Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Bernhard Werner

Geometriekalküle WS 2018/19

www-m10.ma.tum.de/GeometrieKalkueleWS1819

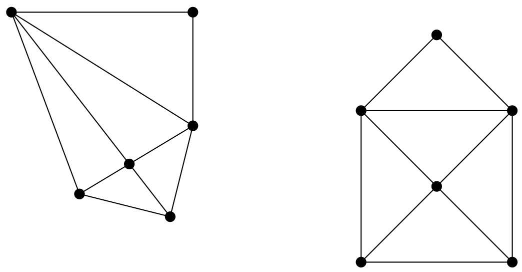
Lösungen zu Aufgabenblatt 2 (2018–11–05)

Level 0

Aufgabe 1. Grundlagen.

(a) Gegeben eine Punkt P und eine Gerade g im $\mathbb{RP}^2$. Wie bestimmt man die Parallele zu g durch P?

(b) Betrachten Sie die unten stehende Abbildung. Ist die linke Punkt-Geraden-Konfiguration das Bild der rechten unter einer projektiven Transformation?



(c) Gegeben seien ein Punkt Z und eine Gerade l im $\mathbb{RP}^2$, die nicht inzident sind. Ist dann die Abbildung (Punkten)

$$P \mapsto l \times (Z \times P)$$

eine projektive Transformation des $\mathbb{RP}^2$?

(d) Überlegen Sie sich, wie man allgemein die Fixpunkte und Fixgeraden von projektiven Transformationen bestimmt. Beachten Sie dabei, dass Vielfache eines homogenen Koordinatenvektors dasselbe Objekt beschreiben.

(e) Was ist der Unterschied zwischen einer Fixgerade und einer Fixpunktgerade einer projektiven Transformation? Finden Sie Beispiele für beides.

LÖSUNG:

(a) Parallele Geraden schneiden sich im Unendlichen. Wenn wir die Ferngerade als gegeben voraussetzen, können wir damit den Fernpunkt der Geraden g bestimmen. Die Parallele durch P ist dann

$$P \vee (g \wedge l_\infty) = P \times (g \times l_\infty).$$

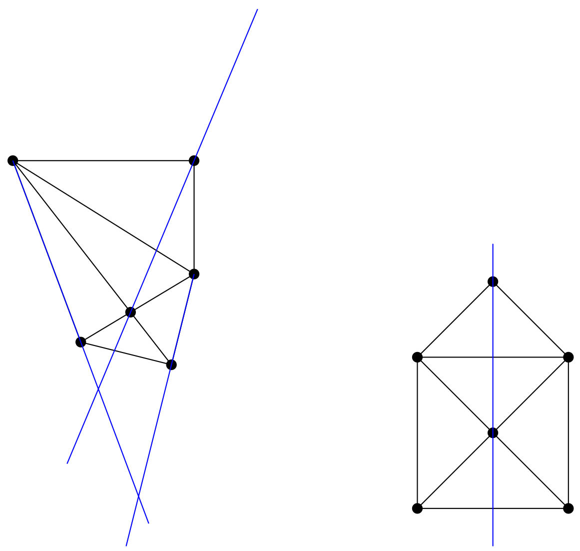
Wir könnten theoretisch auch $P \times g \times l_\infty$ schreiben. Für Vektoren wäre es dann nicht klar, wie zu multiplizieren ist. Aber für geometrische Objekte ist es theoretisch kein Problem: $P \vee g$ bzw. $P \times g$ ist nicht definiert und ergibt (im zweidimensionalen) keinen Sinn. Wir verwenden aber natürlich der Lesbarkeit halber trotzdem Klammern.

Wenn man obiges mit konkreten Koordinaten $P = (x, y, z)^T$ und $g = (a, b, c)^T$ in Standardeinbettung ausrechnet, ist das Ergebnis

$$\begin{pmatrix} az \\ bz \\ -ax - by \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -\frac{ax+by}{z} \end{pmatrix}.$$

Man sieht also (in Standardeinbettung), dass diese Gerade parallel zu g ist.

