Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Bernhard Werner

Geometriekalküle WS 2018/19

www-m10.ma.tum.de/GeometrieKalkueleWS1819

Aufgabenblatt 7 (2019–02–04)

Level 0

Aufgabe 1. Wiederholung.

Können Sie die folgenden Fragen beantworten? Falls nein, schlagen Sie die entsprechenden Begriffe noch einmal im Vorlesungsskript nach.

a) Gegeben sei ein endlicher Punkt P des $\mathbb{RP}^2$ mit euklidischen Koordinaten (x, y). Können Sie die homogenen Koordinaten der Gerade durch P und den Ursprung der Zeichenebene bestimmen?

b) Von wie vielen Punkten im $\mathbb{CP}^1$ muss man die Bilder unter einer projektiven Transformation kennen, um diese bestimmen zu können?

c) Von wie vielen Punkten im $\mathbb{RP}^2$ muss man die Bilder unter einer projektiven bzw. affinen Transformation kennen, um diese bestimmen zu können?

d) Wenn man den $\mathbb{RP}^2$ über die Einbettung des $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^3$ definiert, kann dann jede Ebene im $\mathbb{R}^3$ als Einbettungsebene genutzt werden?

e) Gegeben seien Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ und eine Matrix $M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

- Können Sie mit Argumenten der projektiven Geometrie zeigen, dass ein $\lambda \neq 0$ existiert, so dass
$$Mv \times Mw = \lambda \cdot \left(M^{-1}\right)^T \cdot (v \times w?$$
- Können Sie mit Mitteln der linearen Algebra beweisen, dass $\lambda = \det(M)$ ist? (Oder, in anderen Worten, dass $Mv \times Mw = \mathrm{adj}(M) \cdot (v \times w)$?)

f) Das Doppelverhältnis von vier Punkten im $\mathbb{RP}^1$ kann bis zu sechs verschiedene Werte annehmen – je nachdem, in welcher Reihenfolge die Punkte im Doppelverhältnis stehen. Gibt es einen Fall, sodass das Doppelverhältnis immer denselben Wert annimmt, unabhängig von der Reihenfolge der Punkte?

g) Sei eine projektive Transformation des $\mathbb{RP}^2$ gegeben durch eine Matrix A. Wie berechnet man die Fixgeraden der Transformation?

h) Wann ist eine aus Punkten berechnete Größe projektiv invariant?

i) Für Punkte X, Y, Z im $\mathbb{RP}^2$ und eine projektive Transformation M des $\mathbb{RP}^2$ gilt
$$[MX, MY, MZ] = \det(M) \cdot [X, Y, Z].$$
Können Sie das beweisen?

j) Eine **perspektivische Verzerrung** ist eine projektive Transformation des $\mathbb{RP}^2$, die die Ferngerade auf eine endliche Gerade abbildet. Zwei perspektivische Verzerrungen nennen wir **verwandt**, falls ihre Bilder der Ferngerade gleich sind.

- Können Sie eine perspektivische Verzerrung angeben?
- Gibt es überhaupt *verschiedene* perspektivische Verzerrungen, die verwandt sind? Falls ja, können Sie zwei angeben? Falls nein, warum nicht?

k) Im Lauf der Vorlesung haben wir verschiedene Arten von Objekten im $\mathbb{RP}^2$ definiert. Wir können sie immer durch Matrizen darstellen. Zwei solche Matrizen beschreiben dasselbe Objekt, wenn sie sich nur durch einen skalaren Vorfaktor (ungleich Null) unterscheiden. Gibt es eine Klasse von Objekten, für die diese Bedingung an die Repräsentaten nicht gelten muss? Oder anders gefragt: Können zwei Matrizen dasselbe Objekt beschreiben, ohne dass sie ein Vielfaches voneinander sind?

l) Wenn man drei konkurrente Geraden a, b, c im $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ gegeben hat, kann man eine vierte Gerade d konstruieren, die durch denselben Schnittpunkt läuft und mit den ersten drei in harmonischer Lage liegt. Es gilt dann also

$$(a, b; c, d) = -1.$$

Können Sie zwei verschiedene Konstruktionen angeben?

m) Vier nicht-lineare Punkte A, B, C, D im $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ sind genau dann kozirkular, wenn $(A, B; C, D)$ reell ist. Können Sie diese Aussage begründen?

