Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Bernhard Werner

Geometriekalküle WS 2018/19

www-m10.ma.tum.de/GeometrieKalkueleWS1819

Lösungen zu Aufgabenblatt 4 (2018–12–03)

Level 0

Aufgabe 1. Grundlagen.

(a) Beweisen Sie, dass eine projektive Transformation im $\mathbb{RP}^2$ eingeschränkt auf eine Fixgerade eine projektive Transformation des $\mathbb{RP}^1$ ist.

(b) Was bedeutet es für eine Funktion $f : \mathcal{P}_{\mathbb{R}}^k \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, für ein $k \in \mathbb{N}^+$, projektiv invariant zu sein?

(c) Ist der Term, bestehend aus Punkten der reellen projektiven Ebene,

$$\frac{[A, B, C] \cdot [B, C, D]}{[C, D, E]^3}$$

projektiv invariant?

(d) Wiederholen Sie, wie man ein Schachbrett projektiv richtig zeichnet. Erklären Sie, was das mit der harmonischen-Lage-Konstruktion aus der Vorlesung zu tun hat.

LÖSUNG:

(a) Seien X, Y zwei Repräsentanten von verschiedenen Punkten auf der Gerade. Jeder Punkt $[P]$ auf der Gerade kann also als $[P] = [\lambda X + \mu Y]$ geschrieben werden. Sei M die projektive Transformation.

Der Bildpunkt von $[P]$ ist $[MP] = [\lambda \cdot MX + \mu \cdot MY]$. Diesen können wir aber auch als $[MP] = [\lambda' X + \mu' Y]$ schreiben. Da X und Y und auch M fest gewählt sind, sind auch MX und MY fest. Damit kann der Übergang von $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ zu $\begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix}$ als Basiswechsel von X, Y zu MX, MY auf der Geraden gesehen werden. Und in der Vorlesung haben wir bereits gesehen, dass das eine projektive Transformation des $\mathbb{RP}^1$ ist.

(b) Als allererstes muss sie wohldefiniert sein. Das heißt, sie muss unabhängig von der Wahl der Repräsentanten sein. (Falls sie explizit von den Repräsentanten der Punkte abhängt...)

Dann muss sie invariant unter der Anwendung einer beliebigen projektiven Transformation M sein. Also,

$$f(MP_1, ..., MP_k) = f(P_1, ..., P_k)$$

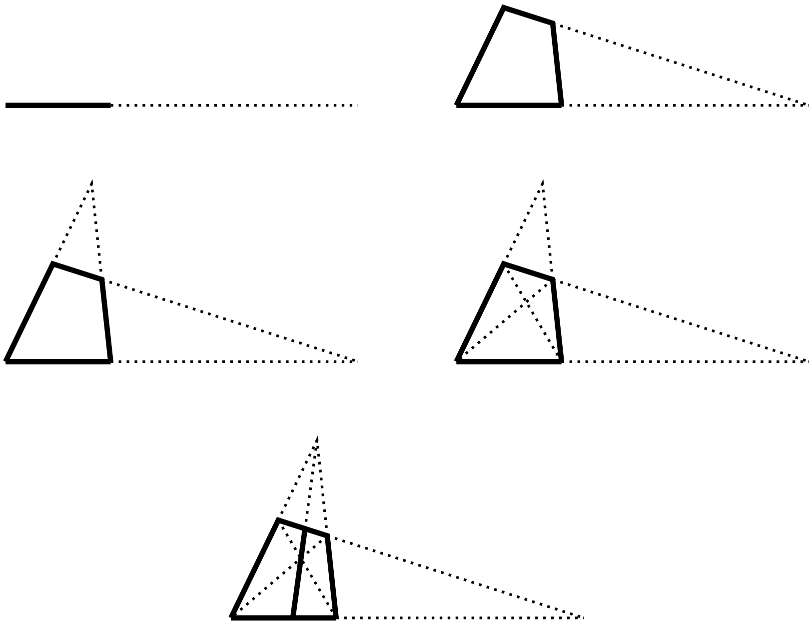
für alle Punkte $P_1, ..., P_k \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}$.

(c) Dieser Ausdruck ist nicht unabhängig von der Wahl der Repräsentanten. Ersetzen wir zum Beispiel A durch λA mit $\lambda \neq 1$, dann ver-λ-facht sich der gesamte Term.

Der Ausdruck ist auch nicht invariant unter projektiven Transformationen. Wenden wird eine Transformation M an, wird der Zähler mit $\det(M)^2$ und der Nenner mit $\det(M)^3$ multipliziert. Der Term ver-$\frac{1}{\det}$-facht sich also. Und da wir zu jeder Transformation einen Repräsentaten mit $\det(M) \neq 1$ finden, bleibt der Term nicht gleich.

(d) Wenn wir ein Schachbrett vierteln, zeichnen wir die Fernpunkte der parallelen Seiten ein und den Diagonalenschnittpunkt. Dann verbinden wir die Fernpunkte mit diesem Schnittpunkt um die „Mittellinien“ zu erhalten. Lassen wir die „waagerechte“ Unterteilung weg, habem wir 1-zu-1 die harmonische-Lage-Konstruktion.

Sprich, wenn wir die Reihenfolge der harmonischen-Lage-Konstruktion abändern, können wir sie immer als Schachbrett Halbieren interpretieren. (Und das ist eine nette Eselsbrücke). Wir sehen die Strecke, die wir halbieren wollen als Unterkante eines Schachbretts und ergänzen den Rest davon beliebig.



Aufgabe 2. Plückers μ.

Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, die auf einem gemeinsamen Definitionsbereich D definiert sind, und $P \in D$ ein beliebiges Element dieses Definitionsbereichs. Geben Sie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ an, so dass die Linearkombination $\lambda f + \mu g$ der Funktionen an der Position P eine Nullstelle hat, und $(\lambda, \mu)^T \neq (0,0)^T$.

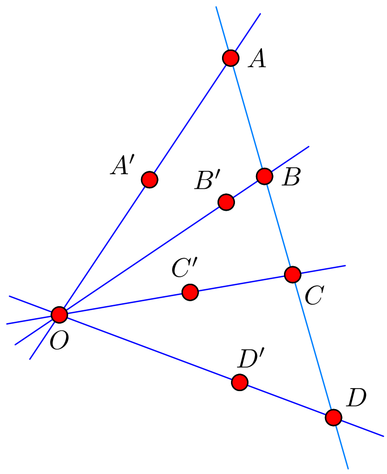
<u>Lösung:</u>

Eine mögliche Lösung ist:

$$\lambda = g(P) \qquad \mu = -f(P)$$
$$(\lambda f + \mu g)(P) = g(P) \cdot f(P) - f(P) \cdot g(P) = 0$$

Aufgabe 3. Punkte von O aus gesehen.

Gegeben seien vier paarweise verschiedene Geraden a, b, c, d in $\mathbb{RP}^2$. Alle vier Geraden schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt O.



a) Es seien A, B, C, D vier kollineare und von O verschiedene Punkte auf a, b, c, d. Beweisen Sie:

$$(A, B; C, D) = \frac{[O, A, C][O, B, D]}{[O, A, D][O, B, C]}$$

b) Es seien A', B', C', D' vier von O verschiedene Punkte auf a, b, c, d. Beweisen Sie:

$$(a, b; c, d) = \frac{[O, A', C'][O, B', D']}{[O, A', D'][O, B', C']}$$

c) Den Ausdruck auf den rechten Seiten schreiben wir als $(A, B; C, D)_O$ bzw. $(A', B'; C', D')_O$ und nennen ihn das **Doppelverhältnis von vier Punkten von einem fünften aus gesehen**. Dieser kann offensichtlich für (fast) alle Punkte im $\mathbb{RP}^2$ definiert werden. Erklären Sie, wie die Ergebnisse der obigen Teilaufgaben im Bezug auf dieses neue „allgemeinste Doppelverhältnis" interpretiert werden können.