(b) Nein, ist sie nicht. Die Symmetrie in der rechten Zeichnung impliziert, dass die senkrechten Linien parallel sind. Damit ist ihr gemeinsamer Fernpunkt kollinear zu der Spitze des „Hauses“ und dem Diagonalenschnittpunkt. Konstruiert man das Bild des Fernpunkts in der linken Zeichnung, sieht man aber deutlich, dass er nicht kollinear zu diesen beiden Punkten ist.



(c) Nein, ist sie nicht. Das geht an mehreren Stellen schief. Für $P = Z$ ist das (Zwischen-)Ergebnis der Nullvektor und somit ist die Abblidung nicht wohldefiniert. Und das Ergebnis ist immer ein Punkt, der inzident zu l ist. Damit ist die Abbildung nicht surjektiv.

Aber! Es ist eine lineare Transformation, da das Kreuzprodukt bilinear ist. Konkret ist

$$u \times v = \begin{pmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{pmatrix} \cdot v$$

für alle Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^3$.

Insgesamt ist diese Abbildung eine Projektion auf die Gerade l durch das Zentrum Z. Das kann man prinizipiell als projektive Transformation auffassen, aber nicht mit der Definition, die wir verwenden.

(d) Für einen Fixpunkt $[P]$ einer Transformation $[M]$ muss die Gleichung

$$[MP] = [P]$$

gelten. Auf Repräsentantenebene heißt das, dass

$$MP = \lambda P$$

für ein passendes $\lambda \in \mathbb{R}^\times$. Fixpunkte von Transformationen sind also *Eigenvektoren* der zugehörigen Matrix *zu einem beliebigen Eigenvektor ungleich Null.* Zu beachten ist, dass jeder eindimensionale Eigenraum der Matrix einem einzelnen Fixpunkt enspricht. Jeder zweidimensionale Eigenraum entspricht einer Fixpunktgeraden. (Siehe (e).)

Da Transformationen M auf Geraden durch

$$l \mapsto M^{-T} l$$

operieren, sind Fixgeraden einfach Eigenvektoren von M^{-T}.

(e) Eine Fixgerade bleibt als Ganzes fest, aber jeder Punkt auf der Gerade kann sich ändern. Bei einer Fixpunktgerade ist jeder einzelne Punkt ein Fixpunkt. Jede Fixpunktgerade ist eine Fixgerade, aber nicht anders herum.

Betrachtet man z.B. die Scherung

$$\begin{pmatrix} 1 & 42 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so ist jede Parallele zur x-Achse eine Fixgerade, aber nur die x-Achse selbst ist eine Fixpunktgerade.

Level 1

Aufgabe 2. Determinanten.

a) Beweisen Sie folgende Gleichung:

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Abgekürzt werden wir dies auch schreiben als $\det(a, b, c) = \langle a \times b, c \rangle$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}^3$.

b) Benutzen Sie dieses Ergebnis, um folgenden Satz zu beweisen:

Drei Punkte a, b, c liegen genau dann auf einer Geraden, wenn ihre homogenen Koordinaten die Gleichung $\det(a, b, c) = 0$ erfüllen.

c) Formulieren Sie einen entsprechenden Satz, der eine Aussage über drei Geraden macht, deren Determinante verschwindet.

<u>Lösung:</u>

a) Die Gleichung lässt sich am einfachsten durch Entwicklung der Determinante nach der letzten Spalte beweisen:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

b) Die Verbindungsgerade von a und b ist $a \times b$. Der Punkt c liegt genau dann auf dieser Geraden, wenn das Skalarprodukt mit ihr 0 ist, also $\langle a \times b, c \rangle = \det(a, b, c) = 0$ gilt.

