Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Bernhard Werner

Geometriekalküle WS 2018/19

www-m10.ma.tum.de/GeometrieKalkueleWS1819

Aufgabenblatt 3 (2018–11–19)

Level 0

Aufgabe 1. Grundlagen.

(a) Zeigen Sie, dass das repräsentantenweise Addieren von Punkten im $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, also die Verknüpfung $[P]+[Q] := [P+Q]$, nicht wohldefiniert ist.

(b) Wir können Geraden l im $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ auf zweierlei Weisen darstellen: Einmal als „abstraktes“ Objekt durch die homogenen Koordinaten $(a,b,c)^T$, sprich die Gleichung $ax+by+c=0$; oder auch als konkrete Menge von Punkten

$$\{[\lambda A + \mu B] \;\mid\; (\lambda,\mu) \neq (0,0)\}$$

für passende Punktrepräsentanten A, B auf l.

- Finden Sie (mindestens) einen Vorteil jeder Darstellung gegenüber der anderen.
- Finden Sie (mindestens) zwei weitere Objekte/Strukturen in der Mathematik, die sowohl eine abstrake als auch konkrete Darstellung haben.

(c) Gibt es im $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$...

- ... eine projektive Transformation, die genau einen Fixpunkt hat?
- ... eine projektive Transformation, die genau zwei Fixpunkte hat?
- ... eine projektive Transformation, die genau drei Fixpunkte hat?
- ... eine projektive Transformation, die genau vier Fixpunkte hat?
- ... eine projektive Transformation, die unendlich viele Fixpunkte hat, aber nicht die Identität ist?

(d) Gegeben seien zwei Punktetripel A, B, C und A', B', C', die jeweils in allgemeiner Lage sind. Wie findet man eine projektive Transformation, die A auf A', B auf B', und C auf C' abbildet?

Aufgabe 2. Projektive Transformationen.

Gegeben seien die folgenden Punkte in homogenen Koordinaten.

$$\begin{array}{llll} a = (1,0,0)^T & b = (0,1,0)^T & c = (0,0,1)^T & d = (1,1,1)^T \\ p_1 = (2,-1,1)^T & p_2 = (-1,2,1)^T & p_3 = (0,0,1)^T & p_4 = (1,1,1)^T \\ p'_1 = (1,-1,1)^T & p'_2 = (2,2,1)^T & p'_3 = (-1,1,1)^T & p'_4 = (1,1,1)^T \end{array}$$

Bestimmen Sie eine projektive Transformation $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, die die Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 auf die Punkte p'_1, p'_2, p'_3, p'_4 abbildet, d.h. $[M \cdot p_i] = [p'_i]$ für $i = 1, \ldots, 4$. Gehen Sie dabei wie folgt vor.

a) Bestimmen Sie eine projektive Transformation M_1, die die Punkte a, b, c, d auf die Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 abbildet.

b) Bestimmen Sie eine projektive Transformation M_2, die die Punkte a, b, c, d auf die Punkte p'_1, p'_2, p'_3, p'_4 abbildet.

c) Bestimmen Sie M.

Aufgabe 3. Dualisieren.

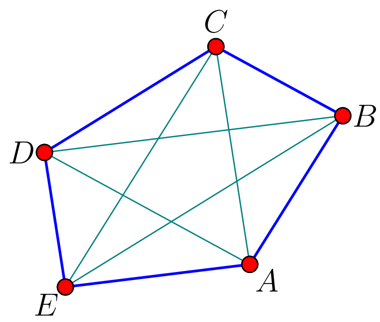
Gegeben sei der folgende Satz:

Wenn für fünf Punkte A, B, C, D, E in $\mathbb{R}^2$ die folgenden vier Paare von Verbindungsgeraden parallel sind:

$$\begin{array}{ll} (A \vee B) \parallel (C \vee E) & (B \vee C) \parallel (D \vee A) \\ (C \vee D) \parallel (E \vee B) & (D \vee E) \parallel (A \vee C) \end{array}$$

dann ist auch das folgende Geradenpaar parallel:

$$(E \vee A) \parallel (B \vee D)$$



a) Formulieren Sie eine projektive (d.h. unter projektiven Transformationen invariante) Verallgemeinerung dieses Satzes, und skizzieren Sie dessen Konfiguration bildlich.

