Technische Universität München
Fakultät für Mathematik

Klausur

Geometriekalküle

Modul MA2203

10. April 2019, 17:00 – 18:00 Uhr

Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert

Musterlösung

Aufgabe 1. Wahr oder Falsch

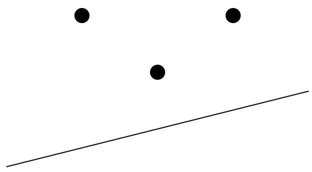
Entscheiden Sie bei den unten stehenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antworten kurz. Die Antworten „Wahr" oder „Falsch" alleine ohne Begründung reichen nicht aus, um auf eine Teilaufgabe Punkte zu bekommen.

(a) Bettet man den $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ als diejenige Ebene ein, die durch die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$ läuft, dann hat die Ferngerade die Koordinaten $l = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(b) Es gibt eine projektive Transformation des $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, die die drei Punkte unten als Fixpunkte und die Gerade als Fixgerade hat.

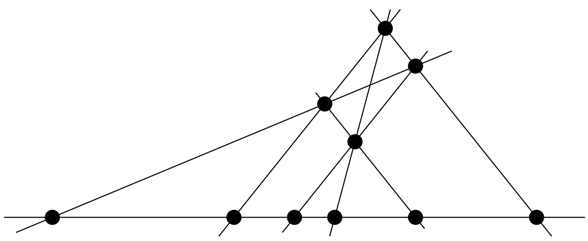


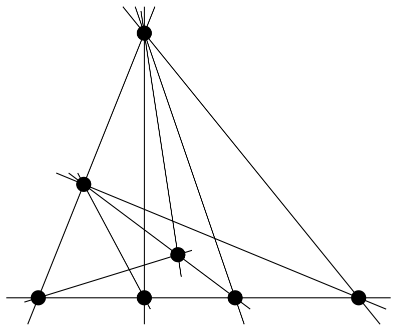
(c) Die Punkte

$$\begin{pmatrix} 361 \\ 501 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 184 \\ 93 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2019 \\ 4 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ sind kollinear.

(d) Die beiden Punkt-Geraden-Konfigurationen unten sind dual zueinander.





<u>LÖSUNG:</u>

(a) Falsch. Wenn dem so wäre, müsste l ein Normalenvektor auf der Ebene durch A, B, C sein. Und dann gäbe es ein $d \in \mathbb{R}$, sodass

$$l^T A = l^T B = l^T C = d.$$

Aber schon ohne zu rechnen, sieht man, dass $l^T A < 0 < l^T B$.

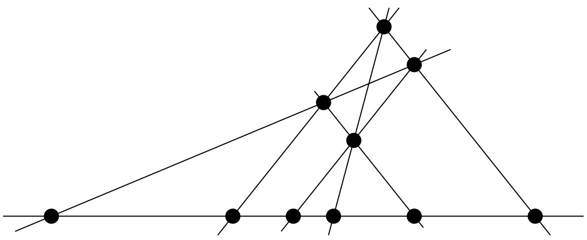
Hier ist das Ganze sogar noch ein bisschen schlimmer: Man sieht leicht, dass die Vektoren linear abhängig sind – $A = C - B$ – und deswegen verläuft die Ebene durch diese Punkte auch durch den Ursprung. Sie ist also sowieso nicht als Einbettungsebene geeignet.

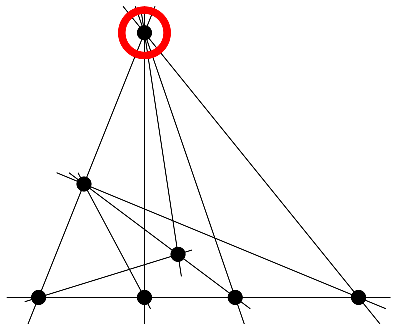
(b) Richtig. Die Identität.