Der Sonderfall $a = b$, wo die Verbindungsgerade nicht existiert und das Kreuzprodukt den Nullvektor ergibt, passt auch ins Bild: In diesem Fall gibt es nur zwei unterschiedliche Punkte, und zwei Punkte liegen immer auf einer Geraden. Skalarprodukt mit dem Nullvektor sowie Determinante mit zwei linear abhängigen Spalten ergibt jeweils 0.

c) *Drei Geraden a, b, c treffen sich genau dann in einem Punkt, wenn ihre homogenen Koordinaten die Gleichung $\det(a, b, c) = 0$ erfüllen.*

Aufgabe 3. Fixgeraden und -punkte

a) Gegeben sei folgende affine Abbildung in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Fixpunkte und Fixgeraden dieser Abbildung in $\mathbb{R}^2$.

Hinweis: Betrachten Sie zuerst mögliche Fixgeraden durch den Ursprung, danach andere.

b) Ein Repräsentant der entsprechenden projektiven Transformation lautet:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 15 & 12 & 0 \\ 3 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Fixpunkte dieser Abbildung in $\mathbb{RP}^2$. Gehen Sie dazu von der Matrix aus, nicht von der Lösung der vorherigen Teilaufgabe.

c) Bestimmen Sie die Fixpunkte der folgenden Abbildung in $\mathbb{RP}^2$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

LÖSUNG:

a) **Fixpunkte:** Um Fixpunkte zu bestimmen, ist folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da die Determinante der rechten Matrix von 0 verschieden ist, hat dieses Gleichungssystem nur eine einzige Lösung. Da die rechte Seite der Nullvektor ist, ist die Lösung ebenfalls der Nullvektor. Daher ist der Ursprung der einzige Fixpunkt der Abbildung.

Fixgeraden durch den Ursprung: Eine Fixgerade, die durch den Ursprung verläuft, muss in einem Eigenraum der Abbildung liegen. Dadurch wird jeder Punkt der Geraden auf ein Vielfaches seiner selbst abgebildet, was wieder auf der Geraden liegt. Mit den aus der linearen Algebra bekannten Mitteln findet man zwei Eigenwerte mit passenden eindimensionalen Eigenräumen.

$$P_M = (5-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 10\lambda + 21 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-84}}{2} = 5 \pm 2$$

$$\lambda_1 = 3 \qquad\qquad \lambda_2 = 7$$

$$\ker \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad\qquad \ker \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es gibt also zwei Ursprungsgeraden, die die gefundenen Eigenvektoren als Richtungsvektoren haben und unter der Abbildung fix bleiben. Diese kann man auch in Normalenform angeben:

$$n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad n_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$g_1 : x + 2y = 0 \qquad\qquad g_2 : x - 2y = 0$$

Andere Fixgeraden: Angenommen, es gäbe weitere Fixgeraden, die *nicht* durch den Ursprung verlaufen. Da die beiden Fixgeraden durch den Ursprung in unterschiedliche Richtungen verlaufen, kann jede andere Gerade höchstens zu einer der beiden parallel sein. Folglich schneidet jede Gerade mindestens eine der Fixgeraden in einem Punkt.

Der Schnittpunkt von zwei Fixgeraden ist zwingend ein Fixpunkt. Da jedoch der Ursprung der *einzige* Fixpunkt der Abbildung ist, kann es keine weiteren Fixgeraden geben, die nicht durch den Ursprung verlaufen.

b) Ein Fixpunkt p in $\mathbb{RP}^2$ ist ein Punkt, dessen homogene Koordinaten nach Anwendung der Abbildung in der gleichen Äquivalenzklasse liegen, also ein skalares Vielfaches der ursprünglichen homogenen Koordinaten sind: $Mp = \lambda p$. Daher ist jeder Eigenvektor ein Repräsentant eines Fixpunktes.