<u>Lösung:</u>

a) Wichtig ist, sich die Definition von harmonischer Lage bewusst zu machen. Diese verwendet 2×2-Determinanten. Die darin vorkommenden Vektoren können also nicht die gleichen wie in der rechten Seite der Gleichung sein, auch wenn damit die gleichen Punkte gemeint sind. Statt dessen verwendet die Definition homogene Koordinaten auf einer Geraden. Die entsprechenden Koordinatenvektoren sollen hier mit Tilden gekennzeichnet werden. Zu zeigen ist also die rechte Äquivalenz in folgender Gleichung:

$$(A, B; C, D) := \frac{[\tilde{A}, \tilde{C}][\tilde{B}, \tilde{D}]}{[\tilde{A}, \tilde{D}][\tilde{B}, \tilde{C}]} = \frac{[O, A, C][O, B, D]}{[O, A, D][O, B, C]}$$
$$\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D} \in \mathbb{RP}^1 \qquad A, B, C, D \in \mathbb{RP}^2$$

Die Übersetzung von Koordinaten auf der Gerade in Koordinaten in der Ebene erfolgt durch Wahl einer Basis. Das Doppelverhältnis ist von der Wahl der Basis unabhängig. Es gibt unterschiedliche Ansätze, wie diese Aufgabe gelöst werden kann. Im Folgenden sollen zwei Richtungen sowie eine Mischform vorgestellt werden.

Spezielle Koordinaten: Es seien $A, B, C, D \in \mathbb{RP}^2$ kollinear. Der Ausdruck

$$\frac{[O, A, C] \cdot [O, B, D]}{[O, A, D] \cdot [O, B, C]}$$

bleibt offensichtlich invariant unter projektiven Transformationen und hängt auch nicht von der speziellen Wahl der Repräsentanten der Punkte O, A, B, C, D ab. Im Allgemeinen ist eine projektive Transformation durch vier Punkte und deren Bilder eindeutig definiert. Da von diesen vier Punkten jedoch keine drei kollinear sein dürfen, können in der vorliegenden Konstruktion nur drei (nicht kollineare) Punkte der Konfiguration durch eine projektive Transformation auf beliebige (nicht kollineare) Positionen abgebildet werden. Dadurch wird bereits die Gerade, auf der A, B, C, D liegen, eindeutig definiert. Theoretisch könnte man einen der verbleibenden Punkte auf dieser Gerade frei wählen, aber diese Freiheit ist hier unnötig.

Da eine geeignete Transformation existiert, können wir also o.B.d.A. $A = (1, 0, 0)^T$, $B = (0, 1, 0)^T$ und $O = (0, 0, 1)^T$ setzen. Bei dieser Wahl gilt, dass C und D ebenfalls Fernpunkte sind, und damit die Gestalt $C = (c_1, c_2, 0)^T$ und $D = (d_1, d_2, 0)^T$ haben. Einsetzen der Repräsentanten ergibt nun

$$\frac{[O, A, C] \cdot [O, B, D]}{[O, A, D] \cdot [O, B, C]} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & d_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & d_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}$$

Entwickelt man jede der vier Determinanten nach der ersten Spalte, ergibt sich

$$\frac{\begin{vmatrix}1 & c_1\\0 & c_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0 & d_1\\1 & d_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & d_1\\0 & d_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0 & c_1\\1 & c_2\end{vmatrix}}$$

Die Spalten der Determinanten sind jetzt gerade die 2-dimensionalen homogenen Koordinaten der Punkte A, B, C, D auf der zugehörigen Geraden bezüglich der Basis (A, B). Das sieht man beispielsweise für den Punkt C daran, dass $C = c_1A + c_2B$ für die dreielementigen Vektoren gilt, weshalb $\tilde{C} = (c_1, c_2)^T$ geeignete homogene Koordinaten auf der Geraden sind. Analog gilt:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \tilde{B} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad \tilde{C} = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} \qquad \tilde{D} = \begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix}$$

Daher entspricht der obige Bruch genau der Definition des Doppelverhältnisses $(A, B; C, D)$ unter Verwendung von homogenen Koordinaten auf einer Geraden.

$$\frac{\begin{vmatrix}1 & c_1\\0 & c_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0 & d_1\\1 & d_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & d_1\\0 & d_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0 & c_1\\1 & c_2\end{vmatrix}} = \frac{[\tilde{A}, \tilde{C}][\tilde{B}, \tilde{D}]}{[\tilde{A}, \tilde{D}][\tilde{B}, \tilde{C}]} = (A, B; C, D)$$

Kürzen der Basis: Alternativ zur speziellen Wahl einzelner Koordinaten in $\mathbb{R}^3$ kann man auch die Situation in ihrer Allgemeinheit nehmen, und sich statt dessen darauf konzentrieren, die Unabhängigkeit von der Wahl der Basis in der Berechnung wiederzufinden. Es sei also (X, Y) eine Basis auf der Geraden. X und Y sind also konkrete Repräsentanten von zwei Beliebigen Punkten auf der Geraden. Das können zwei der vorgegebenen Punkte sein, müssen aber nicht. Auf der Gerade gilt:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix}\lambda_A\\\mu_A\end{pmatrix} \qquad \tilde{B} = \begin{pmatrix}\lambda_B\\\mu_B\end{pmatrix} \qquad \tilde{C} = \begin{pmatrix}\lambda_C\\\mu_C\end{pmatrix} \qquad \tilde{D} = \begin{pmatrix}\lambda_D\\\mu_D\end{pmatrix}$$

Und in der Ebene gilt analog:

$$A = \lambda_A \cdot X + \mu_A \cdot Y \qquad B = \lambda_B \cdot X + \mu_B \cdot Y \qquad C = \lambda_C \cdot X + \mu_C \cdot Y \qquad D = \lambda_D \cdot X + \mu_D \cdot Y$$

Jetzt kann man dies in die rechte Seite der Gleichung einsetzen. Da der resultierende Ausdruck jedoch etwas lang wird, macht es Sinn, zunächst eine einzelne Determinante zu betrachten.

$$\begin{aligned}[O, A, C] &= [O, \lambda_A \cdot X + \mu_A \cdot Y, \lambda_C \cdot X + \mu_C \cdot Y] = \lambda_A\mu_C[O, X, Y] + \mu_A\lambda_C[O, Y, X]\\ &= (\lambda_A\mu_C - \mu_A\lambda_C)[O, X, Y] = \begin{vmatrix}\lambda_A & \lambda_c\\\mu_A & \mu_C\end{vmatrix}[O, X, Y] = [\tilde{A}, \tilde{C}][O, X, Y]\end{aligned}$$

Die hier verwendeten Determinantenumformungen werden in Teilaufgabe b) noch genauer besprochen. Analog lassen sich auch die anderen Determinanten umformen, so dass man am Ende die Determinante $[O, X, Y]$ aus dem Bruch kürzen kann.

$$\frac{[O, A, C][O, B, D]}{[O, A, D][O, B, C]} = \frac{[\tilde{A}, \tilde{C}][\tilde{B}, \tilde{D}][O, X, Y]^2}{[\tilde{A}, \tilde{D}][\tilde{B}, \tilde{C}][O, X, Y]^2} = \frac{[\tilde{A}, \tilde{C}][\tilde{B}, \tilde{D}]}{[\tilde{A}, \tilde{D}][\tilde{B}, \tilde{C}]} = (A, B; C, D)$$

Spezielle Basis für die Gerade: Als Mischform aus den beiden eben vorgestellten Ansätzen kann man auch die Koordinaten in der Ebene allgemein lassen, aber die Basis auf der Gerade speziell wählen. Das wäre etwa der Fall, wenn man $X = A$ und $Y = B$ annimmt, also (A, B) als Basis für die Gerade wählt. Dann haben C und D die Form $C = \lambda_CA + \mu_CB$ und $D = \lambda_DA + \mu_DB$. Damit gilt in der Ebene

$$\frac{[O, A, C] \cdot [O, B, D]}{[O, A, D] \cdot [O, B, C]} = \frac{[O, A, \lambda_CA + \mu_CB] \cdot [O, B, \lambda_DA + \mu_DB]}{[O, A, \lambda_DA + \mu_DB] \cdot [O, B, \lambda_CA + \mu_CB]} = \frac{\mu_C[O, A, B] \cdot \lambda_D[O, B, A]}{\mu_D[O, A, B] \cdot \lambda_C[O, B, A]} = \frac{\mu_C \cdot \lambda_D}{\mu_D \cdot \lambda_C}$$

und auf der Gerade

$$\frac{[\tilde{A}, \tilde{C}][\tilde{B}, \tilde{D}]}{[\tilde{A}, \tilde{D}][\tilde{B}, \tilde{C}]} = \frac{\begin{vmatrix}1 & \lambda_C\\0 & \mu_C\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0 & \lambda_D\\1 & \mu_D\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & \lambda_D\\0 & \mu_D\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0 & \lambda_C\\1 & \mu_C\end{vmatrix}} = \frac{\mu_C \cdot \lambda_D}{\mu_D \cdot \lambda_C}$$

b) Es gilt per Definition, dass $(a, b; c, d) := (A, B; C, D)$, da das Doppelverhältnis von vier Geraden gerade über das Doppelverhältnis vier kollinearer Schnittpunkte definiert ist. Unter Verwendung von Teilaufgabe a) ist daher folgendes zu zeigen:

$$\frac{[O, A, C] \cdot [O, B, D]}{[O, A, D] \cdot [O, B, C]} = \frac{[O, A', C'] \cdot [O, B', D']}{[O, A', D'] \cdot [O, B', C']}$$

