Technische Universität München
Fakultät für Mathematik

Klausur

Geometriekalküle

Modul MA2203

2. März 2019, 10:30 – 11:30 Uhr

Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert

Musterlösung

Aufgabe 1. Wahr oder Falsch

Entscheiden Sie bei den unten stehenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antworten kurz. Die Antworten „Wahr“ oder „Falsch“ alleine ohne Begründung reichen nicht aus, um auf eine Teilaufgabe Punkte zu bekommen.

(a) Eine projektive Transformation M des $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, die also Punkte via $p \mapsto Mp$ abbildet, der Form

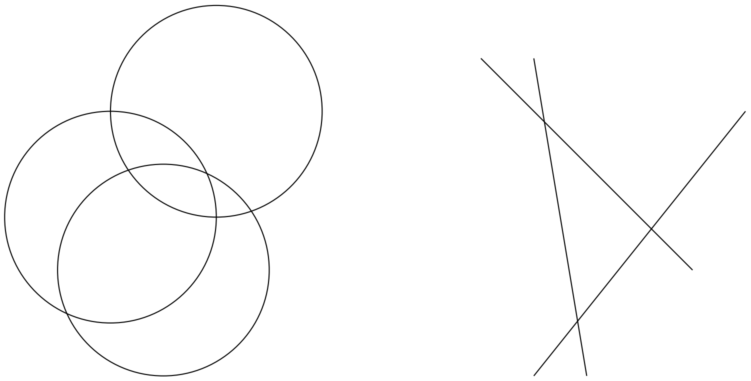
$$M = \begin{pmatrix} a & d & 0 \\ b & e & 0 \\ c & f & 1 \end{pmatrix}$$

lässt Flächen invariant genau dann, wenn $\det(M) = 1$.

(b) Es gibt eine projektive Transformation des $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ mit genau drei Fixpunkten, die nicht die Identität ist.

(c) Gegeben sei eine Gerade $g \neq l_\infty$ im $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ in Standardeinbettung. Dann sind alle Lote auf g konkurrent.

(d) Es gibt eine projektive Transformation des $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$, die die drei Kreise unten links auf die drei Geraden unten rechts abbildet.



<u>LÖSUNG:</u>

(a) Falsch. Die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

bildet, in Standardeinbettung, den endlichen Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf den Fernpunkt der Y-Achse ab. Damit wird jede endliche Fläche, die von diesem Punkt begrenzt wird, zu ∞. Zum Beispiel bildet diese Abbildung den Einheitskreis auf eine Parabel ab und erhält damit die Flache diese Kegelschnitts nicht. Vergleiche Aufgabe 2.

Außerdem lassen Spiegelungen Flächen invariant, sind aber nicht von der gegebenen Form. Es stimmen also beide Implikationen nicht.

(b) Wahr. Da projektive Transformationen durch die Bilder von vier Punkten (in allgemeiner Lage) eindeutig gegeben ist, kann man drei davon fixieren und den vierten frei bewegen. Algebraisch brauchen wir eine Matrix mit drei Eigenvektoren zu verschieden Eigenwerten. Also zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) Wahr. Sei G der Fernpunkt von g und L der Fernpunkt eines beliebigen Lots. Dann müssen $\{\{G, L\}, \{\mathtt{I}, \mathtt{J}\}\}$ auf der Ferngeraden in harmonischer Lage liegen. Dadurch ist die Position von L eindeutig bestimmt. Und das bedeutet, dass alle Lote zu g denselben Fernpunkt besitzen. Insbesondere sind sie konkurrent.

(d) Falsch. Geraden sind unendlich große Kreise. Insbesondere laufen alle Geraden durch den Fernpunkt und schneiden sich alle dort. Da projektive Transformationen Inzidenzen erhalten, müssten die Kreise sich auch in einem gemeinsamen Punkt treffen, damit so eine Transformation überhaupt existieren kann.

Aufgabe 2. Transformierte Kegelschnitte

In dieser Aufgabe sollen sie eine projektive Transformation M des $\mathbb{RP}^2$ finden, die die Normalparabel, gegeben durch die Gleichung $y = x^2$, auf den Einheitskreis, gegeben durch $x^2 + y^2 = 1$, abbildet. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Geben Sie symmetrische Matrizen A und B an, die die Parabel und den Kreis (als Kegelschnitte) beschreiben.

(b) Bestimmen Sie die Matrix M, die die Punkte

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

abbildet.

(c) Beweisen Sie, dass M die gesamte Normalparabel richtig auf den Einheitskreis abbildet; nicht nur die vier Punkte oben.

