6$$

$$M = M_1 - 6M_2 = \begin{pmatrix}1&0&-8\\1&0&4\\-1&0&8\end{pmatrix}$$

$$M + M^T = \begin{pmatrix}2&1&-9\\1&0&4\\-9&4&16\end{pmatrix}$$

Der letzte Schritt dient lediglich dazu, die Matrix symmetrisch zu machen, was in der Aufgabenstellung gar nicht explizit gefordert war. Es erleichtert jedoch den Vergleich mit den anderen Ansätzen. Man hätte auch die einzelnen degenerierten Kegelschnitte symmetrisch angeben können, wodurch das Ergebnis automatisch symmetrisch geworden wäre.

(c)

- Für einen endlichen Punkt ergeben sich die Koordinaten in $\mathbb{R}^2$ als Realteil und Imaginärteil des dehomogenisierten komplexen Punktes. Um diese sinnvoll auftrennen zu können, muss man den Nenner reell machen.

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}i$$

  Da die geforderte Form ohne Division auskommen soll, muss der gemeinsame Nenner in die dritte Komponente des reellen homogenen Vektors geschrieben werden. Damit ist jede Komponente eine Summe oder Differenz aus zwei Produkten von Zahlen der Eingabe.

$$\begin{pmatrix} ac+bd \\ bc-ad \\ cc+dd \end{pmatrix}$$

- Der unendlich ferne Punkt in $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ ist durch eine verschwindende letzte Komponente gekennzeichnet, also $c = d = 0$. Unter diesen Umständen ergibt obige Formel den Nullvektor. Das ist nur konsequent, da der unendlich ferne Punkt in $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ keine Richtungsinformation trägt. Ihn mit einem bestimmten Fernpunkt in $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ zu identifizieren, wäre daher falsch. Der Nullvektor als „nicht-Punkt“ ist uns schon öfter als Ergebnis für nicht eindeutig definierte Operationen begegnet, etwa als Verbindungsgerade zweier identischer Punkte.

Level 1

Aufgabe 2. Dualisieren und Doppelverhältnis.

Es gilt der folgende Satz:

> *Gegeben seien zwei verschiedenen Geraden g und h in der rellen projektiven Ebene $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ und ein Punkt Z, der weder auf g noch auf h liege. Vier paarweise verschiedene Geraden z_1, z_2, z_3, z_4 durch den Punkt Z schneiden die beiden Geraden g bzw. h in je vier Punkten G_1, G_2, G_3, G_4 bzw. H_1, H_2, H_3, H_4, und für die beiden Doppelverhältnisse $(G_1, G_2; G_3, G_4)$ und $(H_1, H_2; H_3, H_4)$ gilt:*
>
> $$(G_1, G_2; G_3, G_4) = (H_1, H_2; H_3, H_4)$$

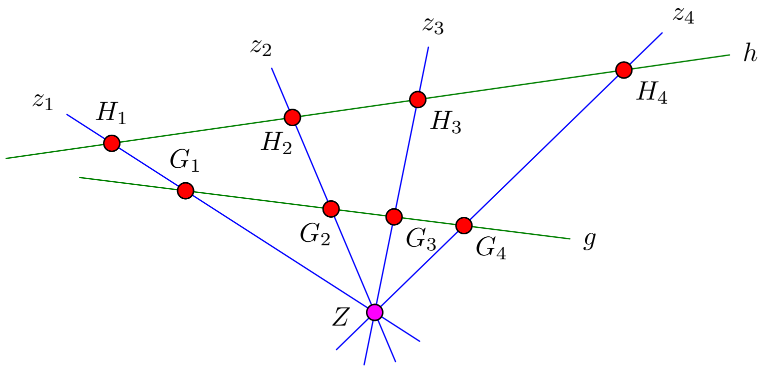
a) Fertigen Sie eine Skizze zu diesem Satz an.

b) Dualisieren Sie diesen Satz.

c) Beweisen Sie diesen Satz.