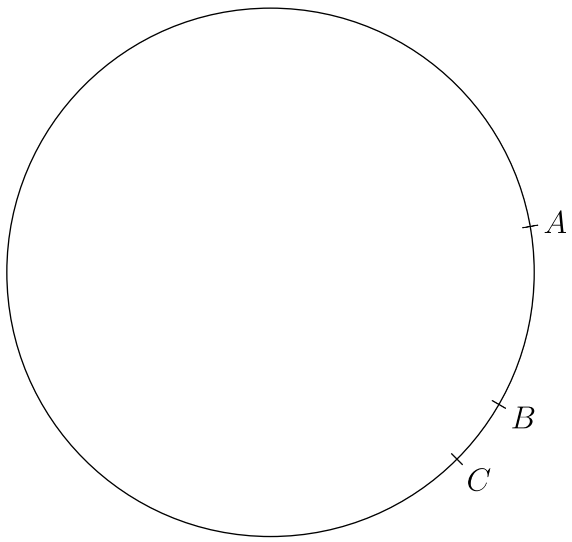
Level 1

Aufgabe 2. Doppelverhältnisse im Kreis.

a) Es seien A, B, C, D vier endliche Punkte in $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, von denen keine drei auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Beweisen Sie: Die Punkte A, B, C, D liegen *genau dann* auf einem Kreis, wenn ihr Doppelverhältnis von $\mathtt{I}$ aus betrachtet reell ist, also $(A, B; C, D)_{\mathtt{I}} \in \mathbb{R}$.

b) Seien A, B, C, D vier Punkte auf einem Kreis. Begründen Sie *kurz*, warum das Doppelverhältnis $(A, B; C, D)_E$ gesehen von einem Punkt E auf dem Kreis unabhängig davon ist, wo auf dem Kreis sich der Punkt E befindet.

c) In der nachfolgenden Zeichnung sind drei Punkte A, B, C sowie der durch sie definierte Kreis dargestellt. Konstruieren Sie einen reellen Punkt D, so dass $A, B; C, D$ von $\mathtt{I}$ aus gesehen in harmonischer Lage sind.



Aufgabe 3. Lot fällen.

Gegeben seien die homogenen Koordinaten eines Punktes P und einer Gerade g. Geben Sie eine Vorschrift zur projektiven Bestimmung des Lotfußpunkts M des Lots von P auf g.

Aufgabe 4. Rechnen in einer Cayley-Klein-Geometrie.

Gegeben sei die Cayley-Klein-Geometrie mit dem Einheitskreis als Fundamentalgebilde und den Konstanten $c_{dist} = \frac{1}{2}$ und $c_{ang} = \frac{1}{2}$ sowie die Punkte

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und die Geraden

$$l = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad m = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie den Abstand zwischen P und Q.

(b) Berechnen Sie den Winkel zwischen l und m.

Aufgabe 5. Koplanare Punkte

Entscheiden Sie, ob die folgenden Punkte in einer gemeinsamen Ebene im $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ liegen.

$$\begin{aligned} A &= (1, 3, 2, 1)^T \\ B &= (2, 1, -3, 1)^T \\ C &= (0, 4, 0, 0)^T \\ D &= (0, 1, 1, 1)^T \end{aligned}$$

Aufgabe 6. Geraden in $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$.

Die Verbindungsgerade von zwei Punkten $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$ und $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)^T$ im $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ kann durch einen sechsdimensionalen Plücker-Koordinaten-Vektor beschrieben werden.

a) Geben Sie den Plücker-Koordinaten-Vektor der Geraden an. Schreiben Sie dabei jeden einzelnen Eintrag explizit als Determinante, deren Einträge Koordinaten der Ausgangspunkte a und b sind.

b) Zeigen Sie, dass die Koordinaten der Gerade bis auf skalares Vielfaches unabhängig von der Wahl der Punkte auf der Geraden sind.

c) Was geschieht, wenn die beiden Punkte zusammenfallen?