Betrachten wir die Determinante $[O, A', C']$. Da der Punkt A' auf a liegt, gibt es $\lambda_a, \mu_a \in \mathbb{R}$ mit $A' = \lambda_a O + \mu_a A$. Da O verschieden von A' ist, ist außerdem $\mu_a \neq 0$. Analoges gilt für $C' = \lambda_c O + \mu_c C$. Damit kann man die Determinante vereinfachen, wobei die Multilinearität zum Aufteilen genutzt wird und Determinanten mit linear abhängigen Spalten wegfallen.

$$\begin{aligned}
[O, A', C'] &= [O, \lambda_a O + \mu_a A, \lambda_c O + \mu_c C] \\
&= [O, \lambda_a O, \lambda_c O] + [O, \lambda_a O, \mu_c C] + [O, \mu_a A, \lambda_c O] + [O, \mu_a A, \mu_c C] \\
&= \lambda_a \lambda_c \cdot [O, O, O] + \lambda_a \mu_c \cdot [O, O, C] + \mu_a \lambda_c \cdot [O, A, O] + \mu_a \mu_c \cdot [O, A, C] \\
&= \mu_a \mu_c \cdot [O, A, C]
\end{aligned}$$

Damit gilt für die gesamte Formel

$$\frac{[O, A', C'] \cdot [O, B', D']}{[O, A', D'] \cdot [O, B', C']} = \frac{\mu_a \mu_c [O, A, C] \cdot \mu_b \mu_d [O, B, D]}{\mu_a \mu_d [O, A, D] \cdot \mu_b \mu_c [O, B, C]} = \frac{[O, A, C] \cdot [O, B, D]}{[O, A, D] \cdot [O, B, C]}$$

Alternativ kann man auch folgende Überlegung anstellen: Da O verschieden von A' und somit $\mu_a \neq 0$ ist, kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Repräsentanten mit $\mu_a = 1$ wählen. Dann hat man $A' = \lambda_a O + A$. Strukturell entspricht das dem Wechsel von einer mit zwei Koordinaten parametrisierten projektiven Gerade zu einer rein affinen Gerade mit einem Parameter und eindeutigen Repräsentanten, was durch Entfernen eines einzigen Punktes (hier des Punktes O) möglich ist. In dieser Schreibweise ist direkt zu sehen dass

$$[O, A', C'] = [O, \lambda_a O + A, \lambda_c O + C] = [O, A, C]$$

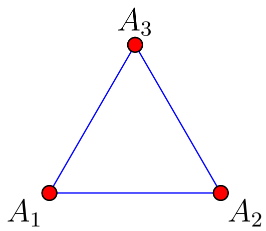
c) Die beiden Teilaufgaben besagen, dass wenn eine Situation vorliegt, in der mehrere der Doppelverhältnisse, die wir definiert haben, auftauchen können, diese auch gleich sind. Insbesondere:

Teil (a) sagt, dass für kollineare Punkte A, B, C, D das Doppelverhältnis $(A, B; C, D)_O$ unabhängig von O ist. Wir können auf vier kollineare Punkte von jedem Punkt abseits der Geraden aus hinsehen und das Doppelverhältnis ist immer gleic – und dann auch gleich dem Doppelverhältnis auf der Geraden.

Teil (b) sagt, dass das Doppelverhältnis von Geraden eine Eigenschaft von Geraden ist und nicht von Punkten auf den Geraden abhängt. Und die Referenzpunkte A, B, C, D können entlang der „Sichtlinien“ verschoben werden ohne das Doppelverhältnis zu ändern. Das passt zur Wahrnehmung von Menschen: Wenn wir einen Punkt an der Wand fixieren sehen wir eigentlich sämtliches Licht, dass aus dieser Richtung kommt. Wir nehmen allerdings nur den nächstgelegenen Punkt auf einem festen Objekt wahr. Das kann man schön beobachten, wenn man durch Nebel oder farbiges Glas blickt. Und der Effekt, der entsteht, wenn man unterschiedlich entfernte Punkte vom Augpunkt O auf eine Gerade projeziert ohne das Doppelverhältnis zu verändern, ist genau das, was beim Photographieren passiert.

Aufgabe 4. Harmonische Lage am Dreieck.

Gegeben sei ein (nicht-entartetes) Dreieck mit den Eckpunkten A_1, A_2 und A_3 im $\mathbb{RP}^2$.



a) Wählen Sie drei Punkte B_1, B_2, B_3 auf den drei Dreiecksseiten, so dass B_1 auf der Dreiecksseite A_2A_3, B_2 auf der Dreiecksseite A_1A_3 und B_3 auf der Dreiecksseite A_1A_2 liegt und sich die drei Strecken A_iB_i für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ in einem Punkt schneiden.

b) Bestimmen Sie nun drei weitere Punkte C_1, C_2, C_3 mit folgender Eigenschaft:

Für $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ liege C_i auf der Geraden durch die Punkte A_j und A_k, und die Punkte A_j, A_k, B_i, C_i sind in harmonischer Lage, d.h. $(A_j, A_k; B_i, C_i) = -1$.

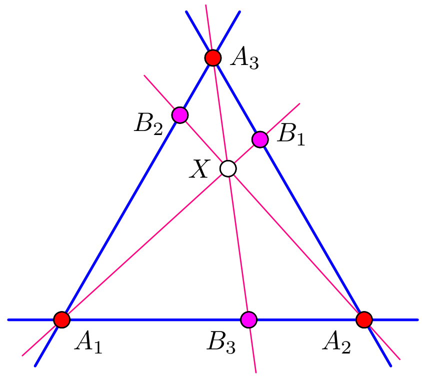
c) Zeigen Sie: Die so konstruierten Punkte C_1, C_2 und C_3 sind kollinear.

d) Interpretieren Sie die obige Konstruktion unter der Voraussetzung, dass die Punkte C_1, C_2 und C_3 Fernpunkte sind.

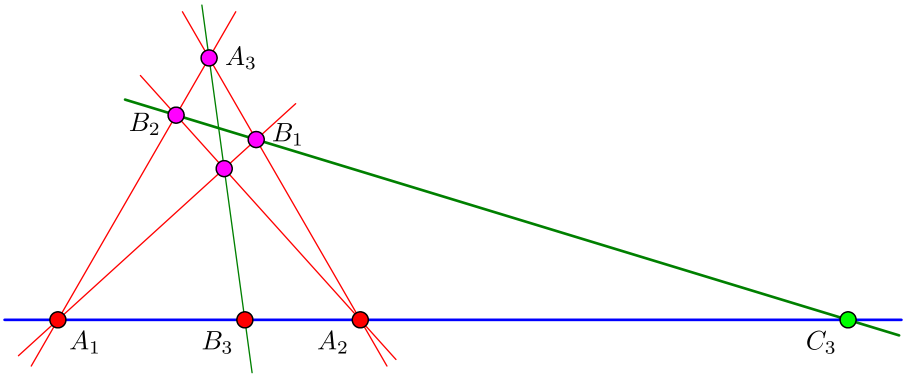
Lösung:

a) Die Punkte B_i kann man konstruieren, indem man sich den gemeinsamen Schnittpunkt X aller drei Geraden $A_i \vee B_i$ im inneren des Dreiecks beliebig wählt. B_i liegt dann auf dem Schnittpunkt von A_iX mit der A_i gegenüberliegenden Dreieckskante $A_j \vee A_k$.