<u>Lösung:</u>

(a) Die Normalparabel wird durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

beschrieben und der Einheitskreis durch

$$B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

(b) Da die gegebenen Punkte sehr viele Nullen enthalten, können wir die Matrix M mehr oder weniger direkt hinschreiben. Die ersten beiden Punktepaare implizieren, dass die Matrix von der Form

$$M = \begin{pmatrix}* & 0 & 0\\ * & b & -a\\ * & b & a\end{pmatrix}$$

sein muss, mit passenden $a, b \in \mathbb{R}$. Der Eintrag links oben muss ungleich Null sein und wenn wir die erste Koordinate des dritte Punktepaars betrachten, ist es am einfachsten, wenn wir ihn als 1 annehmen. Die anderen Koordinaten des dritten Punktepaars bedeuten dann, dass M die Form

$$M = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a-b & b & -a\\ 1-a-b & b & a\end{pmatrix}$$

haben muss. Das vierte Punktepaar liefert dann ein einfaches LGS für a und b:

$$\begin{aligned}-2a + 2b &= 0\\ 2a + 2b - 1 &= 1\end{aligned}$$

Lösen wir es, erhalten wir

$$M = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Alternativ kann man auch stur den Algorithmus aus der Vorlesung runterarbeiten, der den Umweg über die Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

geht. Dann ist die Matrix M_1, die diese auf die gegebenen Urbildpunkte abbildet, gleich

$$M_1 = \begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Und die Matrix M_2, die die projektive Standardbasis auf die gegebenen Bildpunkte abbildet ist

$$M_2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Damit ist die gesuchte Matrix

$$M = M_2 \cdot M_1^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(c) Die kanonischste Lösung ist es, diesen letzten Punkt auf Matrizenebene nachzurechnen. (Nicht umsonst gibt es Teilaufgabe (a)...) Um uns das Invertieren von M zu sparen, überprüfen wir, ob

$$M^T B M = A$$

erfüllt ist, anstatt

$$\left(M^{-1}\right)^T A M^{-1} = B.$$

Also...

$$M^T B M = \begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix} \sim A \qquad (\checkmark)$$

Alternativ – und sehr viel einfacher – kann man sich auch einen fünften Punkt auf der Normalparabel suchen und überprüfen, ob sein Bild auf dem Einheitskreis liegt.

$$M \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}$$

und $4^2 + 3^2 = 5^2$. Passt.

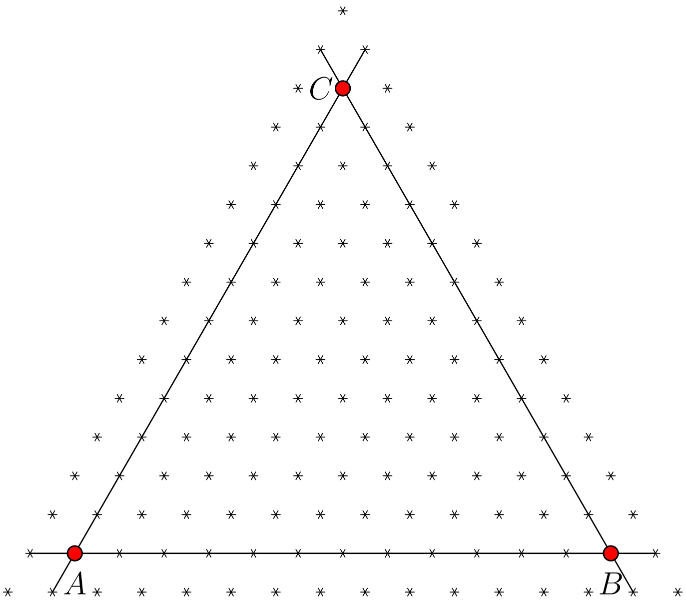
Man auch komplett geometrisch argumentieren: Die Normalparabel hat die Ferngerade und die x-Achse als Tangenten. Sie werden auf die Geraden $y = \pm 1$ abgebildet – nachrechnen oder anhand der Symmetrie der Abbildung sehen – und diese müssen Tangenten des Bildkegelschnitts sein. Hat ein nicht-degenerierter Kegelschnitt zwei solche parallele Tangenten, so muss es eine Ellipse sein. Hyperbeln und Parabeln würde diese schneiden. Wir haben also eine Ellipse, die die Koordinatenachsen in ± 1 schneiden. Und das kann nur der Einheitskreis sein.

Aufgabe 3. Eine andere Einbettung.

Sei die euklidische Ebene im $\mathbb{R}^3$ nicht kanonisch auf $z = 1$ eingebettet, sondern so, dass sie durch die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^3$ verläuft. Rechts finden Sie eine Draufsicht auf die eingebettete Ebene.



(a) Skizzieren Sie die Lage der Ebene in einem dreidimensionalen Koordinatensystem.

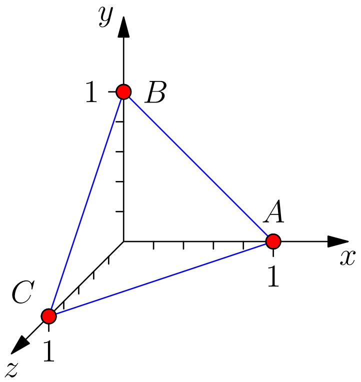
(b) Zeichnen Sie die Punkte mit den folgenden homogenen Koordinaten in diese Draufsicht ein:

$$p_1 = (1, 1, 0)^T$$
$$p_2 = (1, 1, 1)^T$$
$$p_3 = (-3, 0, -1)^T$$
$$p_4 = (2, 1, 1)^T$$
$$p_5 = (-1, 6, 7)^T$$

(c) Geben Sie die homogenen Koordinaten der Ferngerade dieser Einbettung an.