(c) Falsch. Damit die Punkte im $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ kollinear sind müssten die Vektoren im $\mathbb{R}^4$ linear abhängig sein. Die ersten beiden sind offensichtlich keine Vielfachen voneinander und ebenso offensichtlich sieht man anhand der dritten Koordinate, dass der dritte Vektor keine Linearkombination der ersten beiden sein kann.

(d) Falsch. Wären diese Konfigurationen dual zueinander, müsste notwendigerweise zu jedem Punkt auf der einen Seite, durch den n Geraden laufen, eine Gerade auf der einen Seite existieren, auf der n Punkte liegen.

Der Punkt auf der rechten Seite ganz oben liegt auf fünf Geraden. Links gibt es aber keine Gerade mit fünf Punkten darauf.





Aufgabe 2. Bilder und Urbilder

Betrachten Sie den $\mathbb{RP}^2$ in Standardeinbettung und die folgende projektive Transformation:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie das Urbild der Ferngerade unter M.

(b) Bestimmen Sie das Bild der Ferngerade unter M.

(c) Bestimmen Sie zwei verschiedene Punkte P und Q, die durch M vertauscht werden. (Es kann mehrere solche Paare geben; es reicht, wenn Sie eins finden.)

<u>LÖSUNG:</u>

(a) Für das Urbild l der Ferngerade gilt $l_\infty = (M^T)^{-1} l$. Wir können es also ausrechnen als

$$l \;=\; M^T l_\infty \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

.

(b) Hier könnten wir $(M^{-1})^T l_\infty$ ausrechnen. Die gesamte Matrix M zu invertieren ist allerdings zu lästig. Ähnlich „anstrengend“ ist es, die Adjunkte auszurechnen. Allerdings brauchen wir von dieser nur die dritte Zeile. Tun wir so, als würden wir die Formel für die Adjunkte nicht kennen...

Wir nehmen zwei „einfache“ Punkte auf der Ferngerade, bestimmen ihre Bilder und von denen die Verbindungsgerade:

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) Es muss $MP = Q$ und $MQ = P$ gelten. Kombinieren wir beide Gleichungen, erhalten wir

$$M^2 P = P.$$

Wir brauchen also einen Fixpunkt von

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

An der zweiten Zeile sehen wir sofort, dass 1 ein Eigenwert ist. Und

$$M^2 - 1 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\ker(M^2 - 1 \cdot I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, x, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir wählen also $P = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ und erhalten damit $Q = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$. Und damit diese verschieden sind, muss $|x| \neq |z|$ sein. Die einfachte Wahl ist dann also

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das hätte man auch durch scharf Draufschaun sehen können...

Aufgabe 3. Laguerres Formel.

Zeigen Sie mit Hilfe von Laguerres Formel folgende Aussagen:

a) Für die Winkelsumme im Dreieck gilt:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \pmod{\pi}$$

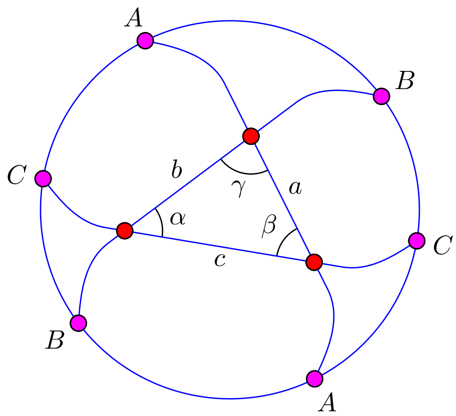
b) Gegenüberliegende Winkel eines Parallelogramms sind (modulo π) gleich groß.

c) Begründen Sie, warum sich mit Laguerres Formel Winkel nur Modulo π bestimmen lassen.

