Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Bernhard Werner

Geometriekalküle WS 2018/19

www-m10.ma.tum.de/GeometrieKalkueleWS1819

Lösungen zu Aufgabenblatt 3 (2018–11–19)

Level 0

Aufgabe 1. Grundlagen.

(a) Zeigen Sie, dass das repräsentantenweise Addieren von Punkten im $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, also die Verknüpfung $[P]+[Q] := [P+Q]$, nicht wohldefiniert ist.

(b) Wir können Geraden l im $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ auf zweierlei Weisen darstellen: Einmal als „abstraktes" Objekt durch die homogenen Koordinaten $(a,b,c)^T$, sprich die Gleichung $ax+by+c=0$; oder auch als konkrete Menge von Punkten

$$\{[\lambda A + \mu B] \;\mid\; (\lambda, \mu) \neq (0,0)\}$$

für passende Punktrepräsentanten A, B auf l.

- Finden Sie (mindestens) einen Vorteil jeder Darstellung gegenüber der anderen.
- Finden Sie (mindestens) zwei weitere Objekte/Strukturen in der Mathematik, die sowohl eine abstrake als auch konkrete Darstellung haben.

(c) Gibt es im $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$...

- ... eine projektive Transformation, die genau einen Fixpunkt hat?
- ... eine projektive Transformation, die genau zwei Fixpunkte hat?
- ... eine projektive Transformation, die genau drei Fixpunkte hat?
- ... eine projektive Transformation, die genau vier Fixpunkte hat?
- ... eine projektive Transformation, die unendlich viele Fixpunkte hat, aber nicht die Identität ist?

(d) Gegeben seien zwei Punktetripel A, B, C und A', B', C', die jeweils in allgemeiner Lage sind. Wie findet man eine projektive Transformation, die A auf A', B auf B', und C auf C' abbildet?

LÖSUNG:

(a) Es gilt $[2P] = [P]$. Aber, solange $[P] \neq [Q]$, gilt nicht, dass $[2P + Q] = [P + Q]$. Das kann man noch konkreter machen, wenn man Punkte $[P], [Q]$ auf, zum Beispiel, der x-Ache wählt.

(b)

- Die erste Darstellung ist nützlich, wenn man die Gerade l mit einer anderen Geraden g verarbeiten will. Also zum Beispiel, wenn man den Schnittpunkt $l \times g$ bestimmen möchte.

  Die zweite Darstellung ist nützlich, wenn man mit Aussagen der Form „Für alle Punkte auf l..." arbeitet. Oder wenn man einen Punkt auf l sucht, der irgendwelchen Bedingungen genügen soll. Insbesondere, wenn dieser Punkt in einen Determinantenausdruck eingesetzt werden soll. Da jeder solche Punkt eine Linearkombination von A und B ist, und die Determinantenfunktion multilinear ist, wird die Aussage zu einer Aussage in A und B reduziert.

- Ein Beispiel wären Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diese sind einerseits durch Funktionsterme $f(x)$ gegeben, andererseits durch ihre Graphen

$$\{(x, f(x)) \quad | \quad x \in \mathbb{R}\}.$$

  Schreibt $f(x)-y = 0$ als Bedingung für Punkte, um auf dem Graphen zu liegen, sieht man den Zusammenhang zu Geraden direkt.

  Ein anderes Beispiel sind Vektorräume. Diese existieren als abstrakte Menge und können aber immer mit einem Koordinatenvektorraum identifiziert werden: Für eine endliche Menge A ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum, der isomorph zu $\mathbb{F}_2^{|A|}$ bzw. $\mathbb{F}_2^A$ ist. (Je nachdem, was man unter „Koordinatenvektorraum" versteht...) Und für einen beliebigen Körper $K[X]$ ein K-Vektorraum, der isomorph zu $K^{\mathbb{N}}$ ist.

  Ruft man sich in Erinnerung, dass Geraden im $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ durch zwei-dimensionale Untervektorräume im $\mathbb{R}^3$ dargestellt werden, so ist die Wahl von $[A]$ und $[B]$ nichts Anderes als die Wahl einer Basis dieses Untervektorraums.