LÖSUNG:

a) Um die Ebene zu skizzieren, zeichnet man ein dreidimensionales Koordinatensystem und verbindet die drei angegebenen Punkte. Die so erhaltenen Linien kennzeichnen zugleich die Schnitte der eingebetteten Ebene mit den von den Koordinatenachsen aufgespannten Ebenen, also der (x, y)-Ebene, der (x, z)-Ebene und der (y, z)-Ebene.



b) Die Ebene im $\mathbb{R}^3$ durch die Punkte A, B und C erfüllt die Gleichung $x+y+z = 1$. Um einen Punkt in diese Ebene einzuzeichnen, müssen also seine homogenen Koordinaten so skaliert werden, dass diese Gleichung erfüllt ist. Die sich so ergebenden drei Koordinaten seien mit a, b und c bezeichnet.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x+y+z) \begin{pmatrix} \frac{x}{x+y+z} \\ \frac{y}{x+y+z} \\ \frac{z}{x+y+z} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a &:= \tfrac{x}{x+y+z} \\ b &:= \tfrac{y}{x+y+z} \\ c &:= \tfrac{z}{x+y+z} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die Punkte aus der Angabe:

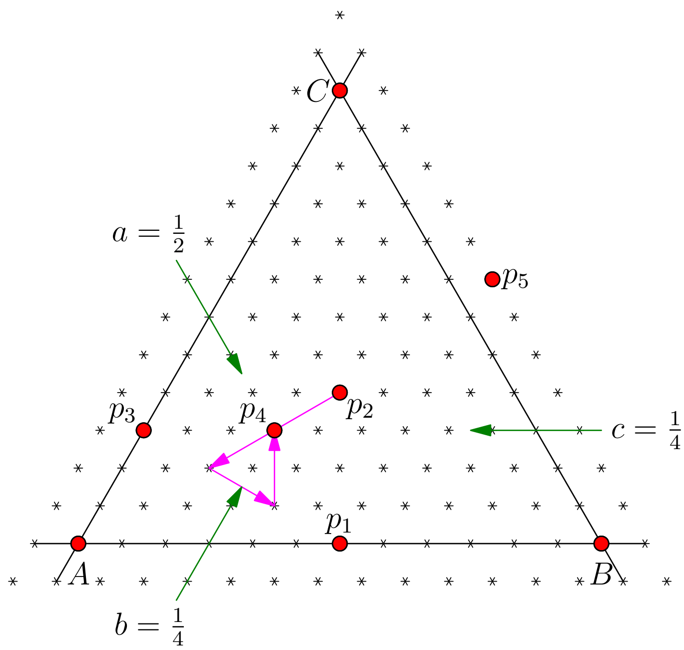
$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad p_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$p_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad p_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = 12 \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{7}{12} \end{pmatrix}$$

Die so gefundenen Punkte in der eingebetteten Ebene muss man jetzt noch richtig in die Zeichenebene eintragen. Zum besseren Verständnis unterscheidet diese Erklärung zwischen den dreidimensionalen Einheitsvektoren A, B, C, wie sie in der Angabe vorgegeben sind, und ihren zweidimensionalen Bildern A', B' und C', wie man sie in der Zeichenebene sehen kann.

Da die einzelnen Einträge der umgeformten Vektoren sich zu 1 addieren, kann man sie auch als baryzentrische Koordinaten des gesuchten Punktes auffassen. Wenn man die kartesischen Koordinaten der Bilder A', B' und C' in der Ebene $\mathbb{R}^2$ hätte, könnte man die Koordinaten der gewünschten Punkte als $aA' + bB' + cC'$ errechnen.

Will man sich den Umweg über das kartesische Koordinatensystem sparen, kann man auch direkt in Dreieckskoordinaten denken. Dabei stellen alle zu $A'B'$ paralellen Geraden diejenigen Linien dar, die die gleiche c-Koordinate haben. Dreidimensional entspricht dies den Schnitten mit Ebenen, die zur xy-Ebene parallel sind. Bei $A'B'$ selbst ist diese c-Koordinate 0, da sich alle Punkte auf der Geraden $A'B'$ allein als Linearkombination aus A' und B' ergeben bzw. direkt in der xy-Ebene liegen. Bei C' ist diese Koordinate 1 und die anderen beiden Koordinaten hingegen 0. Werte zwischen 0 und 1 sind dazwischen auf Parallelen zu $A'B'$ in gleichmäßigen Abständen verteilt. Gleiches gilt für die anderen Koordinaten. In der Skizze ist dieses Verfahren für den Punkt p_4 in Grün illustriert.



Eine andere Methode, um die Punkte einzuzeichnen und sich die gesamte Situation vorzustellen, ist die Projektion dreidimensionaler Schritte in Koordinatenrichtungen. Dazu stellt man sich wirklich die Zeichenebene als Draufsicht auf eine Ebene im dreidimensionalen Raum vor. Der Ursprung des dreidimensionalen Koordinatensystems liegt also direkt hinter dem Mittelpunkt des Dreiecks. Die orthogonale Projektion, die den Raum in die Zeichenebene abbildet, kann durch eine Projektionsmatrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ dargestellt werden. Wenn man unbedingt Zahlen für diese Matrix angeben will, mit einem im orthogonalen Koordinatensystem, in dem der Umkreis des Dreiecks 1 ist, so wären das die folgenden.