Man muss also wieder die Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix bestimmen, und erhält dadurch drei Eigenvektoren:

$$M_P = (3-x)((15-x)^2 - 36) = (3-x)(x^2 - 30x + 189) \qquad \lambda_{2,3} = \frac{30 \pm \sqrt{900-756}}{2} = 15 \pm 6$$

$$\lambda_1 = 3 \qquad\qquad \lambda_2 = 9 \qquad\qquad \lambda_3 = 21$$

$$\ker\begin{pmatrix} 12 & 12 & 0 \\ 3 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad \ker\begin{pmatrix} 6 & 12 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \quad \ker\begin{pmatrix} -6 & 12 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es gibt also drei Fixpunkte, von denen einer im Ursprung der Zeichenebene liegt, und zwei die Fernpunkte zu den Fixgeraden der vorherigen Teilaufgabe sind.

c) Auch hier entsprechen die Fixpunkte den Eigenvektoren der Matrix.

$$M_P = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ -2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -x^3 + 3x^2 + x - 3$$

Hier sieht man nicht so leicht einen der Faktoren des charakteristischen Polynoms, wie das bei der vorherigen Teilaufgabe der Fall war. Man kann jedoch durch Ausprobieren recht leicht beispielsweise $\lambda_1 = 1$ als Nullstelle raten.

$$\begin{array}{l} -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 2\lambda + 3) \\ \underline{-(-\lambda^3 + \lambda^2)} \\ \quad 2\lambda^2 + \lambda \\ \quad \underline{-(2\lambda^2 - 2\lambda)} \\ \qquad 3\lambda - 3 \\ \qquad \underline{-(3\lambda - 3)} \\ \qquad\qquad 0 \end{array} \qquad \lambda_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} = 1 \pm 2$$

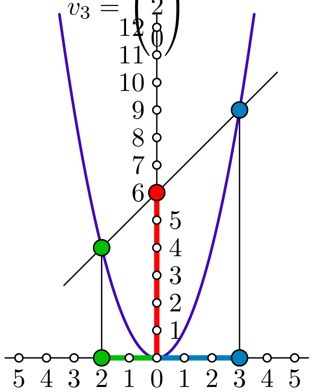
$$\lambda_1 = 1 \qquad\qquad \lambda_2 = -1 \qquad\qquad \lambda_3 = 3$$

$$\ker\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad \ker\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \quad \ker\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4. Parabelrechner.

In der Mathematikausstellung ix-quadrat findet sich das rechts abgebildete Exponat. Die Kurve ist eine gewöhnliche Standardparabel mit der Gleichung $y = x^2$.
Will man zwei Zahlen a und b miteinander multiplizieren, so verbindet man die Punkte der Normalparabel bei $x = -a$ und $x = b$ miteinander. Schneidet man diese Gerade mit der y-Achse, so landet man genau im Punkt $(0, a \cdot b)^T$.
Beweisen Sie diese Eingenschaft mit Hilfe von homogenen Koordinaten und dem Kreuzprodukt.



Lösung:

Die y-Achse hat die homogenen Koordinaten $(1,0,0)^T$. Damit kann man den Schnittpunkt einfach berechnen:

$$\left(\begin{pmatrix} -a \\ a^2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b \\ b^2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 \\ a + b \\ -ab^2 - a^2 b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -ab^2 - a^2 b \\ -(a+b) \end{pmatrix} = -(a+b)\begin{pmatrix} 0 \\ ab \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5. Matrizen euklidischer Abbildungen.

Bestimmen Sie Matrizen aus $\mathbb{R}^{3\times 3}$, die die folgenden Transformationen auf homogenen Koordinaten beschreiben.

a) Eine Spiegelung an der Geraden $x = 3$.

b) Eine Drehung um $180°$ um den Ursprung.

c) Eine Drehung um $90°$ gegen den Uhrzeigersinn um den Punkt $(4, 7)^T$.

d) Eine Drehung um den Ursprung, die den Punkt $(9, 12)^T$ auf die x-Achse abbildet.

e) Eine Spiegelung an der Geraden durch die Punkte $(2, -4)^T$ und $(-6, 2)^T$.

Hinweis: Alle Matrizen sind mit ganzen Zahlen als Einträgen darstellbar. Die Verwendung von mit dem Taschenrechner berechneten Dezimalbrüchen kann vermieden werden. Die Zahlen sind so gewählt, dass sich die Matrizen auch ohne Taschenrechner bestimmen lassen.

<u>LÖSUNG:</u>

Alle Operationen werden als Verkettungen von primitiven affinen Abbildungen dargestellt. Die Verkettungen stellen sich jeweils als Produkt mehrerer Matrizen dar. Dabei ist immer die rechteste Matrix diejenige Abbildung, die zuerst auf den Punkt angewandt wird.