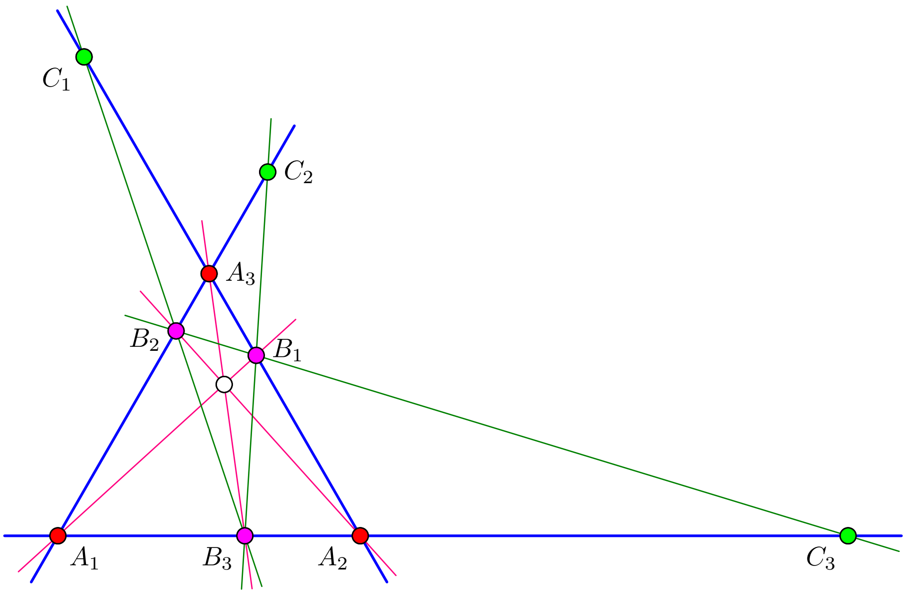
Alternativ kann man auch B_1 und B_2 beliebig auf der entsprechenden Dreieckskante wählen. Damit ist der gemeinsame Schnittpunkt festgelegt als Schnittpunkt $X = (A_1 \vee B_1) \wedge (A_2 \vee B_2)$, und damit auch $B_3 = (A_3 \vee X) \wedge (A_1 \vee A_2)$.



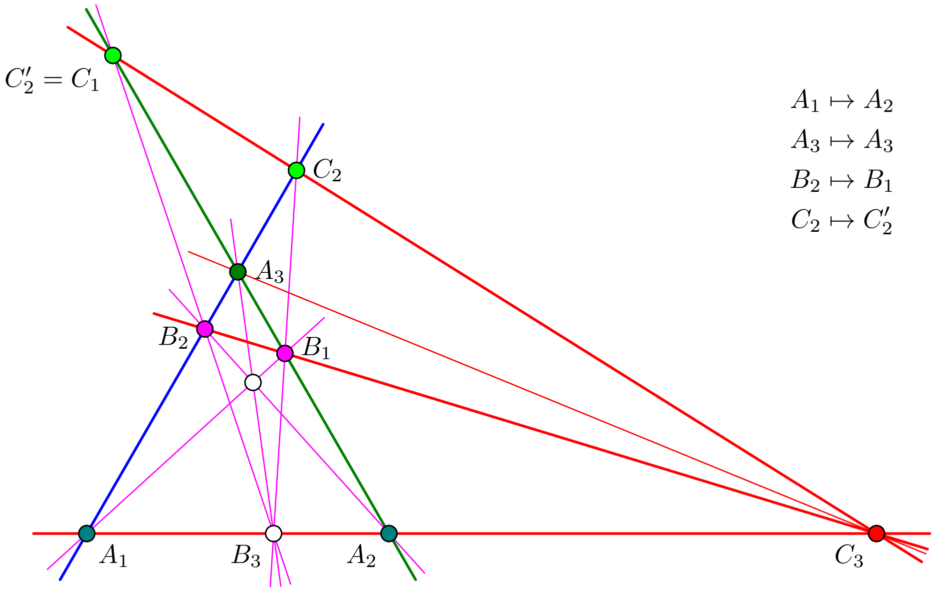
b) Die harmonischen Punkte C_i kann man direkt aus den bisher in der Konstruktion vorhandenen Punkten und Geraden ermitteln. So ergibt sich etwa der Punkt C_3 als Schnitt der Dreiecksgeraden $A_1 \vee A_2$ mit der Verbindungsgeraden $B_1 \vee B_2$.



Die beiden anderen harmonischen Punkte ergeben sich analog.



c) Betrachten wir die projektive Abbildung mit Zentrum C_3, die die (blaue) Gerade durch die Punkte A_1 und A_3 auf die (grüne) Gerade durch die Punkte A_2 und A_3 abbildet. Diese Abbildung bildet A_1 auf A_2, A_3 auf A_3 und B_2 auf B_1 ab.



Das Bild C_2' von C_2 unter dieser Abbildung liegt mit C_2 und C_3 auf einer (roten) Geraden, da es sich um eine Zentralprojektion handelt. Da die Zentralprojektion von einer Geraden auf eine andere projektiv ist und somit Doppelverhältnisse erhält, gilt $(A_2, A_3; B_1, C_2') = (A_1, A_3; B_2, C_2) = -1$. Durch dieses Doppelverhältnis ist der Punkt C_2' auf der (grünen) Geraden $A_2 \vee A_3$ bereits eindeutig festgelegt. Nach Konstruktion ist C_1 genau dieser harmonische Punkt, so dass C_1 und C_2' identisch sein müssen.

Da C_2' aufgrund der Projektion kollinear mit C_2 und C_3 ist, und aufgrund des Doppelverhältnisses identisch mit C_1 ist, muss auch C_1 kollinear mit C_2 und C_3 sein.

d) Wenn C_1, C_2, C_3 Fernpunkte sind, dann liegt B_i in der Mitte von A_j und A_k ($\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$) und es ergibt sich der Satz, dass die Seitenhalbierenden eines Dreiecks sich in einem Punkt schneiden. Dabei ist natürlich die Rolle von Voraussetzung und Schlussfolgerung gegenüber dem usrprünglichen Satz etwas verändert.

Aufgabe 5. Doppelverhältnisse permutiert.

a) Für vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 sei das Doppelverhältnis $(P_1, P_2; P_3, P_4) = \lambda$. Berechnen Sie für alle Permutationen $\pi \in S_n$ das Doppelverhältnis $(P_{\pi(1)}, P_{\pi(2)}; P_{\pi(3)}, P_{\pi(4)})$.

b) Gegeben seien drei Punkte auf einer Geraden im $\mathbb{RP}^2$. Konstruieren Sie einen vierten Punkt, so dass alle vier Punkte in harmonischer Lage sind.

Wie viele Möglichkeiten haben Sie, diesen vierten Punkt zu konstruieren?

<u>Lösung:</u>

a) Es gibt $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Möglichkeiten, wie die vier Punkte auf die vier Positionen der Formel verteilt sein können. Da das Doppelverhältnis projektiv invariant ist, und eine projektive Transformation auf der Gerade durch drei Paare von Urbild und Bild eindeutig definiert ist, kann man o.B.d.A. drei der Punkte frei wählen. Am geschicktesten wählt man diese Punkte möglichst einfach:

$$P_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad P_3 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad P_4 = \begin{pmatrix}\lambda\\1\end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich bereits das in der Angabe vorgegebene Doppelverhältnis:

$$(P_1, P_2; P_3, P_4) = \frac{[P_1, P_3][P_2, P_4]}{[P_1, P_4][P_2, P_3]} = \frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}0 & \lambda\\1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & \lambda\\0 & 1\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}} = \frac{1 \cdot (-\lambda)}{1 \cdot (-1)} = \lambda$$

Jetzt kann man entweder für alle 24 Permutationen das Doppelverhältnis wie eben ausrechnen, oder aber sich anhand der Struktur des Doppelverhältnisses überlegen, dass immer vier Permutationen den gleichen Wert ergeben müssen, und die verbleibenden 6 Möglichkeiten ausprobieren. Man erhält:

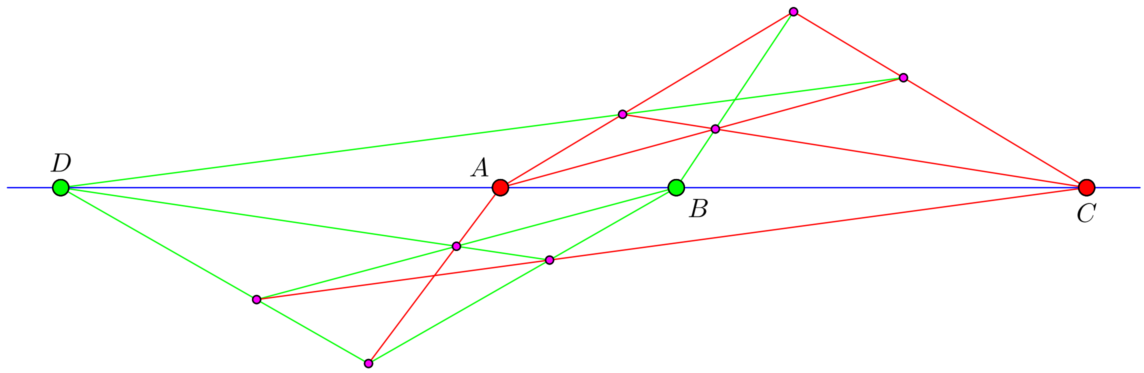
$$\begin{aligned}
(P_1, P_2; P_3, P_4) &= (P_2, P_1; P_4, P_3) = (P_4, P_3; P_2, P_1) = (P_3, P_4; P_1, P_2) = \lambda\\
(P_1, P_2; P_4, P_3) &= (P_2, P_1; P_3, P_4) = (P_3, P_4; P_2, P_1) = (P_4, P_3; P_1, P_2) = \tfrac{1}{\lambda}\\
(P_1, P_3; P_2, P_4) &= (P_3, P_1; P_4, P_2) = (P_4, P_2; P_3, P_1) = (P_2, P_4; P_1, P_3) = 1 - \lambda\\
(P_1, P_3; P_4, P_2) &= (P_3, P_1; P_2, P_4) = (P_2, P_4; P_3, P_1) = (P_4, P_2; P_1, P_3) = \tfrac{1}{1-\lambda}\\
(P_1, P_4; P_2, P_3) &= (P_4, P_1; P_3, P_2) = (P_3, P_2; P_4, P_1) = (P_2, P_3; P_1, P_4) = 1 - \tfrac{1}{\lambda}\\
(P_1, P_4; P_3, P_2) &= (P_4, P_1; P_2, P_3) = (P_2, P_3; P_4, P_1) = (P_3, P_2; P_1, P_4) = \tfrac{\lambda}{\lambda-1}
\end{aligned}$$

b) Vier Punkte A, B, C, D sind genau dann in harmonischer Lage, wenn für ihr Doppelverhältnins $\lambda = (A, B; C, D) = -1$ gilt. Somit nimmt das Doppelverhältnis bei Permutation von vier Punkten in harmonischer Lage nur noch drei verschiedene Werte an:

$$\begin{array}{ccccc}
\lambda & = & \frac{1}{\lambda} & = & -1\\
1-\lambda & = & 1-\frac{1}{\lambda} & = & 2\\
\frac{1}{1-\lambda} & = & \frac{\lambda}{\lambda-1} & = & \frac{1}{2}
\end{array}$$

Es gibt also drei verschiedene Möglichkeiten, einen vierten Punkt einzuzeichnen, so dass sich die vier Punkte in harmonischer Lage befinden. Für jede dieser drei Möglichkeiten gibt es dann entsprechend acht verschiedene Möglichkeiten, die Punkte mit A, B, C, D zu bezeichnen.

Andere Überlegung: Die harmonische Lage ist nur bezüglich der Menge $\{\{A, B\}, \{C, D\}\}$ bestimmt. Die Reihenfolge in den einzelnen Mengen ändert nichts an der harmonischen Lage. Das entspricht den 8 Permutationen zu λ und $\frac{1}{\lambda}$ in Teilaufgabe a). Es ergibt also Sinn, von der harmonischen Lage von einem Punktepaar zu einem anderen zu sprechen. Auch bei der Konstruktion ist es egal, welches Punktepaar mit den Diagonalen des Hilfsvierecks assoziiert wird, und welches mit den Schnittpunkten gegenüberliegender Kanten, wie in der nächsten Abbildung illustriert.



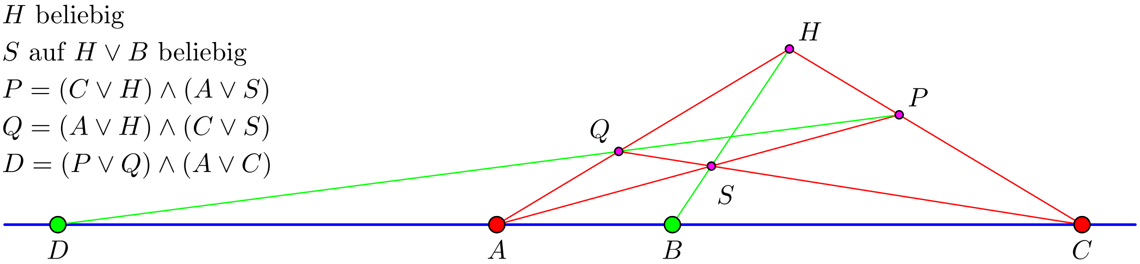
Es gibt 3 verschiedene Möglichkeiten, die drei vorgegebenen Punkte in ein Punktepaar und einen einzelnen Punkt aufzugliedern. Der zu dem einzelnen Punkt passende harmonische Partner ist damit eindeutig festgelegt.

Die drei Möglichkeiten, einen vierten Punkt harmonisch zu den drei vorhandenen Punkten zu konstruieren, sehen wie folgt aus. Dabei nehmen wir an, dass A, B, C in dieser Reihenfolge auf der Gerade liegen, und der Punkt D harmonisch zu den anderen konstruiert werden soll.

$\boldsymbol{(A, C; B, D) = -1}$**:** Punkt D „außerhalb“ der drei vorgegebenen Punkte.

Konstruktion:

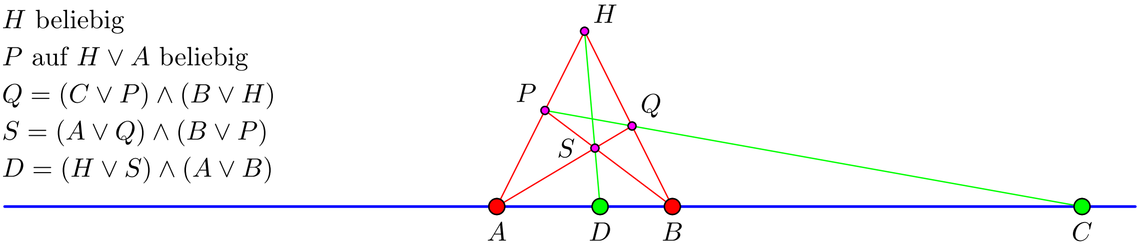
1. H beliebig
2. S auf $H \vee B$ beliebig
3. $P = (C \vee H) \wedge (A \vee S)$
4. $Q = (A \vee H) \wedge (C \vee S)$
5. $D = (P \vee Q) \wedge (A \vee C)$



$(A, B; C, D) = -1$: Punkt D zwischen den „vorderen“ beiden Punkten.

Konstruktion:

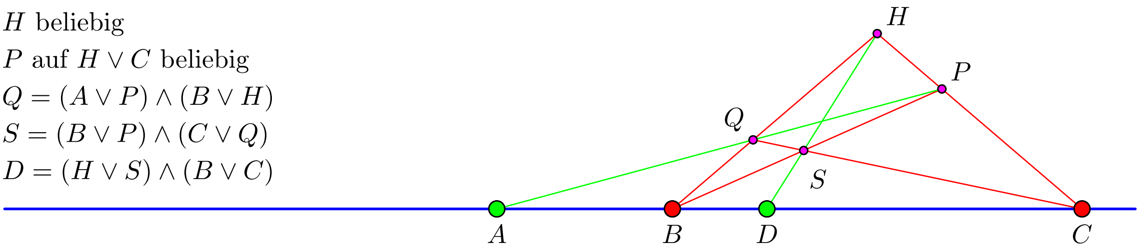
1. H beliebig
2. P auf $H \vee A$ beliebig
3. $Q = (C \vee P) \wedge (B \vee H)$
4. $S = (A \vee Q) \wedge (B \vee P)$
5. $D = (H \vee S) \wedge (A \vee B)$



$(B, C; A, D) = -1$: Punkt D zwischen den „hinteren“ beiden Punkten.

Konstruktion:

1. H beliebig
2. P auf $H \vee C$ beliebig
3. $Q = (A \vee P) \wedge (B \vee H)$
4. $S = (B \vee P) \wedge (C \vee Q)$
5. $D = (H \vee S) \wedge (B \vee C)$

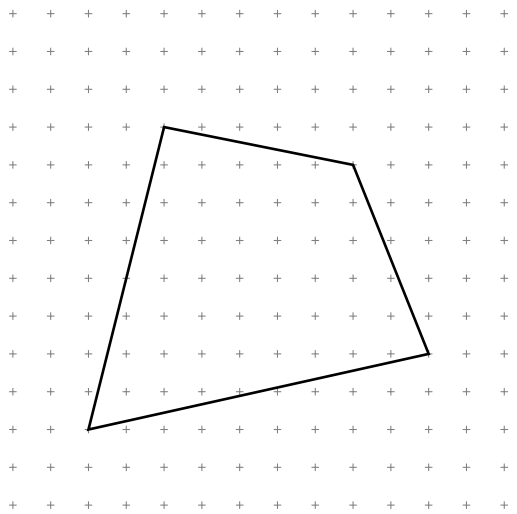


Die drei Alternativen entsprechen auch den drei Abschnitten, in die die projektive Gerade durch die drei vorgegebenen Punkte aufgeteilt wird.