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Die konkreten Zahlen in der Matrix sind jedoch eigentlich für die Überlegung irrelevant. Wichtig ist, dass der einzuzeichnende Punkt sich ergibt als

$$p_4' = M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M(aA + bB + cC) = a \cdot MA + b \cdot MB + c \cdot MC = aA' + bB' + cC'$$

Es macht also keinen Unterschied, ob man die Linearkombination der Einheitsvektoren projiziert, oder erst die Einheitsvektoren projiziert und dann von diesen Projektionen die Linearkombination bildet. Man kann daher die baryzentrischen Koordinaten $(a, b, c)^T$ auch interpretieren als Koeffizienten, mit denen man ausgehend vom Mittelpunkt des Dreiecks in Richtung der jeweiligen Ecken gehen muss. Wichtig ist hier, dass man wirklich alle drei Schritte geht. Anders als bei den Dreieckskoordinaten, wie sie oben beschrieben wurden, ergibt sich hier nicht der letzte Schritt von alleine. In der Grafik sind die drei Schritte in Magenta eingezeichnet, und zwar wieder für den Punkt p_4 und in der Reihenfolge a, b, c ausgeführt.

c) Die Ferngerade entspricht dem zweidimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$, der mit der eingebetteten Ebene keine gemeinsamen Punkte hat, also parallel zu dieser Verläuft. Repräsentiert wird dieser Untervektorraum durch seinen Normalenvektor. Das ist in diesem Fall der Vektor $(1, 1, 1)^T$. Die Ferngerade entspricht im Dreidimensionalen also dem durch $x + y + z = 0$ beschriebenen Untervektorraum.

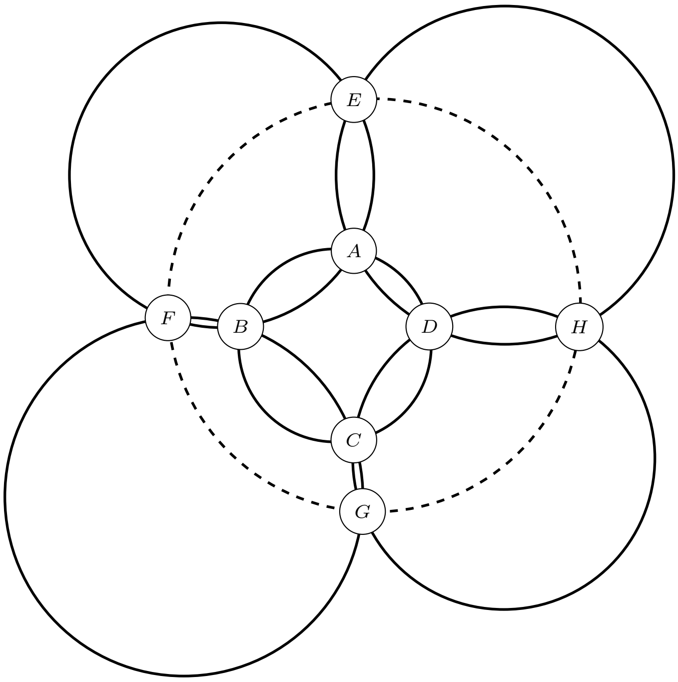
Aufgabe 4. Satz von Miquel

Gegeben seien die acht paarweise verschiedenen Punkte A bis H in der euklidischen Zeichenebene. Beweisen Sie den folgenden Satz: Wenn die Punktequadrupel

$$(C,\ A,\ B,\ D)$$
$$(B,\ E,\ A,\ F)$$
$$(B,\ G,\ F,\ C)$$
$$(D,\ G,\ C,\ H)$$
$$(D,\ E,\ H,\ A)$$

kozirkular sind, so ist es auch das Punktequadrupel

$$(E,\ G,\ F,\ H).$$



<u>LÖSUNG:</u>

Wir fassen die Punkte A bis H als endliche Punkte im $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ auf. Dann sind vier davon genau dann kozirkular, wenn ihr Doppelverhältnis reell ist. Wir versuchen nun, das Doppelverhältnis der vier Punkte E, G, F, H durch die Doppelverhältnisse der anderen fünf Quadrupel auszudrücken. Verwenden wir dabei nur Körperoperation, so muss $(E, G; F, H)$ reell sein, wenn die anderen Doppelverhältnisse es sind. Um einen großen Term, der aus fünf Doppelverhältnissen zusammengesetzt ist, zu einem einzigen Doppelverhältnis zu vereinfachen, sollte dieser nur Produkte und Quotienten verwenden. Dann können passende Determinanten einfach gekürzt werden.

Also, multiplizieren wir einfach die Doppelverhältnisse der gegebenen Quadrupel und sehen, was passiert.

Und wir nehmen einfach die Reihenfolge der Punkte, die in der Angabe steht. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
&(C,A;B,D)\cdot(B;E;A,F)\cdot(B,G;F,C)\cdot(D,G;C,H)\cdot(D,E;H,A)\\
=&\frac{[CB][AD]}{[CD][AB]}\cdot\frac{[BA][EF]}{[BF][EA]}\cdot\frac{[BF][GC]}{[BC][GF]}\cdot\frac{[DC][GH]}{[DH][GC]}\cdot\frac{[DH][EA]}{[DA][EH]}\\
=&(-1)^4\frac{[EF][GH]}{[EH][GF]}\\
=&(E,G;F,H).
\end{aligned}$$

Praktischerweise kürzt sich alles so weg, dass genau $(E,G;F,H)$ übrig bleibt. Dass wir tatsächlich kürzen können, liegt daran, dass alle Punkte paarweise verschieden und damit alle Determinanten ungleich Null sind. Und da der Term am Anfang nach Voraussetzung reell ist, ist es auch das Doppelverhältnis am Ende.