  Anders betrachtet: Die Identifizierung der Geraden l mit dem $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ via

$$[\lambda A + \mu B] \quad \mapsto \quad \left[\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}\right]$$

  ist nichts Anderes als das Identifizieren von einem abstrakten, ein-dimensionalen Vektorraum mit $\mathbb{R}^1$. Nur dass wir noch einen Punkt extra haben, der den Fernpunkt der Geraden darstellt.

(c)

- Ja, zum Besipiel Drehungen um einen Punkt.
- Ja. Kombiniert man eine Scherung parallel zur x-Achse mit einer Streckung, so bleiben nur der Ursprung und der Fernpunkt der x-Achse fest. Algebraisch nimmt man als Matrix der Transformation einfach eine Jordan-Matrix mit zwei Eigenwerten und zwei ein-dimensionalen Eigenräumen. Also z.B.

$$\begin{pmatrix} 108 & 1 & 0 \\ 0 & 108 & 0 \\ 0 & 0 & 361 \end{pmatrix}.$$

- Ja, zum Beispiel Streckungen mit unterschiedlichen Streckungsfaktoren in x- und y-Richtung. Die Fixpunkte sind dann der Ursprung und die Fernpunkte der Koordinatenachsen. Z. B.

$$\begin{pmatrix} 313 & 0 & 0 \\ 0 & 501 & 0 \\ 0 & 0 & 31415 \end{pmatrix}.$$

- Nein. Sind die Punkte in allgemeiner Lage, so muss die projektive Transformation die Identität sein. (Da sie eindeutig ist und die Identität auf diesen vier Punkten auch so operiert.) Liegen drei der Punkte auf einer Geraden, so ist jeder Punkt auf dieser Geraden ein Fixpunkt. (Da projektive Transformationen auf Geraden (bzw. im $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$) durch drei Punkte gegen sind.)

  Alternativ kann man algebraisch argumentieren: Es gibt keine 3×3-Matrix mit vier verschiedenen, ein-dimensionalen Eigenräumen.

- Ja, zum Beispiel Scherungen parallel zur x-Achse:

$$\begin{pmatrix} 1 & 16180 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Um eine Transformation *eindeutig* zu bestimmen, brauchen wir vier Punktepaare. Nehmen wir also einfach an, wir hätten auch noch D und D' gegeben. Dann würden wir anfangen und die Matrix

$$M_1 = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \lambda A & \mu B & \tau C \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

zu bilden. Die einzige Vorraussetzung hier, ist, dass λ, μ, τ micht Null sein dürfen. Je nachdem wie D aussieht, kommen aber andere Werte in Frage. Tun wir einfach so, als wären $\lambda = \mu = \tau = 1$ und somit

$$M_1 = \begin{pmatrix} | & | & | \\ A & B & C \\ | & | & | \end{pmatrix}.$$

Analog bilden wir

$$M_2 = \begin{pmatrix} | & | & | \\ A' & B' & C' \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

und berechnen anschließend $M_2 M_1^{-1}$.

Level 1

Aufgabe 2. Projektive Transformationen.

Gegeben seien die folgenden Punkte in homogenen Koordinaten.

$$\begin{array}{llll} a = (1,0,0)^T & b = (0,1,0)^T & c = (0,0,1)^T & d = (1,1,1)^T \\ p_1 = (2,-1,1)^T & p_2 = (-1,2,1)^T & p_3 = (0,0,1)^T & p_4 = (1,1,1)^T \\ p'_1 = (1,-1,1)^T & p'_2 = (2,2,1)^T & p'_3 = (-1,1,1)^T & p'_4 = (1,1,1)^T \end{array}$$

Bestimmen Sie eine projektive Transformation $M \in \mathbb{R}^{3\times3}$, die die Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 auf die Punkte p'_1, p'_2, p'_3, p'_4 abbildet, d.h. $[M \cdot p_i] = [p'_i]$ für $i = 1, \dots, 4$. Gehen Sie dabei wie folgt vor.

a) Bestimmen Sie eine projektive Transformation M_1, die die Punkte a, b, c, d auf die Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 abbildet.

b) Bestimmen Sie eine projektive Transformation M_2, die die Punkte a, b, c, d auf die Punkte p'_1, p'_2, p'_3, p'_4 abbildet.

c) Bestimmen Sie M.

