



---

Level 0

---

**Aufgabe 1. Grundlagen.**

- (a) Finden Sie eine Klasse von Matrizen, die nie Kegelschnitte darstellen kann.
- (b) Die Punkte  $A$  bis  $E$  definieren einen Kegelschnitt, der durch eine Matrix  $M$  repräsentiert werden kann. Bestimmen Sie diese Matrix. Geben Sie zunächst Ihren Ansatz an, und berechnen Sie dann das Ergebnis.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- (c) Gegeben seien die homogenen Koordinaten eines endlichen Punktes in  $\mathbb{CP}^1$ :

$$\begin{pmatrix} a + bi \\ c + di \end{pmatrix} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

- Geben Sie die homogenen Koordinaten des entsprechenden Punktes in  $\mathbb{RP}^2$  an. Verwenden Sie dazu nur Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen, ausgehend von den vier oben angegebenen reellen Zahlen.
- Was ist das Ergebnis dieser Abbildung, wenn die Eingabe den unendlich fernen Punkt in  $\mathbb{CP}^1$  beschreibt?

**Aufgabe 2. Dualisieren und Doppelverhältnis.**

Es gilt der folgende Satz:

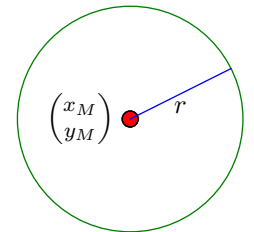
*Gegeben seien zwei verschiedenen Geraden  $g$  und  $h$  in der reellen projektiven Ebene  $\mathbb{RP}^2$  und ein Punkt  $Z$ , der weder auf  $g$  noch auf  $h$  liege. Vier paarweise verschiedene Geraden  $z_1, z_2, z_3, z_4$  durch den Punkt  $Z$  schneiden die beiden Geraden  $g$  bzw.  $h$  in je vier Punkten  $G_1, G_2, G_3, G_4$  bzw.  $H_1, H_2, H_3, H_4$ , und für die beiden Doppelverhältnisse  $(G_1, G_2; G_3, G_4)$  und  $(H_1, H_2; H_3, H_4)$  gilt:*

$$(G_1, G_2; G_3, G_4) = (H_1, H_2; H_3, H_4)$$

- a) Fertigen Sie eine Skizze zu diesem Satz an.
- b) Dualisieren Sie diesen Satz.
- c) Beweisen Sie diesen Satz.

**Aufgabe 3. Kreis als Quadrik.**

Berechnen Sie die symmetrische Matrix in  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ , die einen Kreis mit Mittelpunkt  $(x_M, y_M)^T$  und Radius  $r$  als Quadrik beschreibt.



**Aufgabe 4. Sechs Punkte auf einem Kegelschnitt.**

Es seien fünf Punkte  $P_1, \dots, P_5$  im  $\mathbb{RP}^2$  gegeben. Sie bestimmen im Allgemeinen einen Kegelschnitt

$$C = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{RP}^2 \mid a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot z^2 + d \cdot xy + e \cdot yz + f \cdot xz = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass ein Punkt  $P_6$  genau dann auf  $C$  liegt, wenn

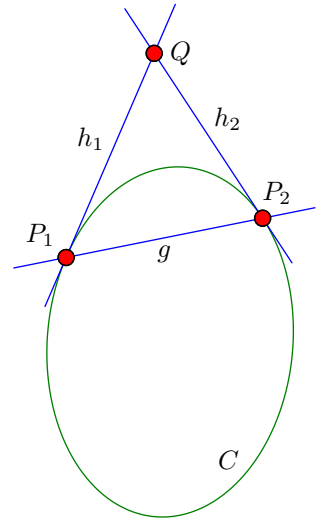
$$\det \begin{pmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & x_1 y_1 & y_1 z_1 & x_1 z_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & x_2 y_2 & y_2 z_2 & x_2 z_2 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & x_3 y_3 & y_3 z_3 & x_3 z_3 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & x_4 y_4 & y_4 z_4 & x_4 z_4 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & x_5 y_5 & y_5 z_5 & x_5 z_5 \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & x_6 y_6 & y_6 z_6 & x_6 z_6 \end{pmatrix} = 0$$

**Aufgabe 5. Kegelschnitte und Tangenten.**

Gegeben sei ein nicht degenerierter Kegelschnitt  $C$ , der durch eine symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  beschrieben wird:

$$C = \{p \in \mathbb{RP}^2 \mid p^T \cdot A \cdot p = 0\}$$

- a) Zeigen Sie, dass  $h = A \cdot p$  die Tangente an einen Punkt  $p$  auf  $C$  ist.
- b) Finden Sie zu einer Tangente  $h$  an  $C$ , deren homogene Koordinaten gegeben seien, den Berührungspunkt  $p$ .
- c) Betrachten Sie nebenstehende Konstruktion. Gegeben sei der Kegelschnitt  $C$  sowie ein Punkt  $Q$ . Die **Polare**  $g$  von  $Q$  bezüglich  $C$  lässt sich wie abgebildet definieren: Man legt von  $Q$  aus die Tangenten  $h_1$  und  $h_2$  an  $C$ , bestimmt die Berührungspunkte  $P_1$  und  $P_2$  und verbindet diese um  $g$  zu erhalten. Entwickeln Sie eine möglichst einfache, geschlossene Formel, um die Polare aus  $C$  und  $Q$  zu berechnen.



**Aufgabe 6. Mengen in  $\mathbb{CP}^1$ .**

In den einzelnen Teilaufgaben sind Punkt Mengen in  $\mathbb{CP}^1$  angegeben.

- Zeichnen Sie diese (soweit möglich) in das unten abgebildete Koordinatensystem ein, und beschriften Sie diese deutlich.
- Wenn eine Menge aus endlich vielen Punkten besteht, so geben Sie diese zusätzlich explizit als Aufzählung mithilfe von (homogenen) Koordinatenvektoren an.
- Sie müssen Ihre Ergebnisse nicht begründen.

a)  $A = \left\{ P \in \mathbb{CP}^1 \mid p^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \text{ für alle Repräsentanten } p \text{ des Punktes } P \right\} \subseteq \mathbb{CP}^1$

b)  $B = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 + 2i \\ -1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\} \subseteq \mathbb{CP}^1$

c)  $C = \left\{ P \in \mathbb{CP}^1 \mid \left( P, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{CP}^1$

d)  $D = \{P \in \mathbb{CP}^1 \mid (P, Q; R, S) = (P, R; S, Q)\} \subseteq \mathbb{CP}^1$  mit  $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} \sqrt{3} + 3i \\ 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Punkte  $Q$  bis  $S$  sind bereits in das Koordinatensystem eingezeichnet. Sie bilden ein gleichseitiges Dreieck.

*Hinweise:*

- Das Koordinatensystem stellt die Standardeinbettung von  $\mathbb{CP}^1$  dar, also mit  $y = 1$ .
- $\mathbb{CP}^1$  Bezeichnet in den Formeln dieser Aufgabe die Menge aller Punkte der komplexen projektiven Gerade.