Warum die Reihenfolge so sein muss, sieht man schnell, wenn man sich die Anwendung der Transformation als Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor vorstellt: $(M_3 \cdot M_2 \cdot M_1) \cdot p = M_3 \cdot (M_2 \cdot (M_1 \cdot p))$. Die rechteste Matrix wird zuerst mit dem Vektor multipliziert.

a) Verkettung von einer Verschiebung, einer Spiegelung an der y-Achse und der inversen Verschiebung.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Man kann hier entweder die kanonische Drehmatrix verwenden, oder sich direkt überlegen, dass eine Drehung um $180°$ eine Punktspiegelung und somit eine Streckung um den Faktor -1 ist.

$$\begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi & 0 \\ \sin\pi & \cos\pi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Verschiebung des Drehzentrums in den Ursprung, dann die Drehung, und dann die inverse Verschiebung.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 11 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Das Steigungsdreieck des Punktes hat Katheten, die sich direkt aus den Koordinaten ablesen lassen, und eine Hypothenuse von $\sqrt{9^2 + 12^2} = 15$. Sei φ der Winkel der gesuchten Drehung, die den Punkt auf die x-Achse abbildet, so finden sich Sinus und Kosinus des negativen Winkels aus den Längen des Dreiecks: $\sin(-\varphi) = \frac{12}{15}$ und $\cos(-\varphi) = \frac{9}{15}$. Damit kann man die Drehung beschreiben:

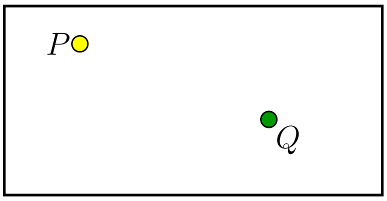
$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{15} & \frac{12}{15} & 0 \\ -\frac{12}{15} & \frac{9}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 9 & 12 & 0 \\ -12 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

e) Hier kann man eine Translation, die einen der Punkte in den Ursprung verschiebt, kombinieren mit einer Drehung, die den anderen Punkt auf eine der Koordinatenachsen dreht, und einer Spiegelung an dieser Achse. Drehung und Verschiebung müssen anschließend noch rückgängig gemacht werden. Verschiebt man den ersten Punkt in den Ursprung, so landet der zweite auf $(-8, 6)^T$. Die Drehung auf die x-Achse kann man dann wie in der vorangegangenen Teilaufgabe bestimmen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & -6 & 0 \\ 6 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & 6 & 0 \\ -6 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & -96 & -240 \\ -96 & -28 & -320 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6. Billard.

Auf einem rechteckigen Billard-Tisch liegen zwei Kugeln. Eine von diesen soll so angespielt werden, dass sie die andere trifft.



a) Zeichnen Sie in die obige Abbildung (oder noch besser eine Kopie auf eigenem Karopapier) die Bahn ein, auf der die Kugel P zuerst die obere Bande, dann die rechte Bande und schließlich die Kugel Q trifft. Sie können davon ausgehen, dass die Kugeln punktförmig sind und an den Banden einfach reflektiert werden, ohne Dralleffekte oder dergleichen.

b) Jetzt werden die Banden durch Teleporter ersetzt, die gegenüberliegende Kanten so identifizieren, dass die Topologie eines Torus entsteht. Zeichnen Sie eine Bahn ein, bei der die Kugel P zweimal die lange und einmal die kurze Kante kreuzt, bevor sie auf die Kugel Q trifft.