Lösung:

a) Gesucht ist eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\det(M) \neq 0$ und Spalten m_1, m_2, m_3:

$$M = \begin{pmatrix} | & | & | \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Diese Matrix soll die Punkte entsprechend der Aufgabe abbilden. Durch die besonders einfachen Vektoren a, b, c kann man daraus direkt die Spalten der Matrix ablesen, bis auf ein skalares Vielfaches:

$$\begin{aligned} [M_1 \cdot a] = [m_1] = [p_1] \quad &\Longrightarrow \quad m_1 = \lambda \cdot p_1, \\ [M_1 \cdot b] = [m_2] = [p_2] \quad &\Longrightarrow \quad m_2 = \mu \cdot p_2, \\ [M_1 \cdot c] = [m_3] = [p_3] \quad &\Longrightarrow \quad m_3 = \tau \cdot p_3, \end{aligned}$$

Wendet man die Matrix, soweit sie bisher bekannt ist, auf den Punkt $[d]$ an, so soll das Ergebnis ein Repräsentant von $[p_4]$ sein. Da die gesamte Matrix nur bis auf skalare Vielfache eindeutig bestimmt ist, kann man diesen Repräsentanten frei wählen, und am einfachsten p_4 selbst verwenden:

$$[M_1 \cdot d] = [m_1 + m_2 + m_3] = [p_4] \quad \Longrightarrow \quad m_1 + m_2 + m_3 = \lambda \cdot p_1 + \mu \cdot p_2 + \tau \cdot p_3 = p_4.$$

Dies definiert ein lineares Gleichungssystem für λ, μ, τ:

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ p_4 \\ | \end{pmatrix}$$

Jetzt kann man konkrete Werte einsetzen und das Gleichungssystem lösen:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Somit ist ein geeigneter Repräsentant von M_1 gefunden:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Das Gleichungssystem für die zweite Teilaufgabe lautet analog

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da skalare Vielfache der gesamten Matrix keinen Unterschied machen, kann man gleich einen geeigneten ganzzahligen Repräsentanten angeben.

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

c) M kann man jetzt beschreiben als eine Transformation, die erst $p_1, \ldots, p_4$ auf $a, \ldots, d$ abbildet und dann diese Punkte auf $p'_1, \ldots, p'_4$ abbildet. Zweiteres ist M_2, ersteres die inverse Abbildung zu M_1. Diese kann man durch die inverse Matrix darstellen, oder alternativ über die adjunkte Matrix, da sich diese nur durch einen skalaren Vorfaktor von der inversen Matrix unterscheidet.

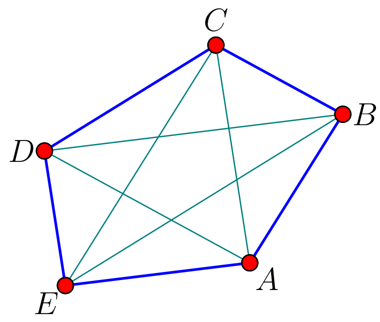
$$\operatorname{adj}(M_1) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M = M_2 \cdot \operatorname{adj}(M_1) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -3 \\ -5 & -10 & 3 \\ -7 & -8 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 5 & 10 & -3 \\ 7 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Es empfiehlt sich natürlich, zur Probe nachzurechnen, ob die Matrix tatsächlich die Punkte wie in der Angabe gefordert abbildet.

Aufgabe 3. Dualisieren.

Gegeben sei der folgende Satz:



Wenn für fünf Punkte A, B, C, D, E in $\mathbb{R}^2$ die folgenden vier Paare von Verbindungsgeraden parallel sind:

$$(A \vee B) \parallel (C \vee E) \qquad (B \vee C) \parallel (D \vee A)$$
$$(C \vee D) \parallel (E \vee B) \qquad (D \vee E) \parallel (A \vee C)$$

dann ist auch das folgende Geradenpaar parallel:

$$(E \vee A) \parallel (B \vee D)$$

a) Formulieren Sie eine projektive (d.h. unter projektiven Transformationen invariante) Verallgemeinerung dieses Satzes, und skizzieren Sie dessen Konfiguration bildlich.

b) Formulieren Sie den dazu dualen Satz, und skizzieren Sie auch diesen.