Lösung:

a) Es sei a, b und c die den Winkeln α, β und γ gegenüberliegenden Seiten. Die Schnittpunkte dieser Seiten mit der Ferngerade seien als A, B und C bezeichnet. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{2i} \cdot \log(B, C; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \pmod{\pi}\\
\beta &= \frac{1}{2i} \cdot \log(C, A; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \pmod{\pi}\\
\gamma &= \frac{1}{2i} \cdot \log(A, B; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \pmod{\pi}
\end{aligned}$$

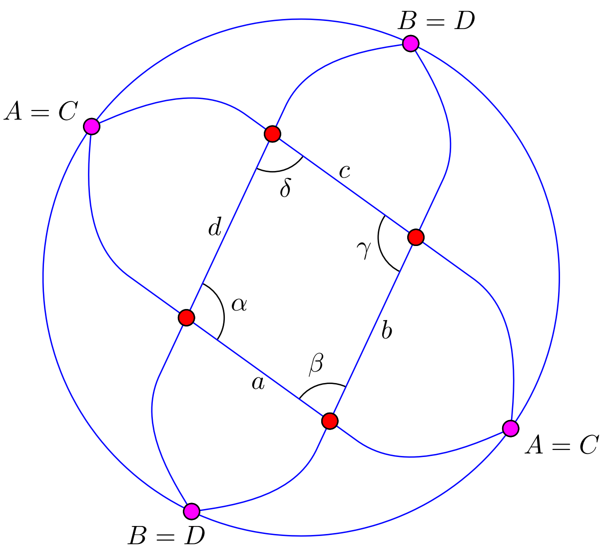


Damit folgt nun

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta + \gamma &= \frac{1}{2i}\Big(\log(B, C; \mathtt{I}, \mathtt{J}) + \log(C, A; \mathtt{I}, \mathtt{J}) + \log(A, B; \mathtt{I}, \mathtt{J})\Big)\\
&= \frac{1}{2i} \log\Big((B, C; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \cdot (C, A; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \cdot (A, B; \mathtt{I}, \mathtt{J})\Big)\\
&= \frac{1}{2i} \log(1) = 0 \pmod{\pi}
\end{aligned}$$

b) Verwendet man Bezeichnungen analog zur Situation im Dreieck, so ergibt sich nachfolgendes Bild. Die Winkel errechnen sich darin als

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{2i} \log(D, A; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \pmod{\pi}\\
\beta &= \frac{1}{2i} \log(A, B; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \pmod{\pi}\\
\gamma &= \frac{1}{2i} \log(B, C; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \pmod{\pi}\\
\delta &= \frac{1}{2i} \log(C, D; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \pmod{\pi}
\end{aligned}$$



Da die gegenüberliegenden Seiten jedoch parallel sind, fallen ihre Fernpunkte zusammen: $A = C$ und $B = D$. Damit sind auch die Winkel offensichtlich gleich, da genau das gleiche Doppelverhältnis ausgerechnet wird:

$$\begin{aligned}
\alpha = \gamma &= \frac{1}{2i} \log(D = B, A = C; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \pmod{\pi}\\
\beta = \delta &= \frac{1}{2i} \log(A = C, B = D; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \pmod{\pi}
\end{aligned}$$

Nebenbemerkung: Die beiden verbleibenden Doppelverhältnisse unterscheiden sich nur noch in der Reihenfolge der beiden Fernpunkte. Das entspricht einem Kehrwert des Doppelverhältnisses und somit einem Vorzeichenwechsel des Logarithmus. Modulo π ist also $\alpha = -\beta$ und so fort, was der Tatsache Ausdruck verleiht, dass sich benachbarte Winkel im Parallelogramm zu π addieren.

c) Der komplexe Logarithmus ist mehrdeutig. Da $e^{x+k2\pi i}$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ den gleichen Wert annimmt, kann der Logarithmus den Imaginärteil eines Exponenten nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π bestimmen. Nach Division durch $2i$ ergibt sich, dass der Realteil des Winkels nur bis auf ganzzahlige Vielfache von π bestimmt werden kann.

Da projektive Geraden unorientiert sind, also keine ausgezeichnete Richtung haben, kann der Winkel zwischen zwei Geraden gar nicht genauer bestimmt werden. Winkelmessungen modulo 2π funktionieren nur zwischen Geraden mit vorgegebener Richtung. Klassische Winkelmessung zwischen vorgegebenen Schenkeln entspricht Halbgeraden mit vorgegebener Ausdehnungsrichtung ab dem gemeinsamen Startpunkt.