Alternativ kann man die Punkte als endliche Punkte im $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ auffassen. Dann liegen vier davon genau dann auf einem Kreis, wenn sie und $\mathtt{I}$ und $\mathtt{J}$. Die gegebenen Kozirkularitäten übersetzen sich damit in die fünf Gleichungen:

$$\begin{aligned}
[CB\mathtt{I}][AD\mathtt{I}][CD\mathtt{J}][AB\mathtt{J}] &= [CB\mathtt{J}][AD\mathtt{J}][CD\mathtt{I}][AB\mathtt{I}]\\
[BA\mathtt{I}][EF\mathtt{I}][BF\mathtt{J}][EA\mathtt{J}] &= [BA\mathtt{J}][EF\mathtt{J}][BF\mathtt{I}][EA\mathtt{I}]\\
[BF\mathtt{I}][GC\mathtt{I}][BC\mathtt{J}][GF\mathtt{J}] &= [BF\mathtt{J}][GC\mathtt{J}][BC\mathtt{I}][GF\mathtt{I}]\\
[DC\mathtt{I}][GH\mathtt{I}][DH\mathtt{J}][GC\mathtt{J}] &= [DC\mathtt{J}][GH\mathtt{J}][DH\mathtt{I}][GC\mathtt{I}]\\
[DH\mathtt{I}][EA\mathtt{I}][DA\mathtt{J}][EH\mathtt{J}] &= [DH\mathtt{J}][EA\mathtt{J}][DA\mathtt{I}][EH\mathtt{I}]
\end{aligned}$$

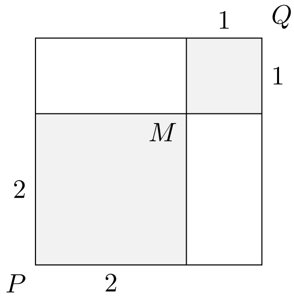
Alle Determinanten hier sind ungleich Null, da sie zwei verschiedene, endliche Punkte und einen komplexen Punkt auf der Ferngerade enthalten. Somit können wir alle linken Seiten multiplizieren und alle rechten Seiten auch, um eine neue Gleichung zu erhalten. Wir kürzen alle Determinanten und erhalten

$$[EF\mathtt{I}][GH\mathtt{I}][EH\mathtt{J}][GF\mathtt{J}] = [EF\mathtt{J}][GH\mathtt{J}][EH\mathtt{I}][GF\mathtt{I}].$$

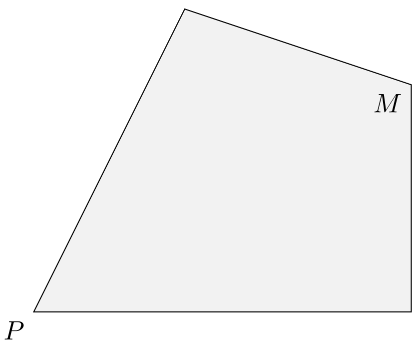
Und diese Gleichung beschreibt die Kozirkularität, die wir zeigen wollen.

Aufgabe 5. Quadrate

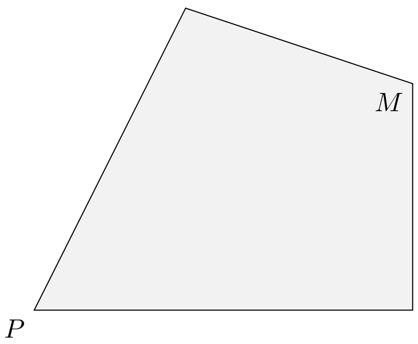
Unten sehen sie ein Quadrat in der euklidischen Zeichenebene, dass von den Punkten P und Q aufgespannt wird. In dieses sind zwei kleinere Quadrate mit Seitenlängen 2 bzw. 1 so einbeschrieben, dass sie sich in der Mitte im Punkt M berühren.



Unten sehen ein perspektivisch verzerrtes Bild dieser Situation. Gegeben ist das Bild des größeren der beiden einbeschriebenen Quadrate mit Ecken P und M. Konstruieren Sie das Bild des Punktes Q.

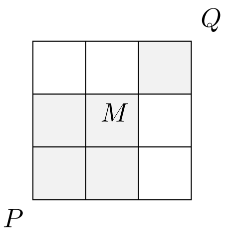


Hinweis: Falls Sie Ihre Konstruktion oben verwerfen möchten, streichen Sie sie deutlich durch und versuchen Sie es hier noch einmal. Wenn Sie in beiden Bildern konstruiert haben, zählt im Zweifelsfall **nur** die erste Konstruktion.



LÖSUNG:

Hier gibt es mindestens zwei Möglichkeiten, zu Q zu gelangen. Die Grundidee ist diesselbe: Wir stellen uns das große Quadrat als Tic-Tac-Toe-Feld vor, bei dem zwei Linien fehlen.