Lösung:

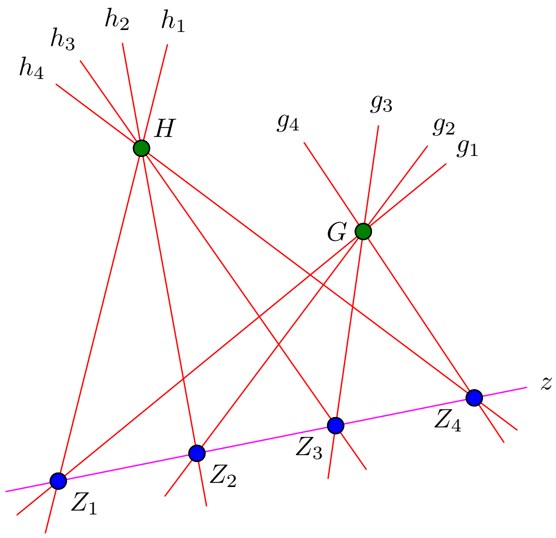
a)



b) *Gegeben seien zwei verschiedene Punkte G und H in der reellen projektiven Ebene $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ und eine Gerade z, die weder durch G noch durch H gehe. Dann gilt: paarweise verschiedene Punkte Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 auf der Geraden z haben je vier Verbindungsgeraden g_1, g_2, g_3, g_4 bzw. h_1, h_2, h_3, h_4 zu den beiden Punkten G bzw. H, und für die Doppelverhältnisse der Geraden $(g_1, g_2; g_3, g_4)$ und $(h_1, h_2; h_3, h_4)$ gilt:*

$$(g_1, g_2; g_3, g_4) = (h_1, h_2; h_3, h_4)$$

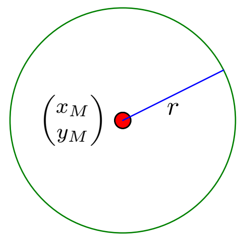
Skizze:



c) Die Punkte H_1, H_2, H_3, H_4 gehen aus den Punkten G_1, G_2, G_3, G_4 durch Zentralprojektion der Geraden g auf die Gerade h mit Zentrum Z hervor. Die Zentralprojektion einer Geraden auf eine andere Gerade ist eine projektive Abbildung. Das Doppelverhältnis ist invariant unter projektiven Abbildungen.

Aufgabe 3. Kreis als Quadrik.

Berechnen Sie die symmetrische Matrix in $\mathbb{R}^{3\times3}$, die einen Kreis mit Mittelpunkt $(x_M, y_M)^T$ und Radius r als Quadrik beschreibt.



Lösung:

Man kann einfach die klassiche Definition eines Kreises als Gleichung aufschreiben und durch Komponentenvergleich die entsprechenden Einträge der Matrix ermitteln:

$$\begin{aligned}
\|P-M\| &= r \\
r^2 = \|P-M\|^2 &= (x-x_M)^2 + (y-y_M)^2 \\
0 = (x-x_M)^2 + (y-y_M)^2 - r^2 &= x^2 - 2xx_M + x_M^2 + y^2 - 2yy_M + y_M^2 - r^2 \\
0 &= \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_M \\ 0 & 1 & -y_M \\ -x_M & -y_M & x_M^2 + y_M^2 - r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4. Sechs Punkte auf einem Kegelschnitt.

Es seien fünf Punkte $P_1, \ldots, P_5$ im $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ gegeben. Sie bestimmen im Allgemeinen einen Kegelschnitt

$$C = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \mid a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot z^2 + d \cdot xy + e \cdot yz + f \cdot xz = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass ein Punkt P_6 genau dann auf C liegt, wenn

$$\det \begin{pmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & x_1y_1 & y_1z_1 & x_1z_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & x_2y_2 & y_2z_2 & x_2z_2 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & x_3y_3 & y_3z_3 & x_3z_3 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & x_4y_4 & y_4z_4 & x_4z_4 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & x_5y_5 & y_5z_5 & x_5z_5 \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & x_6y_6 & y_6z_6 & x_6z_6 \end{pmatrix} = 0$$

Lösung:

Es gibt verschiedene Herangehensweisen, wie man sich den Sachverhalt dieser Aufgabe vorstellen kann.

Unterraum: Wenn die fünf Punkte $1, \ldots, 5$ einen eindeutigen Kegelschnitt $C = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 : a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot z^2 + d \cdot xy + e \cdot yz + f \cdot xz = 0\}$ definieren, so muss der Vektor (a,b,c,d,e,f) vom Nullvektor verschieden und bis auf skalare Vielfache eindeutig definiert sein durch die Bedingungen

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_i^2 \\ y_i^2 \\ z_i^2 \\ x_iy_i \\ y_iz_i \\ x_iz_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \qquad (*)$$

für $i = 1, \ldots, 5$. Dies bedeutet, dass die Vektoren $v_i = (x_i^2, y_i^2, z_i^2, x_iy_i, y_iz_i, x_iz_i)$ für $i = 1, \ldots, 5$ linear unabhängig sein müssen. Sie spannen eine linearen Unterraum des $\mathbb{R}^6$ mit Kodimension 1, also Dimension 5 auf.