Aufgabe 4. Transformation aus Geraden

Gegeben seien die folgenden Geraden im $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$:

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie diejenige projektive Transformation des $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, die

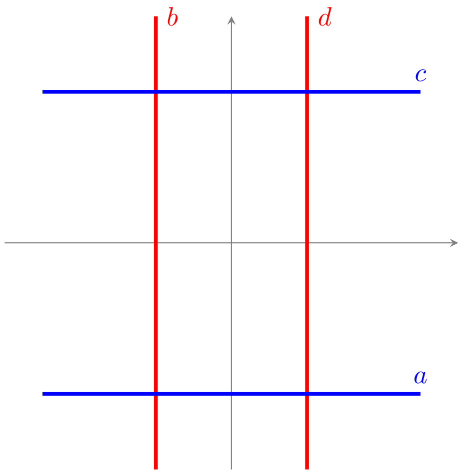
$$a \mapsto b, \quad b \mapsto a, \quad c \mapsto d, \quad d \mapsto c$$

abbildet.

Hinweis: Bevor Sie losrechnen, skizzieren Sie sich die Geraden in Standardeinbettung und versuchen Sie die gesuchte Transformation aus einfacheren zusammenzusetzen.

Lösung:

Wie im Hinweis empfohlen, machen wir eine Skizze in Standardeinbettung:

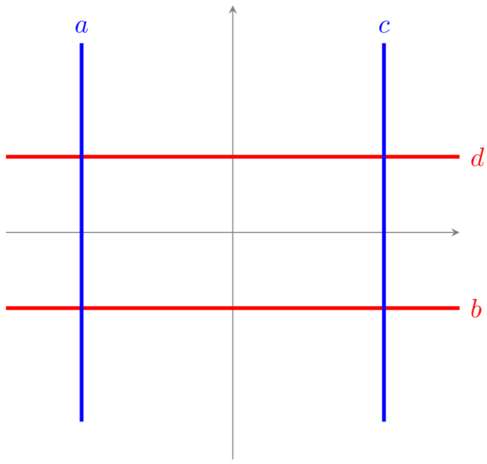


Das Vertauschen von a und b bzw. c und d entspricht einer Spiegelung an der Diagonalen $x = y$ kombiniert mit Streckungen/Stauchungen in Richtung der Koordinatenachsen. Man kann hier erst einmal stauchen, dann spiegeln und dann strecken. Oder erst spiegeln und dann stauchen und strecken gleichzeitig. Qualitativ ändert sich an den Rechnungen nichts.

Wir wählen die zweite Variante. Spiegeln an der Gerade $x = y$ in Standardeinbettung ist gegeben durch die Matrix

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wenden wir diese auf die Geraden an, erhalten wir folgendes Bild.



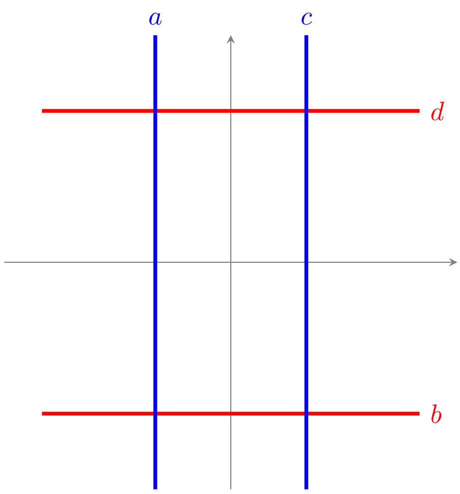
Anschließend müssen wir in x-Richtung stauchen und in y-Richtung strecken. Das ist gegeben durch die Matrix

$$M_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$M_2 M_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die gesuchte Transformation und das Bild der vier Geraden ist:



Möchte man rechnen, so kann man vier Schnittpunkte (in allgemeiner Lage) der Geraden zu bestimmen. Anhand einer Skizze oder einer schnellen Rechnung ermittelt man

$$P := a \vee b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q := a \vee d = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R := b \vee c = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S := c \vee d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann müssen P und S Fixpunkte der Transformation sein und Q und R werden vertauscht:

$$P \mapsto P, \quad Q \mapsto R, \quad R \mapsto Q, \quad S \mapsto S$$

Die Abbildungsmatrix, die die Standardbasis auf die Urbildpunkte abbildet lautet dann

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und die für die Bildpunkte

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zusammen ergibt sich die gesuchte Transformationsmatrix

$$M = M_2 M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man macht sich das Rechnen ein bisschen einfacher, wenn man als Q und R die Fernpunkte $a \vee c$ und $b \vee d$ wählt...

Man kann das ganze auch einfach auf Geradenkoordinaten rechnen:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Um dann allerdings die Transformation auf Punkten zu bekommen, brauchen wir das M, das

$$(M^T)^{-1} = M_2 M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erfüllt. Also,

$$M = (M_2^T)^{-1} M_1^T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da die Matrix selbstinvers ist, ist es relativ egal, ob man erst die komplette Geradentransformation bestimmt und dann invertiert und transponiert, oder die Teiltransformation gleich richtig kombiniert. Für kompliziertere Abbildungen sollte man allerdings die zweite Methode wählen, da man sich so ein Invertieren spart.

Man kann auch Ansatz 1 und 3 kombinieren: Fasst man die gegebenen Vektoren als Punktkoordinaten auf und skizziert sie in Standardeinbettung, kann man ähnlich leicht wie in Ansatz 1 geometrisch argumentieren, um die passende Transformation zu finden. Nur am Ende muss man dann wieder daran denken, dass man mit Geraden gearbeitet hat und die Transformation auf Punkte umrechnen.

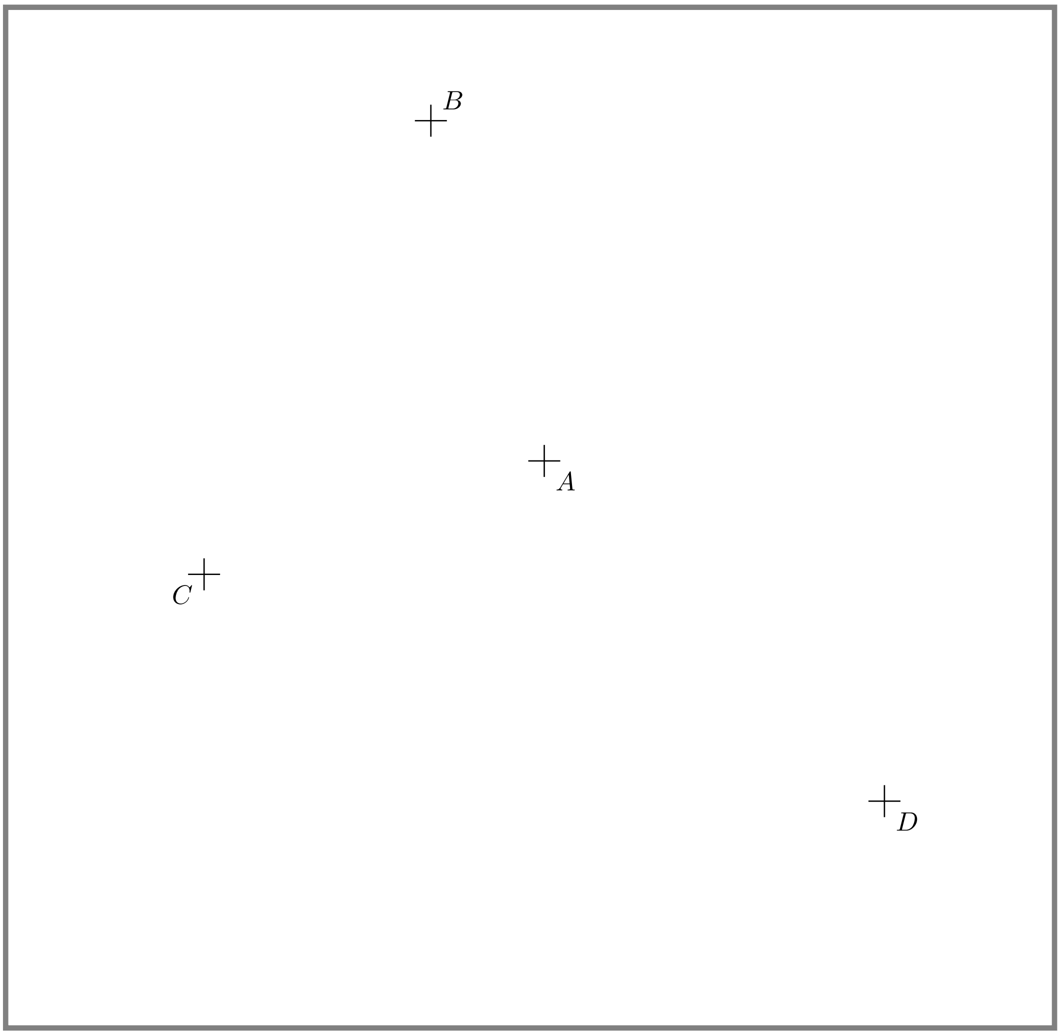
Aufgabe 5. Vorzeichen des Doppelverhältnisses