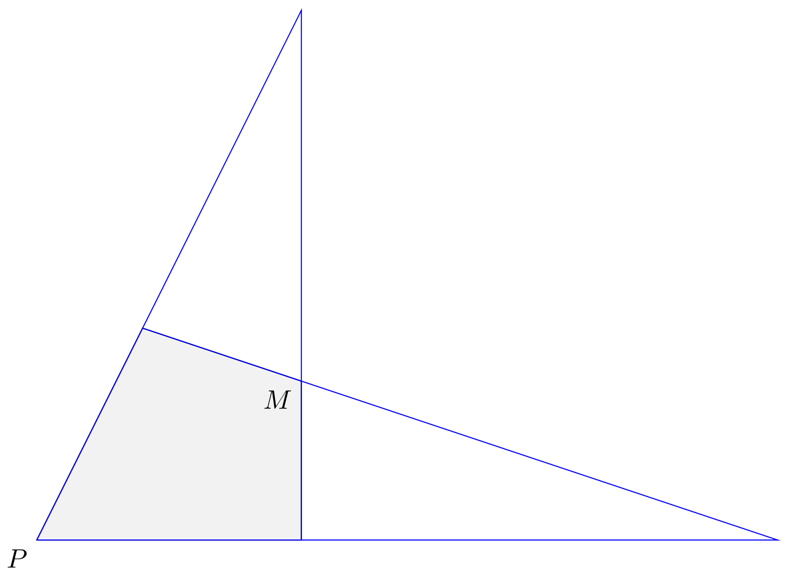
Man kann das ganze nun lösen, indem man nur eine Kante des großen Quadrats betrachtet – sagen wir die untere. Parametrisiert man die linke Ecke mit 0 und die rechte mit 3(, welche wir konstruieren wollen), so entspricht die gegebene Ecke im verzerrten Bild der 2. Durch den Fernpunkt haben wir auch noch ∞ gegeben. Wir können damit erst den Punkt 1 konstruieren, da