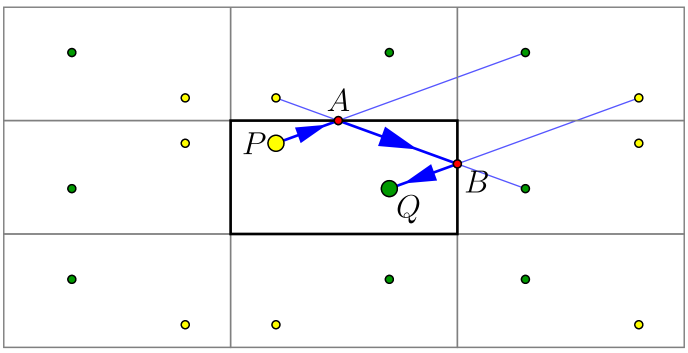
c) Eine Umpolung einzelner Teleporter identifiziert gegenüberliegende Kanten so, dass die Topologie der reellen projektiven Ebene entsteht. Finden Sie auch hier einen Bahnverlauf, der zweimal die lange und einmal die kurze Kante kreuzt.

<u>Lösung:</u>

Grundidee aller Lösungen ist es, benachbarte „Kopien“ oder „Bilder“ des Tisches einzuzeichnen, und dann über mehrere dieser Kopien gerade Linien zu zeichnen.

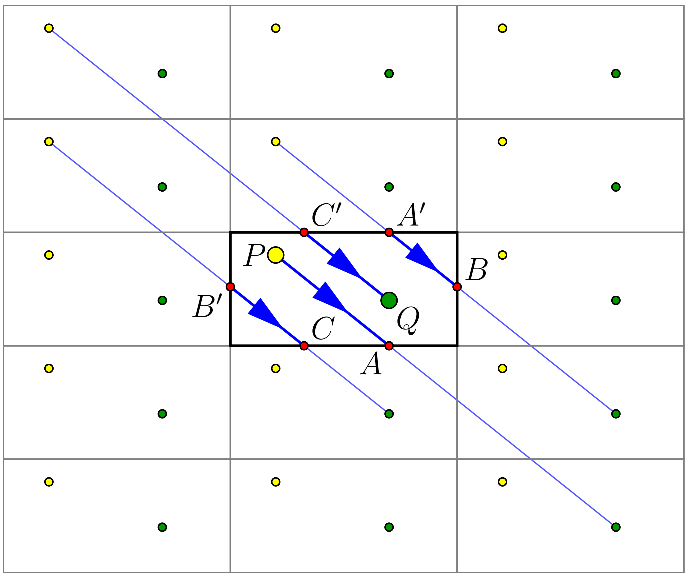
a) Bei einem normalen Billard-Tisch finden an den Banden Reflexionen statt. Betrachtet man eine einfache Reflexion, etwa in einem Spiegel, so verläuft eine Bahn im ersten Abschnitt geradlinig von ihrem Startpunkt in Richtung Spiegelbild des Ziels. Ab dem Schnitt dieser Gerade mit dem Spiegel verläuft sie aus Richtung des Bildes des Startpunkts hin zum tatsächlichen Ziel.

   Diesen Ansatz verallgemeinernd betrachtet man mindestens drei angrenzende Bilder, die jeweils durch Spiegelung an einer Tischkante auseinander hervorgehen. Dadurch lässt sich der Bahnverlauf über die einzelnen Spiegelungen hinweg verfolgen.



b) Bei einem Torus werden gegenüberliegende Kanten in jeweils gleicher Orientierung miteinander identifiziert. Die umliegenden Nachbarn sind in diesem Fall also keine Spiegelungen mehr, sondern einfach verschobene Kopien. Manch einen mag dies an das Uralt-Computerspiel „Asteroids“ erinnern.

   Um die geforderten Kantenüberquerungen zu erhalten, müssen Start und Ziel durch zwei lange und eine kurze Kante getrennt sein. Für diese Wahl gibt es vier Möglichkeiten, die allesamt korrekt sind.



c) Bei der projektiven Ebene sind gegenüberliegende Kanten mit gegensinniger Orientierung identifiziert. Ein Ball, der die obere Kante schräg nach rechts laufend passiert, taucht auf der unteren Kante nach links laufend wieder auf.

Die umliegenden Nachbarn ergeben sich hier durch Gleitspiegelungen: eine Spiegelung, die die Orientierung der Kante umkehrt, kombiniert mit einer Verschiebung, die die gegenüberliegenden Kanten identifiziert.