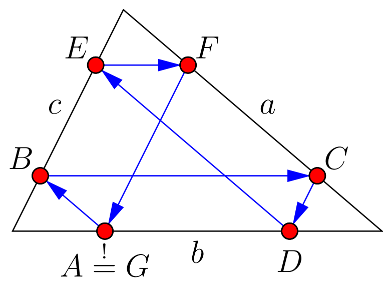
b) Formulieren Sie den dazu dualen Satz, und skizzieren Sie auch diesen.

Aufgabe 4. Pappos Affin und Projektiv.

In einem Dreieck mit den Seiten a, b und c sei ein beliebiger Punkt A auf b gegeben. Die Parallele zu a durch A schneidet c in einem Punkt B (siehe Abbildung), die Parallele zu b durch B schneidet a in einem Punkt C, usw. bis Punkt G.

Beweisen Sie, dass die Punkte A und G immer aufeinander liegen.

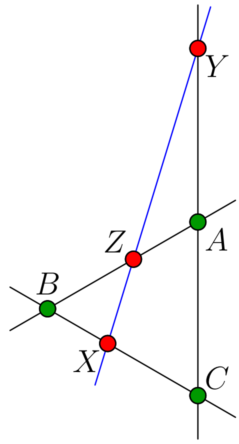
Was hat das mit dem Satz von Pappos zu tun?



Aufgabe 5. Satz von Menelaos.

Es seien A, B und P drei kollineare Punkte im $\mathbb{R}^3$, und $A \neq B$. Die *gerichtete Distanz* $\mathrm{GD}(A, B, P)$ von A zu P, gemessen in Richtung B, ist definiert als $\pm\|A - P\|$, wobei das Vorzeichen genau dann negativ ist, wenn P und B auf unterschiedlichen Seiten von A liegen. Darauf aufbauend ist das *Teilverhältnis* $\mathrm{TV}(A, B, P)$, in dem der Punkt P die Strecke AB teilt, definiert als:

$$\mathrm{TV}(A, B, P) := \frac{\mathrm{GD}(A, B, P)}{\mathrm{GD}(B, A, P)}$$



a) Es seien A und B zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$, die direkt (d.h. ohne Skalieren) Punkten in der projektiven Zeichenfläche entsprechen. Weiterhin seien $(\lambda, \mu)^T$ die homogenen Koordinaten eines Punktes $[P]$ auf der projektiven Geraden $[A][B]$ bezüglich der Basis A, B. Berechnen Sie $\mathrm{TV}(A, B, P)$ in Abhängigkeit von λ und μ.

b) Jetzt seien A, B und C die Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^3$ und X, Y und Z Punkte auf den Verbindungsgeraden von je zwei dieser Punkte, wie in nebenstehender Skizze angegeben. Außerdem sei $\{X, Y, Z\} \cap \{A, B, C\} = \emptyset$. Beweisen Sie folgenden Satz:

X, Y und Z sind genau dann kollinear, wenn folgende Gleichung gilt:

$$\mathrm{TV}(B, C, X) \cdot \mathrm{TV}(C, A, Y) \cdot \mathrm{TV}(A, B, Z) = -1$$

Betrachten Sie dabei die von A, B und C aufgespannte Ebene als projektive Zeichenebene in einer vom Standard abweichenden Einbettung, und geben sie X, Y und Z in homogenen Koordinaten auf den jeweiligen Geraden an.

c) Argumentieren Sie, warum der gerade bewiesene Satz auch gilt, wenn A, B und C nicht die Einheitsvektoren, sondern beliebige nicht kollineare Punkte sind.

Aufgabe 6. Projektive Transformation von Geraden.

Gegeben sei eine allgemeine projektive Transformation in $\mathbb{RP}^2$, repräsentiert durch die Matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Diese bildet Punkte der projektiven Ebene auf Punkte der projektiven Ebene ab. Beweisen Sie, dass die transponierte adjunkte Matrix zu M, wie sie unten angegeben ist, die gleiche Abbildung repräsentiert, wenn man sie auf die homogenen Koordinaten von Geraden anwendet. Zeigen Sie dazu, dass die Inzidenzrelation von transformierten Punkten und Geraden mit der Inzidenz vor der Transformation übereinstimmt.

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad \mathrm{adj}(M)^T = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$