<u>Lösung:</u>

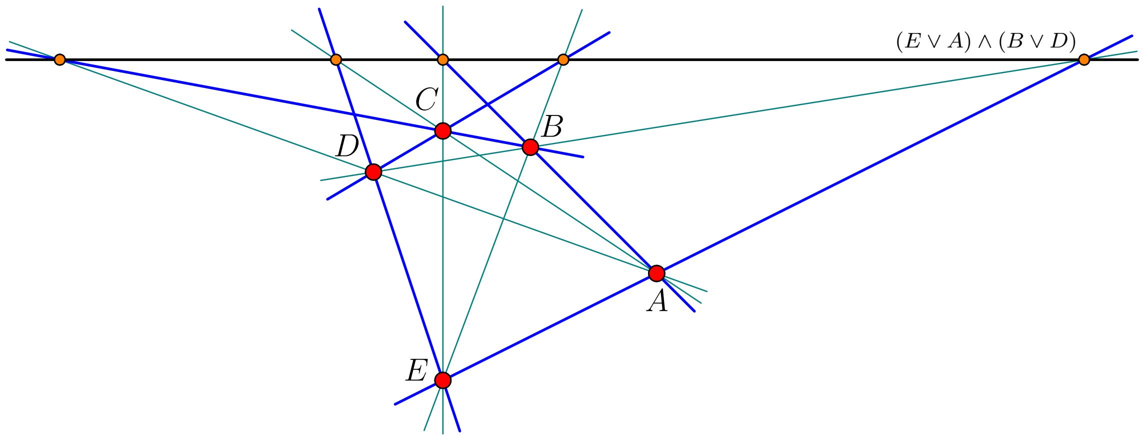
a) Projektiv gesehen schneiden sich alle Geraden, die in der ursprünglichen Formulierung des Satzes parallel sind, in Punkten auf der Geraden im Unendlichen. Wenn der Satz projektiv invariant sein soll, muss diese Sonderrolle der Geraden im Unendlichen aufgegeben werden, und die Formulierung statt dessen von einer beliebigen Geraden ausgehen. Damit erhält man den folgenden Satz:

   Wenn für fünf Punkte A, B, C, D, E in $\mathbb{RP}^2$ die folgenden vier Schnittpunkte von Verbindungsgeraden alle auf einer gemeinsamen Geraden liegen:

   $$(A \vee B) \wedge (C \vee E) \qquad (B \vee C) \wedge (D \vee A) \qquad (C \vee D) \wedge (E \vee B) \qquad (D \vee E) \wedge (A \vee C)$$

   dann liegt auch der folgende Schnittpunkt auf der gleichen Geraden:

   $$(E \vee A) \wedge (B \vee D)$$



Eine exakte Konstruktion dieses allgemeinen projektiven Satzes ist sehr schwierig, alleine mit einem Lineal sogar unmöglich. Daher muss man bei dieser Skizze im Allgemeinen etwas „schummeln", beispielsweise Geraden verbiegen.

b) Den dualen Satz erhält man, wenn man konsequent die folgenden Paare von Begriffen vertauscht:

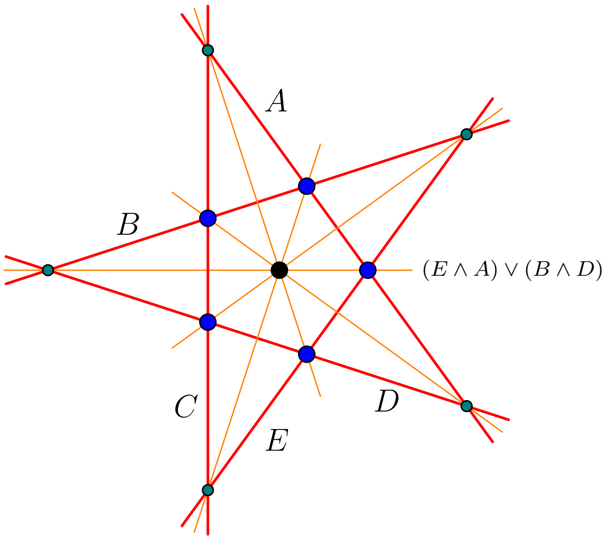
Punkt	$\longleftrightarrow$	Gerade
Verbindungsgerade	$\longleftrightarrow$	Schnittpunkt
$\vee$	$\longleftrightarrow$	$\wedge$
kollinear	$\longleftrightarrow$	konkurrent
liegen auf einer Gerade	$\longleftrightarrow$	gehen durch einen Punkt