Für einen sechsten Punkt muss die Gleichung $(*)$ ebenfalls gelten. Also muss v_6 im linearen Spann der $v_1, \ldots, v_5$ liegen, was gleichbedeutend mit $\det(v_1, \ldots, v_6) = 0$ ist.

Gleichungssystem: Das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & x_1y_1 & y_1z_1 & x_1z_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & x_2y_2 & y_2z_2 & x_2z_2 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & x_3y_3 & y_3z_3 & x_3z_3 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & x_4y_4 & y_4z_4 & x_4z_4 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & x_5y_5 & y_5z_5 & x_5z_5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

kann verwendet werden, um den Parametervektor $(a,b,c,d,e,f)^T$ aus fünf gegebenen Punkten zu bestimmen. Dieses Gleichungssystem bestimmt genau dann einen Kegelschnitt eindeutig, wenn der Parametervektor bis auf skalare Vielfache eindeutig bestimmt ist. Diesen eindimensionalen Lösungsraum erhält man genau dann, wenn die Matrix vollen Rang hat und die Zeilen daher linear unabhängig sind.

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & x_1y_1 & y_1z_1 & x_1z_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & x_2y_2 & y_2z_2 & x_2z_2 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & x_3y_3 & y_3z_3 & x_3z_3 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & x_4y_4 & y_4z_4 & x_4z_4 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & x_5y_5 & y_5z_5 & x_5z_5 \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & x_6y_6 & y_6z_6 & x_6z_6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kommt ein sechster Punkt dazu, gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder die neue Zeile ist linear abhängig von den anderen Zeilen. Dann hat die Matrix nach wie vor Rang 5 und der Lösungsraum Dimension 1. Die sechste Zeile ist von den 5 Zeilen darüber linear abhängig, und die Determinante ist 0. Das Gleichungssystem ist nicht eindeutig lösbar, da skalare Vielfache ja immernoch möglich sind.

Im anderen Fall ist die neue Zeile linear unabhängig von den anderen Zeilen. Dann hat die Matrix Rang 6, und eine von 0 verschiedene Determinante. In diesem Fall ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar, aber die einzige Lösung ist der Nullvektor, der keinen Kegelschnitt beschreibt, da die Gleichung $0 = 0$ von jedem Punkt erfüllt wird.

Daher ist die Determinante genau dann 0, wenn der sechste Punkt den Lösungsraum nicht verändert und sich somit auf dem von den anderen fünf Punkten definierten Kegelschnitt befindet.

Level 2

Aufgabe 5. Kegelschnitte und Tangenten.

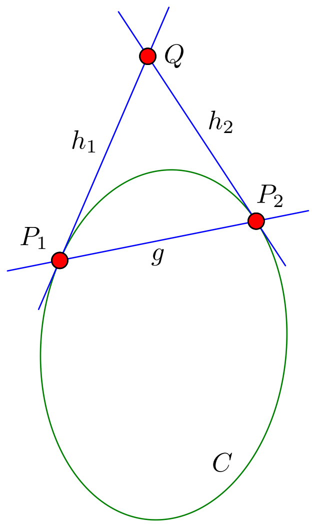
Gegeben sei ein nicht degenerierter Kegelschnitt C, der durch eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ beschrieben wird:

$$C = \left\{ p \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \,\middle|\, p^T \cdot A \cdot p = 0 \right\}$$

a) Zeigen Sie, dass $h = A \cdot p$ die Tangente an einen Punkt p auf C ist.

b) Finden Sie zu einer Tangente h an C, deren homogene Koordinaten gegeben seien, den Berührpunkt p.

c) Betrachten Sie nebenstehende Konstruktion. Gegeben sei der Kegelschnitt C sowie ein Punkt Q. Die **Polare** g von Q bezüglich C lässt sich wie abgebildet definieren: Man legt von Q aus die Tangenten h_1 und h_2 an C, bestimmt die Berührpunkte P_1 und P_2 und verbindet diese um g zu erhalten. Entwickeln Sie eine möglichst einfache, geschlossene Formel, um die Polare aus C und Q zu berechnen.