Nachfolgend sind vier Punkte A bis D im $P \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ vorgegeben. Diese definieren für jeden Punkt $P \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ ein Doppelverhältnis

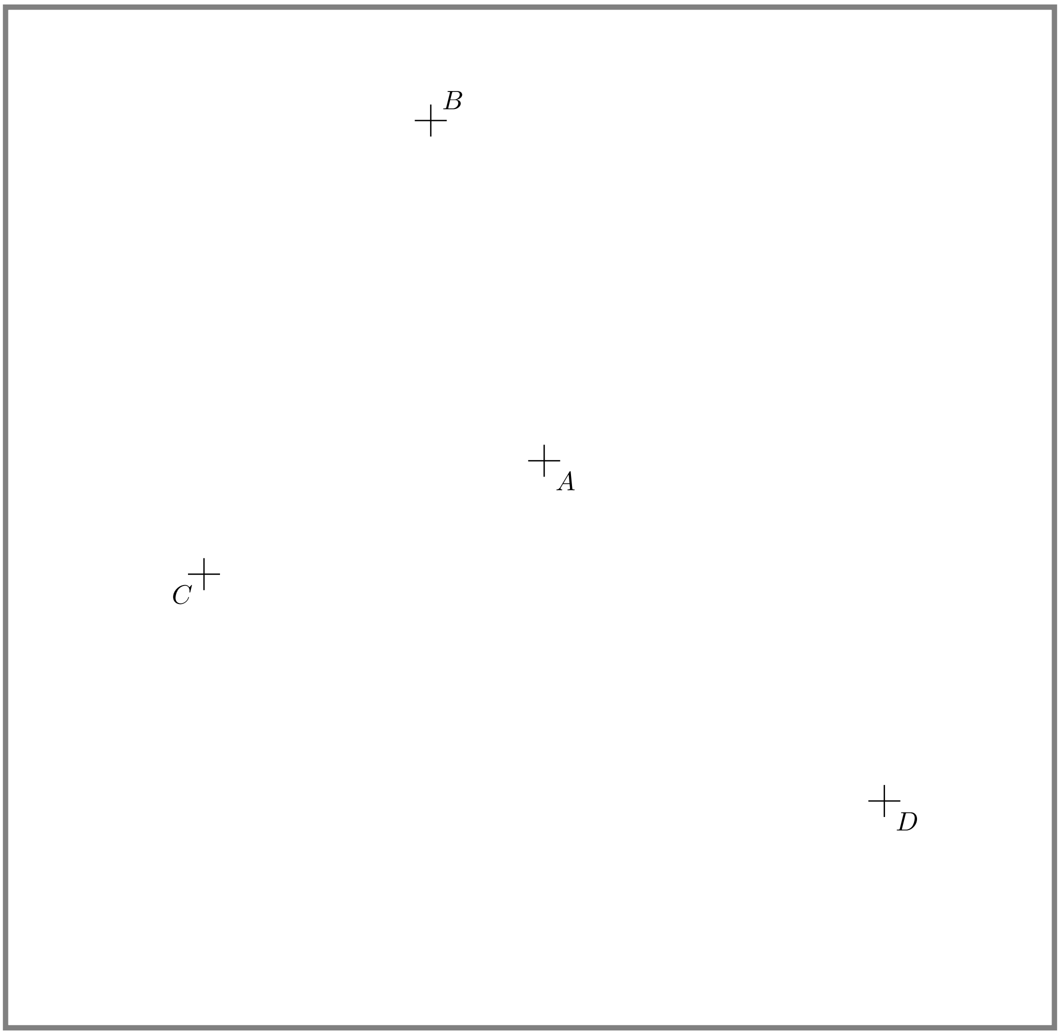
$$(A, B; C, D)_P$$

Skizzieren Sie, für welche Punkte P in dem dargestellten Ausschnitt der Ebene dieses Doppelverhältnis positiv ist, und für welche negativ. Zeichnen Sie dafür die Grenzen zwischen den Gebieten ein, und kennzeichnen jede Fläche klar mit dem für diese geltenden Vorzeichen.

Tipp: Die Grenzen zwischen dieses Bereichen sind dadurch charakterisiert, dass das Doppelverhältnis dort sein Vorzeichen wechselt. Das passiert genau bei den Werten 0 und ∞.



Hinweis: Falls Sie Ihre Konstruktion oben verwerfen möchten, streichen Sie sie deutlich durch und versuchen Sie es hier noch einmal. Wenn Sie in beiden Bildern konstruiert haben, zählt im Zweifelsfall **nur** die erste Konstruktion.



LÖSUNG:

Wie im Tipp gegeben bestimmen wir erst den Ort aller Punkte P für die $(A, B; C, D)_P$ gleich 0 oder ∞ ist. Wenn wir das Doppelverhältnis ausschreiben,

$$(A, B; C, D)_P = \frac{[A, C, P][B, D, P]}{[A, D, P][B, C, P]},$$