Wenn für fünf Geraden A, B, C, D, E in $\mathbb{RP}^2$ die folgenden vier Verbindungsgeraden von Schnittpunkten alle durch einen gemeinsamen Punkt gehen:

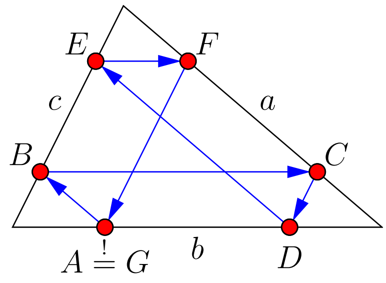
$$(A \wedge B) \vee (C \wedge E) \qquad (B \wedge C) \vee (D \wedge A) \qquad (C \wedge D) \vee (E \wedge B) \qquad (D \wedge E) \vee (A \wedge C)$$

dann geht auch die folgende Verbindungsgerade durch den gleichen Punkt:

$$(E \wedge A) \vee (B \wedge D)$$



Aufgabe 4. Pappos Affin und Projektiv.

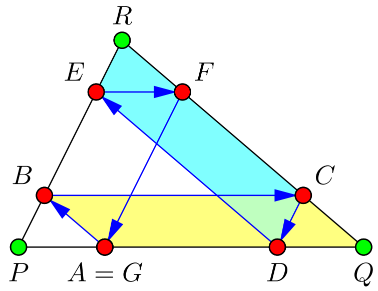


In einem Dreieck mit den Seiten a, b und c sei ein beliebiger Punkt A auf b gegeben. Die Parallele zu a durch A schneidet c in einem Punkt B (siehe Abbildung), die Parallele zu b durch B schneidet a in einem Punkt C, usw. bis Punkt G.

Beweisen Sie, dass die Punkte A und G immer aufeinander liegen.

Was hat das mit dem Satz von Pappos zu tun?

LÖSUNG:

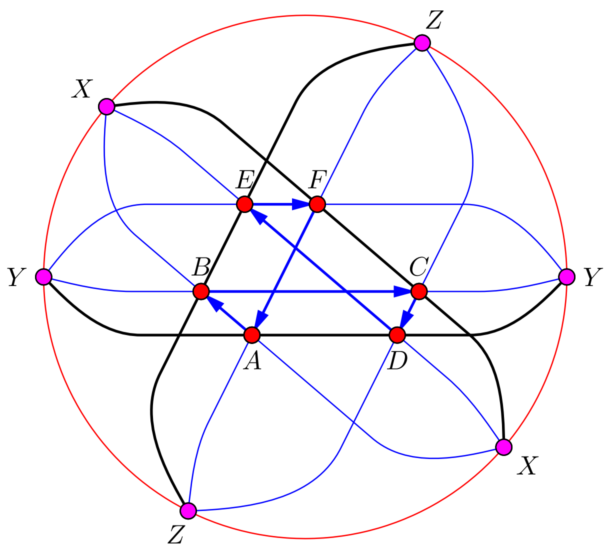


Diese Aufgabe lässt sich mit Hilfe der vielen vorhandenen Parallelogramme durch Vektorrechnung in $\mathbb{R}^2$ lösen. So ist etwa $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{QC}$ und $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CR}$, wie in der nebenstehenden Grafik illustriert. Dabei bezeichnet $\overrightarrow{AB} = B - A$ den Vektor von A nach B. Insgesamt ergibt sich damit folgende Gleichung:

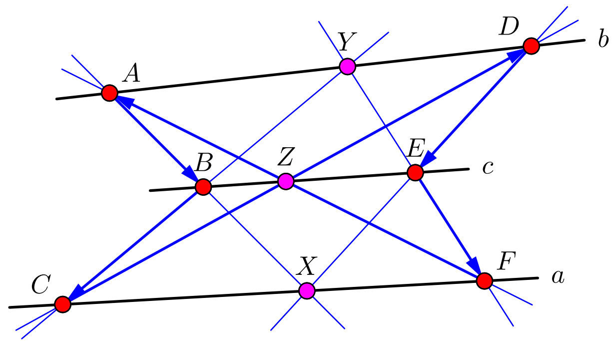
$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \\
&\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CR} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{RB} = \\
&\qquad\qquad\qquad \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RP} = 0
\end{aligned}$$

Da die Summe der einzelnen Vektoren 0 ist, und immer ein Vektor am anderen hängt, müssen Ausgangspunkt und Endpunkt übereinstimmen. Daher ist $A = G$.