Aufgabe 6. Projektive Skalen.

Gegeben sei die folgende (unvollständige) Photographie vom Umriss eines Tic-Tac-Toe-Spielfeldes mit 3×3 quadratischen Feldern. Zeichnen Sie die Felder *perspektivisch richtig* ein. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen, und lassen Sie eventuelle Hilfskonstruktionen erkennbar.

Es gibt mindestens vier verschiedene Lösungswege für diese Aufgabe. Finden Sie so viele wie möglich.



LÖSUNG:

Kern der Aufgabenstellung ist natürlich die Frage, wie man eine projektive Dreiteilung einer Geraden hinbekommt, um das Brett perspektivisch richtig zu unterteilen. Auf eine Gerade reduziert lautet daher das Problem:

Gegeben drei Punkte, die eine projektive Skala auf der Geraden definieren, und die bezüglich einer geeigneten Basis die folgenden homogenen Koordinaten auf der Geraden haben sollen:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P_\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

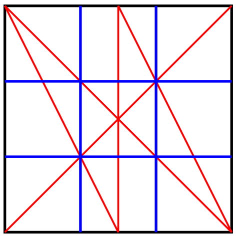
Gesucht wird eine Möglichkeit, die Punkte P_1 und P_2 zu konstruieren, die die Strecke P_0P_3 in drei perspektivisch gleich große Stücke teilen. Die Punkte sind durch ihr Doppelverhältnis eindeutig definiert: $(P_0, P_\infty; P_3, P_1) = 3$.

Wie in der Aufgabenstellung angekündigt, gibt es mehrere Lösungswege zu dieser Aufgabe, von denen einige im Folgenden dargestellt werden sollen. Manche beschränken sich dabei nur auf das Unterteilen einer Seite; manche nutzen das gesamte Spielfeld. Manche sind für andere Unterteilungen anwendbar; manche funktionieren nur zum Dritteln.

Inzidenzgeometrisch

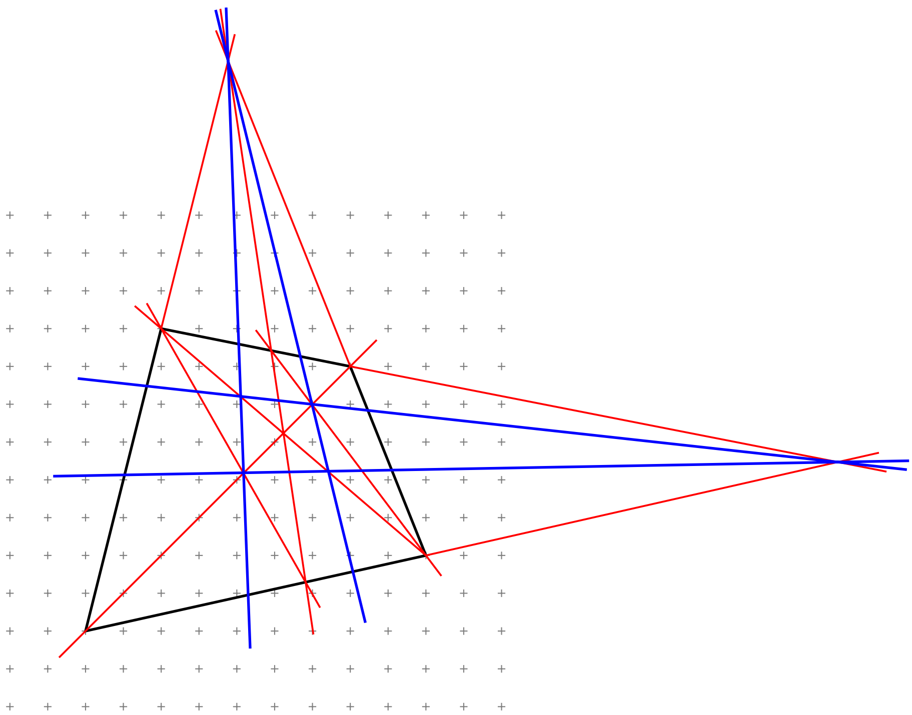
Es gibt folgenden Satz zur Konstruktion der Drittelung eines Quadrats:

Verbindet man Seitenmittelpunkte mit gegenüberliegen Ecken und schneidet diese Verbindungsgeraden mit den Diagonalen, so dritteln die Seitenparallelen durch diese Schnittpunkte das Quadrat.



Da wir wissen, wie man Mittelpunkte in einem Quadrat perspektivisch einzeichnet, und da der Rest des Satzes rein inzidenzgeometrisch, können wir das leicht auf den projektiven Fall übertragen. Wir müssen nur den Begriff „parallel“ durch „schneiden sich auf der Ferngerade“ ersetzen.

1. Einzeichnen der Diagonalen.
2. Einzeichnen der Fernpunkte und einer Seitenhalbierenden.
3. Verbinden der Seitenmittelpunkte mit jeweils einer gegenüberliegender Ecke.
4. Schneiden dieser Verbindungsgerade mit den Diagonalen.
5. Verbinden dier Schnittpunkte mit den Fernpunkten.



Diese Konstruktion funktioniert in dieser Form nur zum Dritteln. Natürlich gibt es zu beliebig vielen Unterteilungen einen Inzidenzsatz, der diese konstruiert. Allerdings ist es nicht möglich zu einer gewünschten Unterteilung einfach so eine inzidenzgeometrische Konstruktionsmethode zu finden.

Mittels Doppelverhältnissen

Wir können die Unterkante des Spielfelds so mit $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ parametrisieren, dass die Ecke links unten bei 0, die Ecke rechts unten bei 3 und der Fernpunkt bei ∞ liegt. Diese drei Punkte P_0, P_3, P_∞ stellen dann eine projektive Basis dieser Geraden dar. Wir können den Punkt zu 6 konstruieren, da 3 der Mittelpunkt von 0 und 6. Oder in projektiven Termen:

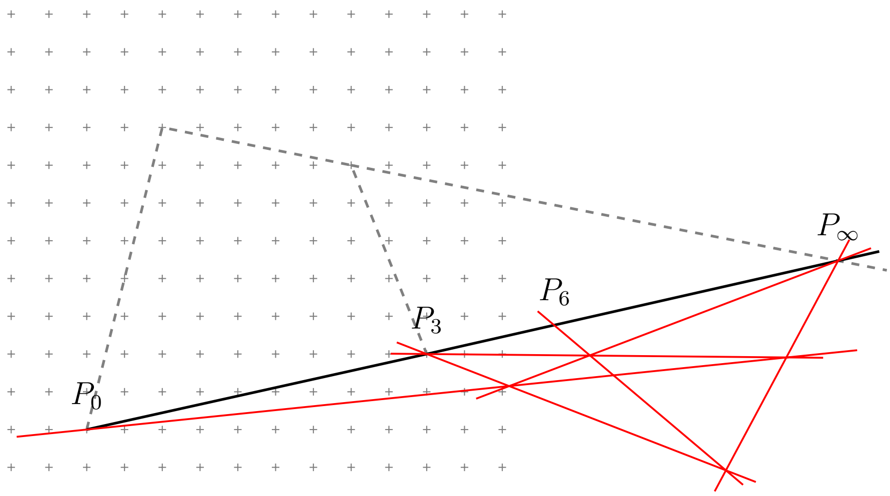
$$(P_3, P_\infty; P_6, P_0) = -1$$

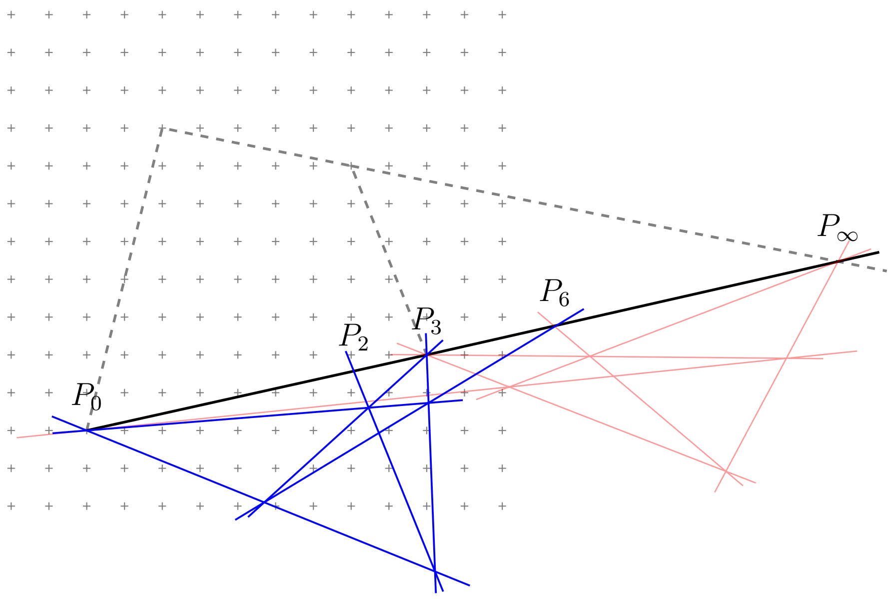
Mit einer harmonischen Lage-Konstruktion finden wir also P_6 finden. Außerdem gilt nun noch, dass

$$(P_0, P_3; P_6, P_2) = -1.$$

Und da wir alle Punkte bis auf P_2 schon haben, können wir diesen mit einer weiteren harmonischen-Lage-Konstruktion finden.