LÖSUNG:

a) Wir zeigen die Behauptung für nicht degenerierte Kegelschnitte in zwei Schritten. Zuerst zeigen wir, dass p auf h liegt und in einem zweiten Schritt zeigen wir noch, dass p der einzige Punkt ist, der sowohl auf h als auch auf C liegt.

p liegt auf h: Da p auf C liegt, gilt $0 = p^T \cdot A \cdot p = \langle p, Ap\rangle = \langle p, h\rangle$. Daher liegt p auch auf h.

p ist einziger gemeinsamer Punkt: Angenommen es gäbe einen weiteren Punkt q, der von p verschieden ist, d.h. $q \neq \alpha p$, und der gleichzeitig auf C und h liegt, d.h. $q^T Aq = 0$ und $\langle q, h\rangle = q^T Ap = 0$.
Aus $p^T Ap = 0$ und $q^T Ap = 0$ folgt

$$(\lambda p + \mu q)^T Ap = 0 \qquad \text{für alle } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Aus $q^T Aq = 0$ und $q^T Ap = 0$ folgt

$$q^T A(\lambda p + \mu q) = (\lambda p + \mu q)^T Aq = 0 \qquad \text{für alle } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

wobei wir ausnutzen, dass $A^T = A$ ist. Diese beiden Folgerungen ergeben zusammen

$$(\lambda p + \mu q)^T A(\lambda p + \mu q) = 0 \qquad \text{für alle } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

was bedeutet, dass der Kegelschnitt C die Gerade $p \vee q = h$ enthält und daher degeneriert ist.

b) Unter Benutzung von $h = Ap$ aus Teilaufgabe a) folgern wir für den Berührpunkt p einer Tangenten h an den Kegelschnitt C:

$$p = A^{-1}h$$

Die Matrix A ist invertierbar, da der Kegelschnitt nicht degeneriert ist, also eine von 0 verschiedene Determinante hat.

c) Der Punkt Q liegt auf den beiden Tangenten h_1 und h_2. Nach Aufgabenteil a) gilt $h_1 = AP_1$ und damit

$$0 = \langle Q, h_1\rangle = \langle Q, AP_1\rangle = Q^T AP_1 = Q^T A^T P_1 = (AQ)^T P_1 = \langle AQ, P_1\rangle$$

Analog gilt $0 = \langle Q, h_2\rangle = \langle AQ, P_2\rangle$. Also ist AQ eine Gerade, die durch die beiden Punkte P_1 und P_2 geht. Das ist aber gerade die Gerade g. Daher ist

$$g = AQ.$$

Aufgabe 6. Mengen in $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$.

In den einzelnen Teilaufgaben sind Punktmengen in $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ angegeben.

- Zeichnen Sie diese (soweit möglich) in das unten abgebildete Koordinatensystem ein, und beschriften Sie diese deutlich.
- Wenn eine Menge aus endlich vielen Punkten besteht, so geben Sie diese zusätzlich explizit als Aufzählung mithilfe von (homogenen) Koordinatenvektoren an.
- Sie müssen Ihre Ergebnisse nicht begründen.

a) $$A = \left\{ P \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \;\middle|\; p^T \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 0 \text{ für alle Repräsentanten } p \text{ des Punktes } P \right\} \subseteq \mathbb{C}\mathrm{P}^1$$

b) $$B = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix}2+2i\\-1\end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \right\} \subseteq \mathbb{C}\mathrm{P}^1$$