Der Zusammenhang mit dem Satz von Pappos lässt sich wie folgt herleiten: Die Geraden $A \vee B$, $D \vee E$ und $C \vee F$ schneiden sich aufgrund ihrer Parallelität in einem gemeinsamen Fernpunkt, den wir hier als X bezeichnen wollen. Analog schneiden sich die anderen beiden Tripel von Geraden in den Fernpunkten Y und Z. Die so erhaltenen neun Punkte A bis F und X bis Z bilden mit ihren Kollinearitäten exakt die im Satz von Pappos angegebene Konfiguration. Durch jeden der neun Punkte verlaufen drei Geraden, und auf jeder dieser insgesamt neun Geraden liegen drei Punkte. Die Ferngerade selbst kann bei dieser betrachtung ignoriert werden.



Konfiguration mit Fernpunkten eingezeichnet



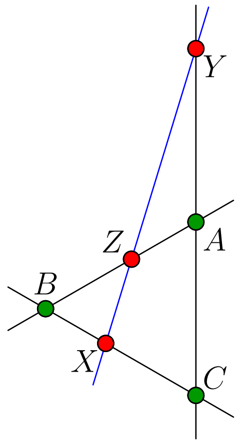
Satz von Pappos in seiner typischen Darstellung

Sind alle Inzidenzen im Satz von Pappos bis auf eine erfüllt, so ergibt sich diese letzte Inzidenz zwangsläufig als Schlussfolgerung. In diesem konkreten Fall sind durch die Konstruktion alle Inzidenzen erfüllt, bis auf diejenige, die sicherstellt, dass die Gerade $F \vee Z$ wieder durch den Punkt A verläuft. Diese ergibt sich dann als Folgerung aus dem Satz von Pappos.

Aufgabe 5. Satz von Menelaos.

Es seien A, B und P drei kollineare Punkte im $\mathbb{R}^3$, und $A \neq B$. Die *gerichtete Distanz* $\mathrm{GD}(A, B, P)$ von A zu P, gemessen in Richtung B, ist definiert als $\pm\|A - P\|$, wobei das Vorzeichen genau dann negativ ist, wenn P und B auf unterschiedlichen Seiten von A liegen. Darauf aufbauend ist das *Teilverhältnis* $\mathrm{TV}(A, B, P)$, in dem der Punkt P die Strecke AB teilt, definiert als:

$$\mathrm{TV}(A, B, P) := \frac{\mathrm{GD}(A, B, P)}{\mathrm{GD}(B, A, P)}$$



a) Es seien A und B zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$, die direkt (d.h. ohne Skalieren) Punkten in der projektiven Zeichenfläche entsprechen. Weiterhin seien $(\lambda, \mu)^T$ die homogenen Koordinaten eines Punktes $[P]$ auf der projektiven Geraden $[A][B]$ bezüglich der Basis A, B. Berechnen Sie $\mathrm{TV}(A, B, P)$ in Abhängigkeit von λ und μ.

b) Jetzt seien A, B und C die Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^3$ und X, Y und Z Punkte auf den Verbindungsgeraden von je zwei dieser Punkte, wie in nebenstehender Skizze angegeben. Außerdem sei $\{X, Y, Z\} \cap \{A, B, C\} = \emptyset$. Beweisen Sie folgenden Satz:

X, Y und Z sind genau dann kollinear, wenn folgende Gleichung gilt:

$$\mathrm{TV}(B, C, X) \cdot \mathrm{TV}(C, A, Y) \cdot \mathrm{TV}(A, B, Z) = -1$$

Betrachten Sie dabei die von A, B und C aufgespannte Ebene als projektive Zeichenebene in einer vom Standard abweichenden Einbettung, und geben sie X, Y und Z in homogenen Koordinaten auf den jeweiligen Geraden an.

c) Argumentieren Sie, warum der gerade bewiesene Satz auch gilt, wenn A, B und C nicht die Einheitsvektoren, sondern beliebige nicht kollineare Punkte sind.