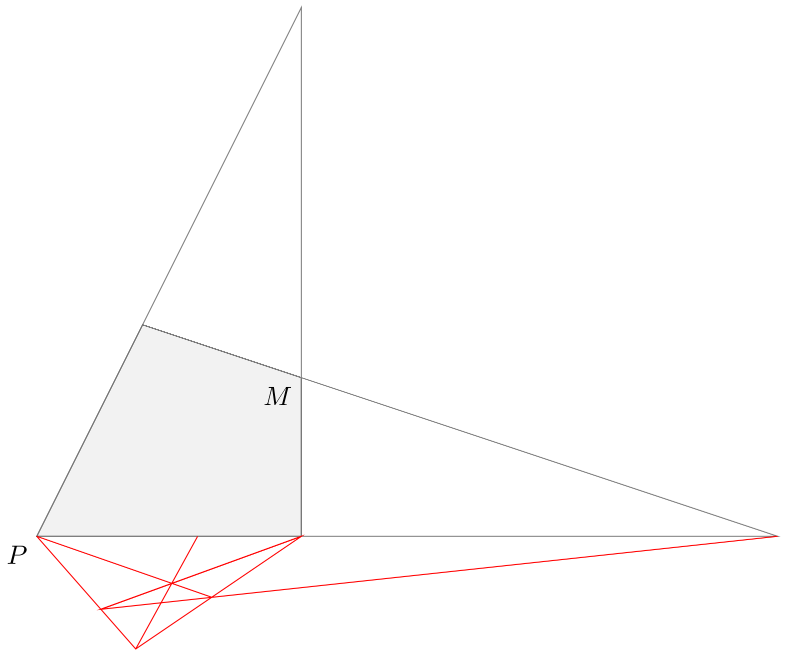
$$(1, \infty; 0, 2) = -1$$

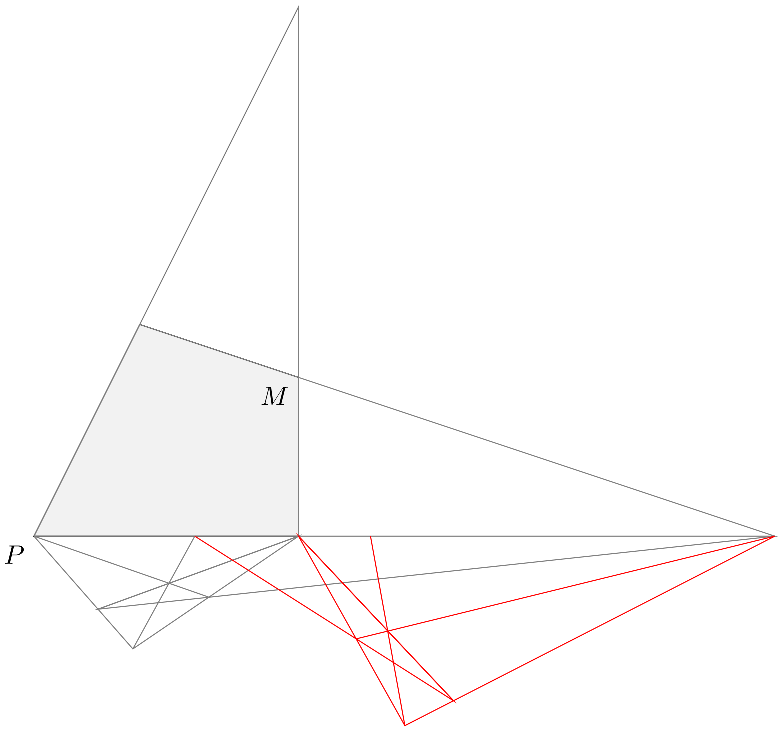
und anschließend 3, da

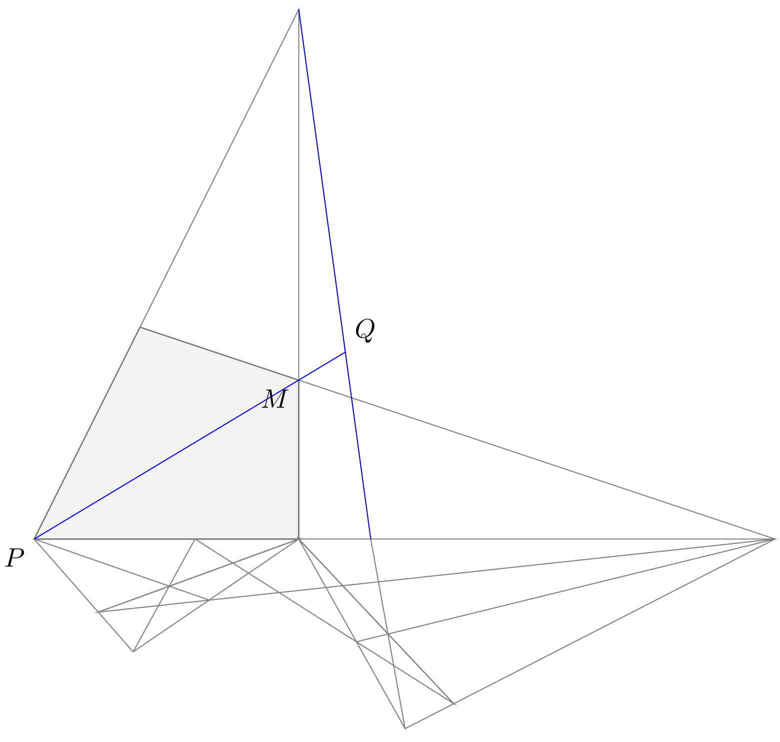
$$(2, \infty; 1, 3) = -1.$$

Anschließend könnten wir das Ganze auch noch auf einer der senkrechten Kanten machen. Oder wir nehmen einfach die Diagonale im Quadrat um zu Q zu gelangen.