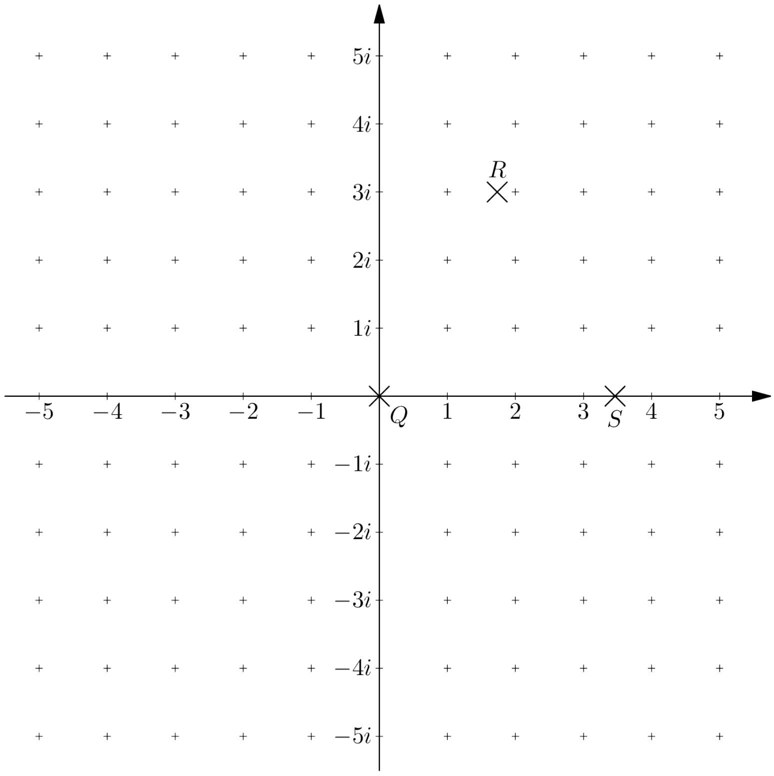
c) $$C = \left\{ P \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \;\middle|\; \left(P, \begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{C}\mathrm{P}^1$$

d) $$D = \left\{ P \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \mid (P, Q; R, S) = (P, R; S, Q) \right\} \subseteq \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \qquad \text{mit } Q = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix}\sqrt{3}+3i\\1\end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix}2\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$$

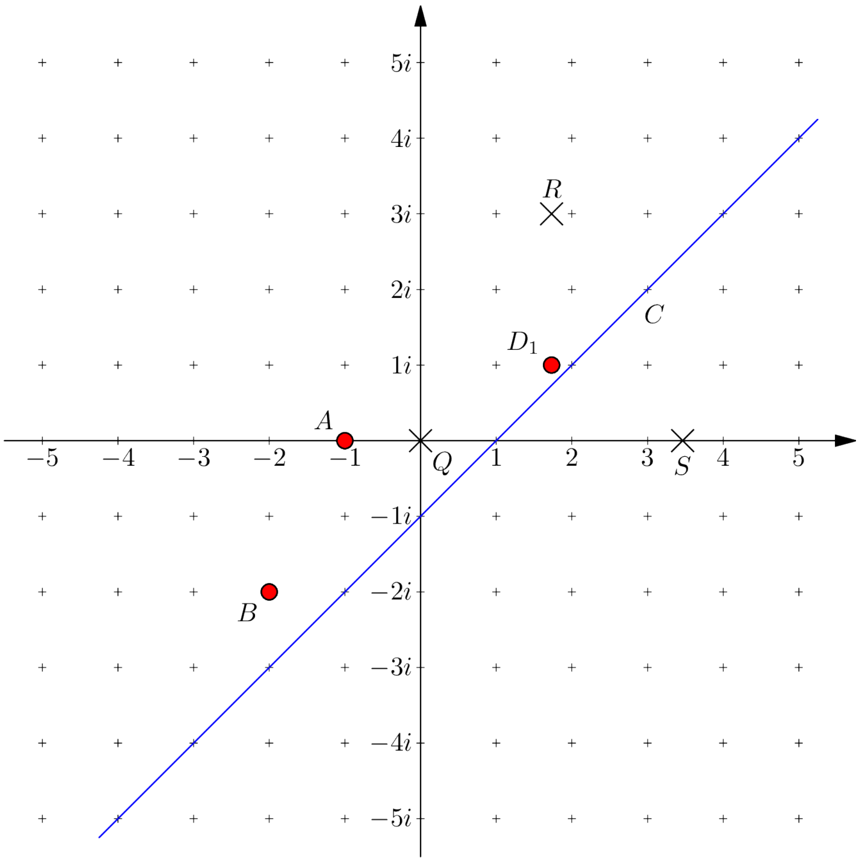
Die Punkte Q bis S sind bereits in das Koordinatensystem eingezeichnet. Sie bilden ein gleichseitiges Dreieck.

Hinweise:

- Das Koordinatensystem stellt die Standardeinbettung von $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ dar, also mit $y = 1$.
- $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ Bezeichnet in den Formeln dieser Aufgabe die *Menge aller Punkte* der komplexen projektiven Gerade.