<u>Lösung:</u>

a) Betrachten wir zunächst die Verbindungsgerade von A und B in $\mathbb{R}^3$:

$$A \vee B = \{A + \mu(B - A) \mid \mu \in \mathbb{R}\} = \{(1 - \mu)A + \mu B \mid \mu \in \mathbb{R}\} = \{\lambda A + \mu B \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda + \mu = 1\}$$

Wenn man sich also zunächst auf Vektoren P konzentriert, die direkt in der Zeichenebene liegen, dann gilt:

$$\begin{aligned}
P - A &= \lambda A + \mu B - A = (\lambda - 1)A + \mu B = -\mu A + \mu B = \mu(B - A)\\
\|P - A\| &= |\mu| \cdot \|B - A\|\\
\mathrm{GD}(A, B, P) &= \mu \cdot \|B - A\| = \mu \cdot \|A - B\|\\
P - B &= \lambda A + \mu B - B = \lambda A + (\mu - 1)B = \lambda A - \lambda B = \lambda(A - B)\\
\|P - B\| &= |\lambda| \cdot \|A - B\|\\
\mathrm{GD}(B, A, P) &= \lambda \cdot \|A - B\|
\end{aligned}$$

Wenn man allgemeine homogene Koordinaten $(\lambda, \mu)^T$ betrachtet, dann findet man den von diesen Koordinaten repräsentierten Punkt der Geraden durch dehomogenisieren. Dabei werden die Koordinaten so skaliert, dass sie genau einen Punkt der Geraden repräsentieren.

$$\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} \sim \frac{1}{\lambda + \mu}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} =: \begin{pmatrix}\lambda'\\ \mu'\end{pmatrix} \qquad \lambda' + \mu' = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} = 1$$

Damit kann man für allgemeine homogene Koordinaten auf der Geraden die gerichtete Distanz angeben als

$$\mathrm{GD}(A, B, P) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}\|B - A\| \qquad \mathrm{GD}(B, A, P) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\|A - B\|$$

Die Längen sowie der Skalierungsfaktor kürzen sich beim Teilverhältnis, und man erhält einfach

$$\mathrm{TV}(A, B, P) = \frac{\mathrm{GD}(A, B, P)}{\mathrm{GD}(B, A, P)} = \frac{\mu}{\lambda}$$

b) Die Punkte X, Y, Z werden durch homogene Koordinaten auf den jeweiligen Geraden ausgedrückt. Es empfiehlt sich, diese bereits in einer Reihenfolge zu wählen, die zum angegebenen Teilverhältnis passt.

$$A = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad X = \lambda_X B + \mu_X C = \begin{pmatrix}0\\\lambda_X\\\mu_X\end{pmatrix} \qquad \mathrm{TV}(B, C, X) = \frac{\mu_X}{\lambda_X}$$

$$B = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad Y = \lambda_Y C + \mu_Y A = \begin{pmatrix}\mu_Y\\0\\\lambda_Y\end{pmatrix} \qquad \mathrm{TV}(C, A, Y) = \frac{\mu_Y}{\lambda_Y}$$

$$C = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad Z = \lambda_Z A + \mu_Z B = \begin{pmatrix}\lambda_X\\\mu_Z\\0\end{pmatrix} \qquad \mathrm{TV}(A, B, Z) = \frac{\mu_Z}{\lambda_Z}$$

Drei Punkte sind genau dann kollinear, wenn ihre Determinante 0 is.

$$0 = \det(X, Y, Z) = \begin{vmatrix}0 & \mu_Y & \lambda_Z\\ \lambda_X & 0 & \mu_Z\\ \mu_X & \lambda_Y & 0\end{vmatrix} = \lambda_X \cdot \lambda_Y \cdot \lambda_Z + \mu_X \cdot \mu_Y \cdot \mu_Z$$

$$-\lambda_X \cdot \lambda_Y \cdot \lambda_Z = \mu_X \cdot \mu_Y \cdot \mu_Z$$

$$-1 = \frac{\mu_X \cdot \mu_Y \cdot \mu_Z}{\lambda_X \cdot \lambda_Y \cdot \lambda_Z} = \frac{\mu_X}{\lambda_X} \cdot \frac{\mu_Y}{\lambda_Y} \cdot \frac{\mu_Z}{\lambda_Z} = \mathrm{TV}(B, C, X) \cdot \mathrm{TV}(C, A, Y) \cdot \mathrm{TV}(A, B, Z)$$