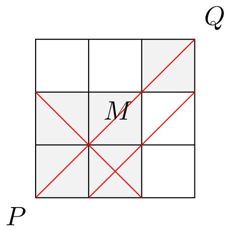


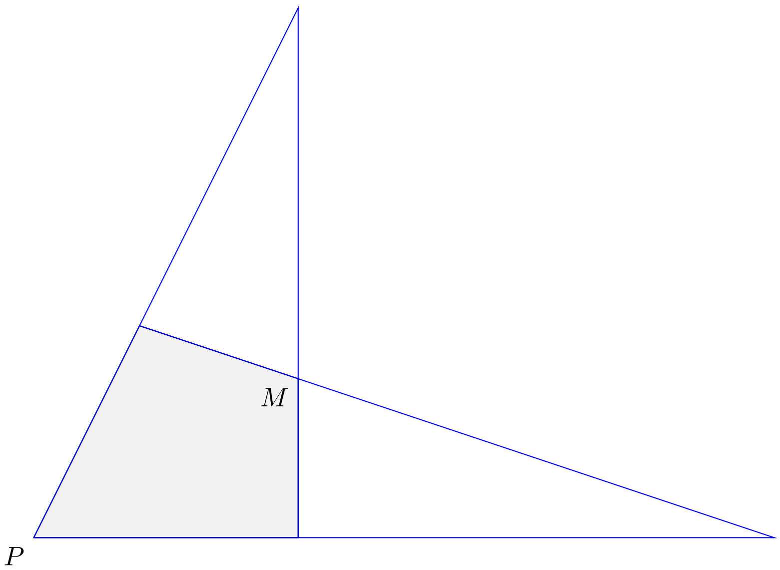


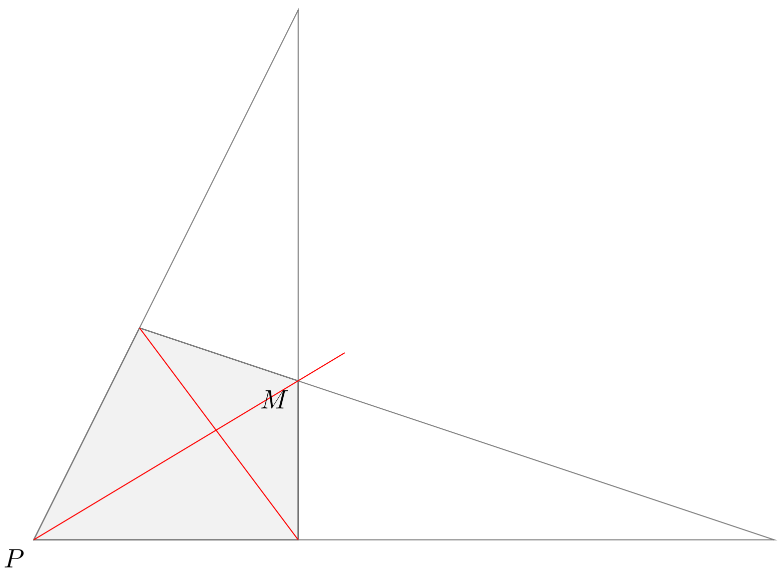


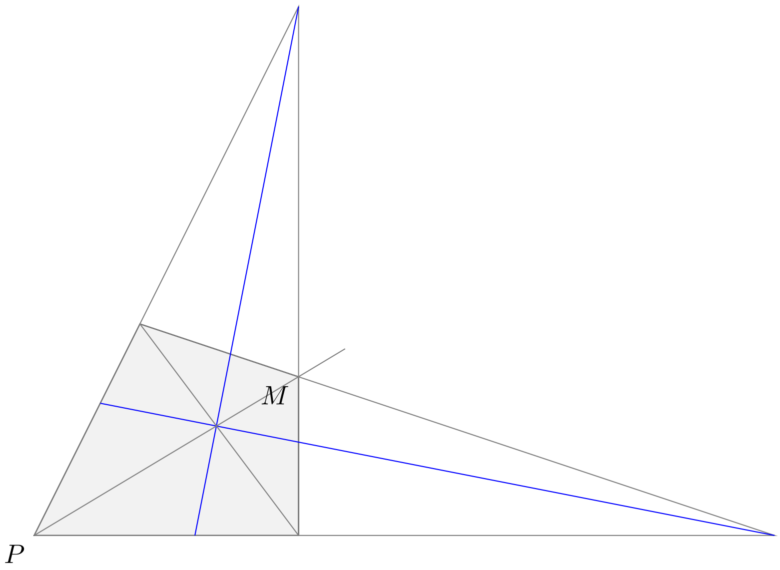


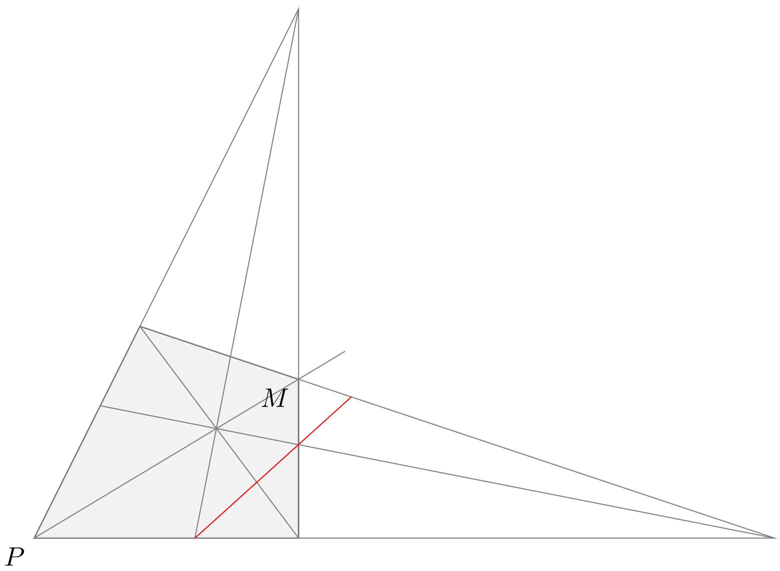
Wenn man allerdings ein bisschen nachdenkt, kann man das Ganze auch schneller und einfacher lösen. In der unverzerrten Zeichnung kann man einige Diagonalen finden, die man im verzerrten Bild sehr leicht konstruieren kann.

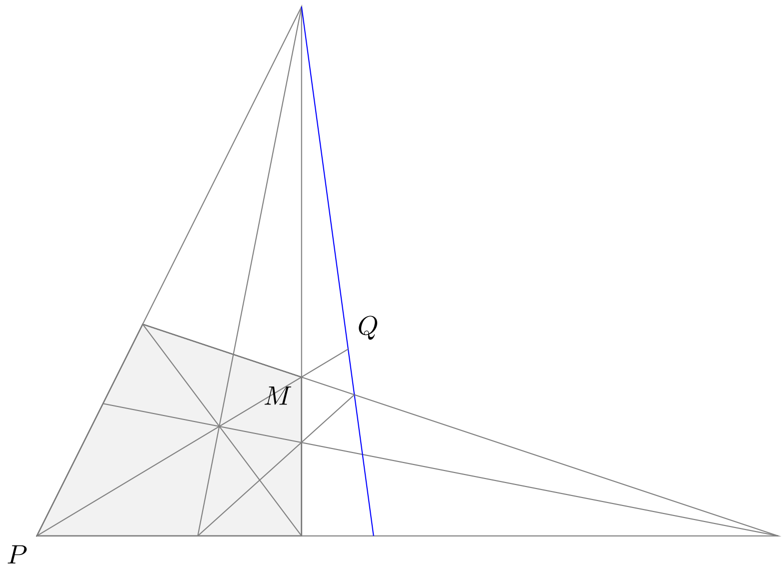

Q
M
P


M
P


M
P


M
P


M
P


Q
M
P