Abschließend muss noch die Strecke P_0P_2 halbiert werden – zum Beispiel mit einer dritten harmonischen-Lage-Konstruktion. Und eine der senkrechten Spielfeldkanten muss ebenfalls gedrittelt werden. Diese Schritte werden in der Zeichnung unten nicht mehr gezeigt.





Das Problem hierbei ist natürlich, dass
$$(P_0, P_3; P_6, P_2) = -1$$
zwar leicht nachzurechnen ist, aber es nicht ersichtlich ist, so eine Gleichung überhaupt zu suchen. Außerdem ist nicht sofort klar, wie eine ensprechende Gleichung für andere Unterteilung auszusehen hat oder überhaupt existiert.

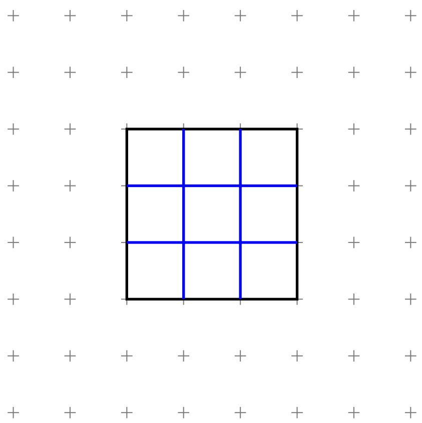
Zu beachten ist auch, dass wir den Rest des Spielfelds nur brauchen, um den Fernpunkt zu finden.

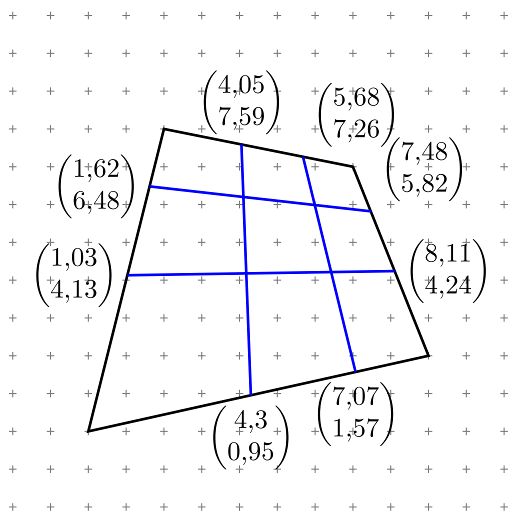
Rechnerisch

„Perspektivisch verzerren“ bedeutet für uns, eine prokjektive Transformation anzuwenden. Mithilfe des unterliegenden Gitters, kann man diese konkret ausrechnen.

In einem unverzerrten Spielfeld haben die Ecken die Koordinaten
$$A = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}.$$
Legt man in dem gegebenen Bild die linke untere Ecke ebenfalls in den Ursprung, so haben die Ecken die Koordinaten
$$A' = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix}9\\2\\1\end{pmatrix}, \quad C' = \begin{pmatrix}7\\7\\1\end{pmatrix}, \quad D' = \begin{pmatrix}2\\8\\1\end{pmatrix}.$$
Die projektive Transformation, die das erste Quadrupel auf das zweite abbildet, ist dann durch die Matrix
$$M = \begin{pmatrix}378 & 98 & 0\\ 84 & 392 & 0\\ 19 & 26 & 69\end{pmatrix}$$
gegeben. Mit ihr kann man anschließend die passenden Punkte auf den Spielfeldseiten im unverzerrten Bild transformieren, um die korrekten Punkte im verzerrten Bild zu finden.

$$M\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}189\\42\\44\end{pmatrix} \approx 88\begin{pmatrix}4{,}30\\0{,}95\\1\end{pmatrix} \qquad M\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}756\\168\\107\end{pmatrix} \approx 107\begin{pmatrix}7{,}07\\1{,}57\\1\end{pmatrix}$$
$$M\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}336\\630\\83\end{pmatrix} \approx 166\begin{pmatrix}4{,}05\\7{,}59\\1\end{pmatrix} \qquad M\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1050\\1344\\185\end{pmatrix} \approx 185\begin{pmatrix}5{,}68\\7{,}26\\1\end{pmatrix}$$
$$M\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}98\\392\\95\end{pmatrix} \approx 95\begin{pmatrix}1{,}03\\4{,}13\\1\end{pmatrix} \qquad M\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}196\\784\\121\end{pmatrix} \approx 121\begin{pmatrix}1{,}62\\6{,}48\\1\end{pmatrix}$$
$$M\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}308\\161\\38\end{pmatrix} \approx 152\begin{pmatrix}8{,}11\\4{,}24\\1\end{pmatrix} \qquad M\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}665\\518\\89\end{pmatrix} \approx 178\begin{pmatrix}7{,}48\\5{,}82\\1\end{pmatrix}$$



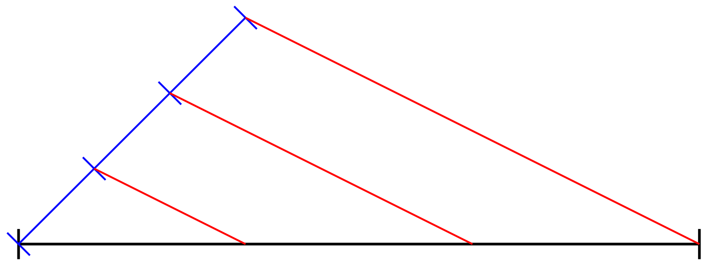


Diese Methode funktioniert natürlich immer für alles. Allerdings sind die Ergebnisse nicht ganzzahlig und deswegen relativ schwer genau einzuzeichnen.

Schulmethode projektiv verallgemeinern

Die „beste“ Methode ist, das beliebige Unterteilen einer Strecke, das man aus der Schule kennt, projektiv zu verallgemeinern. In der Schule lernt man:

1. Eine bereits unterteilte Strecke wird im Nullpunkt angesetzt.
2. Der Endpunkt der neuen Strecke wird mit dem Endpunkt der Ausgangsstrecke verbunden.
3. Die vorhanden Unterteilungen der neuen Strecke werden parallel zu dieser letzten Geraden auf die Ausgangsstrecke projeziert.



Wenn wir das projektiv verallgemeinern wollen, müssen wir sicherstellen, dass die Fernpunkte beider Strecken/Geraden aufeinander abgebildet werden. Verbinden wir diese und die beiden Endpunkte, finden wir das Projektionszentrum. Entscheidend ist dabei, dass die Anfangspunkte der Strecken bereits übereinstimmen. Eine Zentralprojektion, die drei Punkte korrekt abbildet, existiert im Allgemeinen nicht.