<u>Lösung:</u>



a) Für einen einzelnen Repräsentanten gilt:

$$(x, y) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x + y = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = -y \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x}{y} = -1$$

Alle Repräsentanten, die diese Gleichung erfüllen, gehören zur gleichen Äquivalenzklasse. Ihr Standard-Repräsentant ist $(-1, 1)^T$.

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Hier ist sofort ersichtlich, dass alle Vektoren der gleichen Äquivalenzklasse zuzurechnen sind. Den Standard-Repräsentanten erhält man für $\lambda = -1$.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -2 - 2i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

c) Ein reelles Doppelverhältnis zeigt an, dass vier Punkte kozirkular sind. Einer dieser vier Punkte ist der Fernpunkt, so dass der Kreis zu einer Geraden wird, und die anderen drei Punkte kollinear sein müssen. Es handelt sich also um eine Gerade. Diese verläuft durch die beiden endlichen Punkte, die inhomogen als 1 und $-i$ zu bezeichnen sind.

Streng genommen handelt es sich um eine affine Gerade, also um eine projektive Gerade, bei der ein einzelner Punkt fehlt. Dies liegt daran, dass der Wert ∞, der auftritt, wenn erster und letzter Punkt des Doppelverhältnisses identisch sind, nicht in $\mathbb{R}$ enthalten ist. Da der letzte Punkt jedoch genau der Fernpunkt ist, sind alle endlichen Punkte auf der Gerade auch tatsächlich Elemente der Menge. Man muss die Menge daher nicht punktiert einzeichnen.

d) Der Hinweis mit dem gleichseitigen Dreieck legt eine Betrachtung der Symmetrie nahe. Eine Art, die Formel zu lesen, ist die folgende: P ist ein Punkt, dessen Doppelverhältnis bezüglich Q, R, S sich nicht ändert, wenn man letztere zyklisch vertauscht. In eine projektive Transformation übersetzt bedeutet die zyklische Vertauschung eine Drehung des Dreiecks um seinen Mittelpunkt, da eine projektive Transformation in $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ durch drei Punkte und deren Bilder eindeutig definiert wird, und eine Drehung eine projektive Transformation ist. Das Doppelverhältnis des Punktes P ändert sich unter dieser Transformation nicht. Da ein Punkt durch sein Doppelverhältnis bezüglich drei anderen Punkten bereits eindeutig beschrieben ist, bedeutet dies, dass der Punkt P selbst sich unter der Drehung nicht ändert, also ein Fixpunkt der Drehung ist.

Ein Fixpunkt ist offensichtlich der Mittelpunkt des Dreiecks. Aber da eine projektive Transformation in $\mathbb{C}P^1$ als 2×2-Matrix und ein Fixpunkt als Eigenvektor dieser Matrix dargestellt wird, ist mit zwei Fixpunkten zu rechnen. Der zweite Fixpunkt ist der Fernpunkt, da eine Drehung Geraden wieder auf Geraden abbildet, und daher den Schnittpunkt aller Geraden fix lassen muss.

Den Dreiecksmittelpunkt in das Koordinatensystem einzuzeichnen geht mit einem Geodreieck recht einfach. Seine Koordinaten kann man auf verschiedene Arten bestimmen. Wenn man weiß, dass sich die Höhen im gleichseitigen Dreieck im Verhältnis $1:2$ schneiden, kann man den Realteil von R übernehmen und den Imaginärteil von R dritteln. Oder man addiert die Standard-Repräsentanten der vier Eckpunkte, um den Mittelpunkt als Baryzentrum zu erhalten. Es gibt sicher noch viel mehr plausible Ansätze für diesen Aufgabenteil. Am Ende sollten jedoch immer diese beiden Punkte heraus kommen:

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{3} + i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Prinzipiell kann man die gesamte Aufgabe auch deutlich algebraischer angehen und „einfach“ die Gleichung nach P auflösen. Wenn man diese Gleichung inhomogen formuliert, und $y = 1$ als zweite Koordinate annimmt, verliert man bereits eine Lösung. Mit einem homogenen Ansatz $P = (x, y)^T$ erhält man, nach vielen aufwändigen Umformungen, die Gleichung

$$x \cdot y - \left(\sqrt{3} + i\right) y^2 = \left(x - \left(\sqrt{3} + i\right) y\right) y = 0$$

Aus dieser lassen sich die beiden Lösungen einigermaßen direkt ablesen. Der Umfang der erforderlichen Umformungen macht jedoch diesen Lösungsansatz für die Klausur reichlich ungeeignet.