Daher ist die Determinante genau dann gleich 0, wenn das Produkt der Teilverhältnisse -1 ist. Der Fall $\lambda = 0$, der zu einer Division durch 0 führen würde, ist ausgeschlossen, da $\mathrm{GD}(A, B, P) = 0$ nur für $A = P$ gilt, was die Angabe in diesem Fall ausschließt.

c) Der Satz macht eine Aussage über Längenverhältnisse auf Geraden sowie über Kollinearitäten. Beide Eigenschaften bleiben unter affinen Transformationen erhalten. Affine Transformationen sind durch die Bilder von drei (nicht kollinearen) Punkten eindeutig definiert. Man könnte also jedes beliebige Dreieck affin auf das Dreieck ABC abbilden, ohne die Längenverhältnisse oder Kollinearitäten zu verändern. Daher muss der Satz, der an dieser besonderen Position Gültigkeit hat, auch allgemein gelten.

Aufgabe 6. Projektive Transformation von Geraden.

Gegeben sei eine allgemeine projektive Transformation in $\mathbb{RP}^2$, repräsentiert durch die Matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Diese bildet Punkte der projektiven Ebene auf Punkte der projektiven Ebene ab. Beweisen Sie, dass die transponierte adjunkte Matrix zu M, wie sie unten angegeben ist, die gleiche Abbildung repräsentiert, wenn man sie auf die homogenen Koordinaten von Geraden anwendet. Zeigen Sie dazu, dass die Inzidenzrelation von transformierten Punkten und Geraden mit der Inzidenz vor der Transformation übereinstimmt.

$$M = \begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix} \qquad \mathrm{adj}(M)^T = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix}e & f\\ h & i\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}d & f\\ g & i\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}d & e\\ g & h\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}b & c\\ h & i\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a & c\\ g & i\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a & b\\ g & h\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}b & c\\ e & f\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a & c\\ d & f\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a & b\\ d & e\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

<u>Lösung:</u>

Zu zeigen ist, dass die Inzidenzrelation erhalten bleibt, wenn ein Punkt p mit der Matrix M abgebildet wird, und die Gerade l mit der Matrix $\mathrm{adj}(M)^T$. Die Inzidenzrelation wird wie immer über das Skalarprodukt ausgedrückt.

$$\left\langle Mp, \mathrm{adj}(M)^T l\right\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle p, l\rangle = 0$$

Es lässt sich zeigen, dass die beiden Skalarprodukte proportional zueinander sind, und der Proportionalitätsfaktor die Determinante der Matrix ist.

$$\left\langle Mp, \mathrm{adj}(M)^T l\right\rangle = (Mp)^T \cdot (\mathrm{adj}(M)^T l) = p^T M^T \mathrm{adj}(M)^T l = p^T (\det(M) E_3) l = \det(M) \langle p, l\rangle$$

Wenn einem die Gleichung $M^T \operatorname{adj}(M)^T = \det(M) E_3$ nicht bereits aus der linearen Algebra bekannt ist, kann man sie entweder allgemein beweisen oder in diesem konkreten Fall direkt ausrechnen. Hier sei die konkrete Rechnung gezeigt.

Betrachtet man den Eintrag in der linken oberen Ecke des Ergebnisses, so errechnet sich dieser als Skalarprodukt der ersten Zeile von M^T mit der ersten Spalte von $\operatorname{adj}(M)^T$. Die erste Zeile von M^T ist natürlich die erste Spalte von M. Das entstehende Skalarprodukt kann man auch als eine Determinantenentwicklung auffassen.

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Analog kann man auch alle anderen Einträge im Ergebnis als Determinanten schreiben.

$$M^T \operatorname{adj}(M)^T = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & a & c \\ d & d & f \\ g & g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & a & b \\ d & d & e \\ g & g & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & b & c \\ e & e & f \\ h & h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & a & b \\ e & d & e \\ h & g & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} c & b & c \\ f & e & f \\ i & h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} c & a & c \\ f & d & f \\ i & g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} c & a & b \\ f & d & e \\ i & g & h \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \det(M) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daher eignet sich $\operatorname{adj}(M)^T$ als Transformationsmatrix zur Abbildung von Geraden. Diese Matrix lässt sich ohne Division aus M berechnen, im Unterschied zu $\left(M^T\right)^{-1}$.