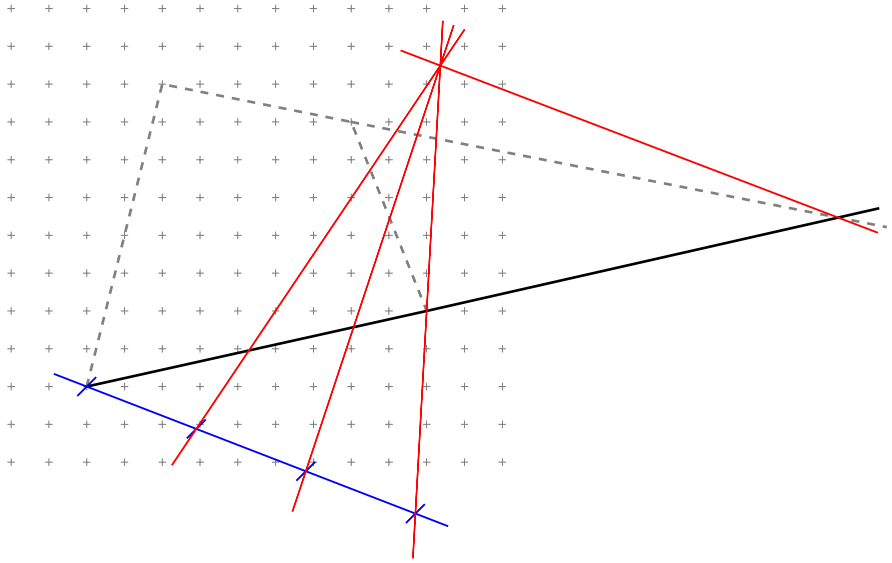
Die neue Strecke muss bereits projektiv korrekt gedrittelt sein. Das können wir über harmonische-Lage-Konstruktionen erreichen. Aber einfacher ist es, indem wir eine euklidisch gedrittelte Strecke nehmen, die wir mithilfe von einem Lineal, dem gegebenen Koordinatengitter, mit einem Zirkel, etc. konstruieren. Der Fernpunkt dieser ist dann tatsächlich im Unendlichen. Insbesondere heißt das, dass wir das Projektionszentrum finden, indem wir

1. eine Parallele zur Messstrecke durch den Fernpunkt zeichnen,
2. eine Gerade durch die Endpunkte beider Strecken zeichnen und
3. diese schneiden.

Beachten Sie, dass die Messkante von uns, mehr oder weniger, an beliebiger Stelle eingezeichnet wurde und nur dazu dient einer der Speilfeldkanten zu dritteln. Der Fernpunkt der Messkante liegt nicht auf der Ferngerade, die zum gesamten Spielfeld gehört und hat mit dieser nichts zu tun. Stellen Sie sich ein Lineal vor (oder nehmen Sie tatsächlich ein Lineal), das „von außerhalb des Blattes“ an die richtige Stelle gelegt wird als Messkante fungiert.

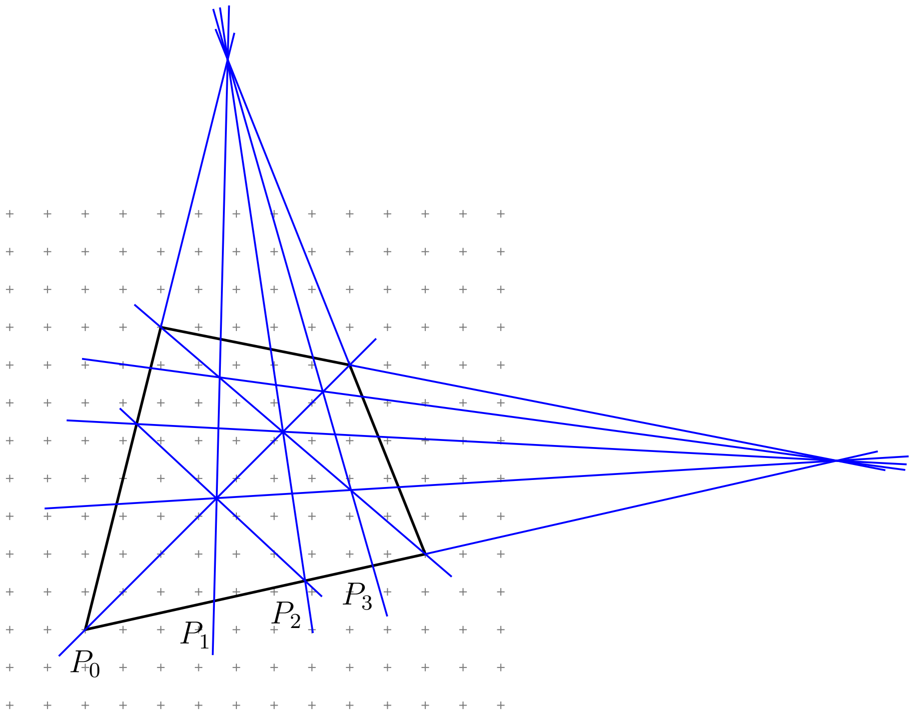
Mit dieser Methode können wir nun zum Beispiel die Unterkante des Spielfelds dritteln.

Anschließend muss noch eine der seitlichen Kanten gedrittelt werden. Wenn man geschickt anfängt, kann diesselbe Messstrecke verwendet werden wie für die Unterkante. Oder man benutzt die Unterkante als neue Messstrecke. Abschließend müssen noch die Seitendrittelpunkte mit den Fernpunkten verbunden werden. Diese Schritte werden in der Zeichnung unten nicht mehr gezeigt.

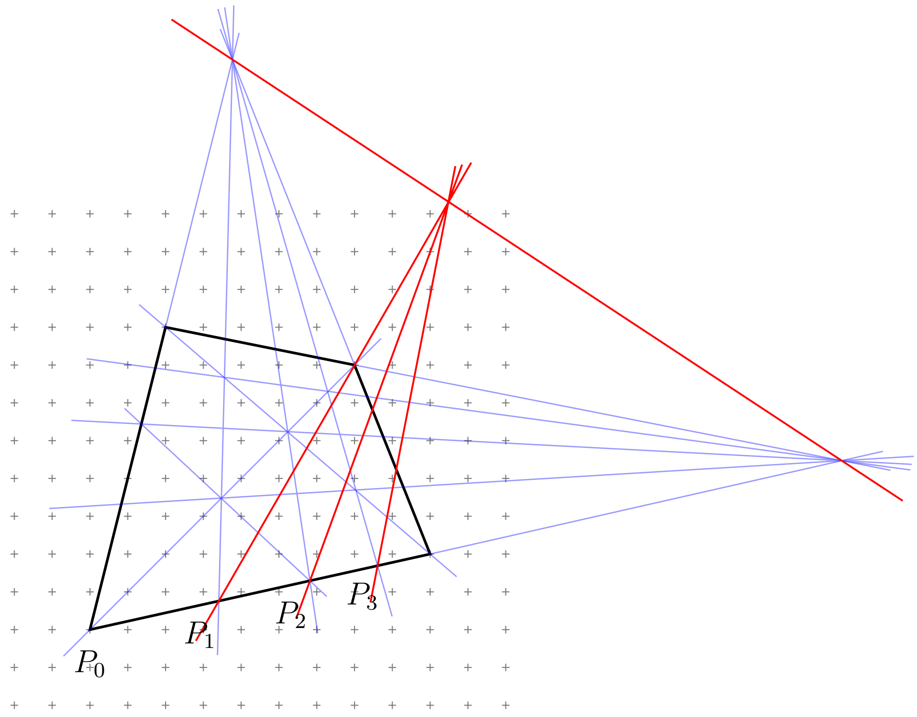


Dieses Verfahren funktioniert für beliebige Unterteilungen und wird in dieser Form auch in Kunst und Architektur verwendet. Man kann damit jede regelmäßige (oder unregelmäßige) Skala von einer Geraden auf eine andere übertragen. Der Nachteil dieser Methode liegt darin, dass das Projektionszentrum außerhalb des Blattes liegen kann. Man muss also beim Einzeichnen der Messtrecke schon vorausdenken. Und liegt die Messstrecke außerdem noch schlecht und hat den Anfangspunkt nicht mit der zu unterteilenden Strecke gemein, muss man mehrere Zentralprojektionen hintereinander ausführen.

Falls man keine Parallelen zeichnen kann oder möchte, muss man sich anders behelfen: Wir wissen bereits, wie wir das Spielfeld vierteln können.



Die neun Felder unten links bilden nun ein perspektivisch korrektes Tic-Tac-Toe-Feld. Es ist nur nicht deckungsgleich mit dem, das wir unterteilen wollen. Aber zumindest bilden die Punkte P_0, P_1, P_2, P_3 auf der Unterkante eine perspektivisch gedrittelte Strecke. Diese projezieren wir dann auf eine der Seitenkanten – wieder indem wir zuerst die zugehörigen Endpunkte und die Fernpunkte verbinden, um das Projektionszentrum zu finden.



Analog muss man anschließend noch die Seitenviertelpunkte einer Seitenkante auf die Unterkante projezieren.

Das Hauptproblem mit dieser Methode, wenn man sie auf andere Unterteilungen übertragen möchte, ist, dass man immer erst die nächst größere Zweierpotenz konstruieren muss.