sehen wir dass es genau dann Null wird, wenn $[A, C, P]$ oder $[B, D, P]$ Null wird. In Geometrie übersetzt heißt dass, wenn A, C, P oder B, D, P kollinear sind. Der Ort aller Punkte, für die das Doppelverhältnis Null wird ist also die Vereinigung der Geraden $A \vee C$ und $B \vee D$. Analog überlegt man sich, dass der Ort aller Punkte, für die das Doppelverhältnis Unendlich wird ist die Vereinigung der Geraden $A \vee D$ und $B \vee C$.

Diese vier Geraden unterteilen die Ebene in Zellen. Da jede Gerade einen Vorzeichenwechsel darstellt, ist das Vorzeichen innerhalb jeder Zelle konstant und benachbarte Zellen haben unterschiedliches Vorzeichen. Es reicht also nun, für irgendeinen beliebigen Punkt das Vorzeichen von $(A, B; C, D)_P$ zu bestimmen. Anschließend kann man die Zellen schachbrettartig mit Vorzeichen versehen.

Um nun das Vorzeichen $(A, B; C, D)_P$ halbwegs einfach zu bestimmen, erinnern wir uns an die Gleichung

$$(0, \infty; \lambda, 1) = \lambda.$$

Wir interpretieren also A als 0 und B als ∞ und D als 1. Wählen wir P also die linke obere Ecke des gegebene Quadrats, so sehen wir, dass C auf der Seite von 0 liegt, auf der auch die 1 liegt. Damit ist das Vorzeichen dort positiv und wir können die Ebene auffüllen.