2-CAS-Gleichungsumformungen & 4-CAS-Schnittpunkt

Mit dem CAS-Tool von **GeoGebra** kann man Gleichungsumformungen durchführen. Dies soll am Beispiel der **quadratischen Ergänzung** zur Lösung einer quadratischen Gleichung vorgeführt werden.

Gebe die Gleichung **x^2 + 2bx + c = 0** ein. Zu Gleichungsumformungen setzt man die Gleichung in Klammer ($1) und die gewünschte Umformung dahinter, vgl. Zeile 3 und Zeile 6.

Mit dem Befehl **LinkeSeite[<Gleichung>]** bzw. **RechteSeite[<Gleichung>]** kann man Termumformungen auf einer Seite durchführen, vgl. Zeile 4 und 5.

Um aus Zeile 6 beide Lösungen zu erhalten, muss man diese einzeln bestimmen. **Löse[$6,x]** reicht leider nicht.

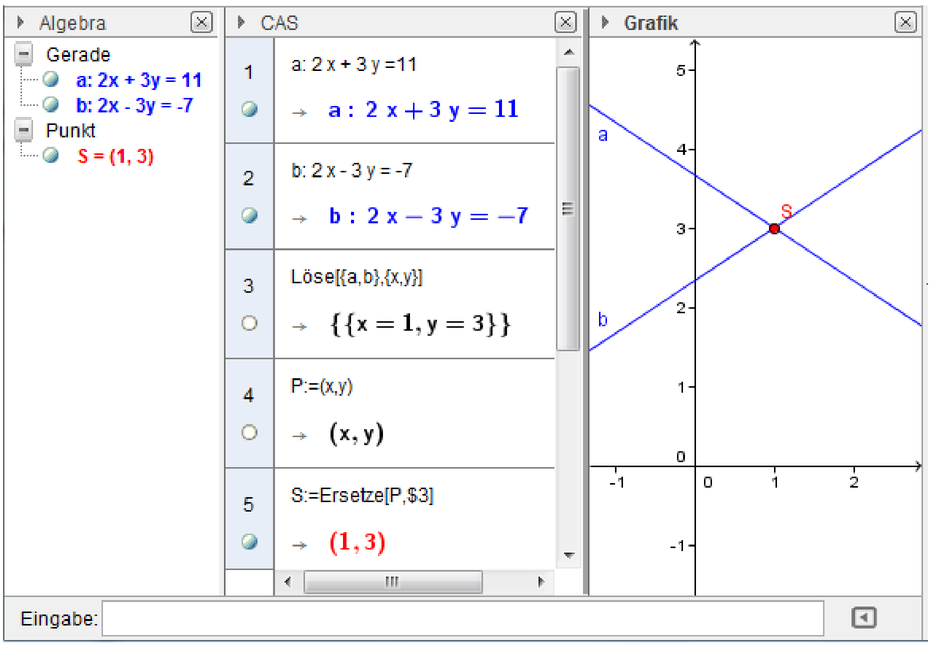
Der Befehl **Löse[$1]** liefert direkt beide Lösungen in x, vgl. **2-CAS-Gleichungen.ggb**

Leider kann **GeoGebra** (noch) keine kubischen Gleichungen mit Variablen lösen, z.B. **Löse[x^3-3x-a=0,x]** liefert **{ }**

Füge im Grafikfenster einen Schieberegler für die Variable a ein und versuche nochmals obige Gleichung zu lösen.

Probiere auch **KLöse** oder **NLöse**.

1	x^2+2 b x + c=0	$\rightarrow\ x^2+2\,b\,x+c=0$
2	Lösung mit quadratischer Ergänzung	
3	(x² + 2b x + c = 0) +b^2-c	$\rightarrow\ b^2+x^2+2\,b\,x=b^2-c$
4	LS:=Faktorisiere[LinkeSeite[$3]]	$\rightarrow\ LS := (x+b)^2$
5	RS:=RechteSeite[$3]	$\rightarrow\ RS := b^2-c$
6	(LS=RS) ^0.5	$\rightarrow\ \lvert b+x\rvert=\sqrt{b^2-c}$
7	Löse[b+x=sqrt(b^2-c),x]	$\rightarrow\ \left\{x=\sqrt{b^2-c}-b\right\}$
8	Löse[b+x=-sqrt(b^2-c)]	$\rightarrow\ \left\{x=-\sqrt{b^2-c}-b\right\}$
9	Direkte Lösung	
10	Löse[$1]	$\rightarrow\ \left\{x=-\sqrt{b^2-c}-b,\ x=\sqrt{b^2-c}-b\right\}$



Betrachte auch: **3-CAS-Schnittpunkt.ggb**.

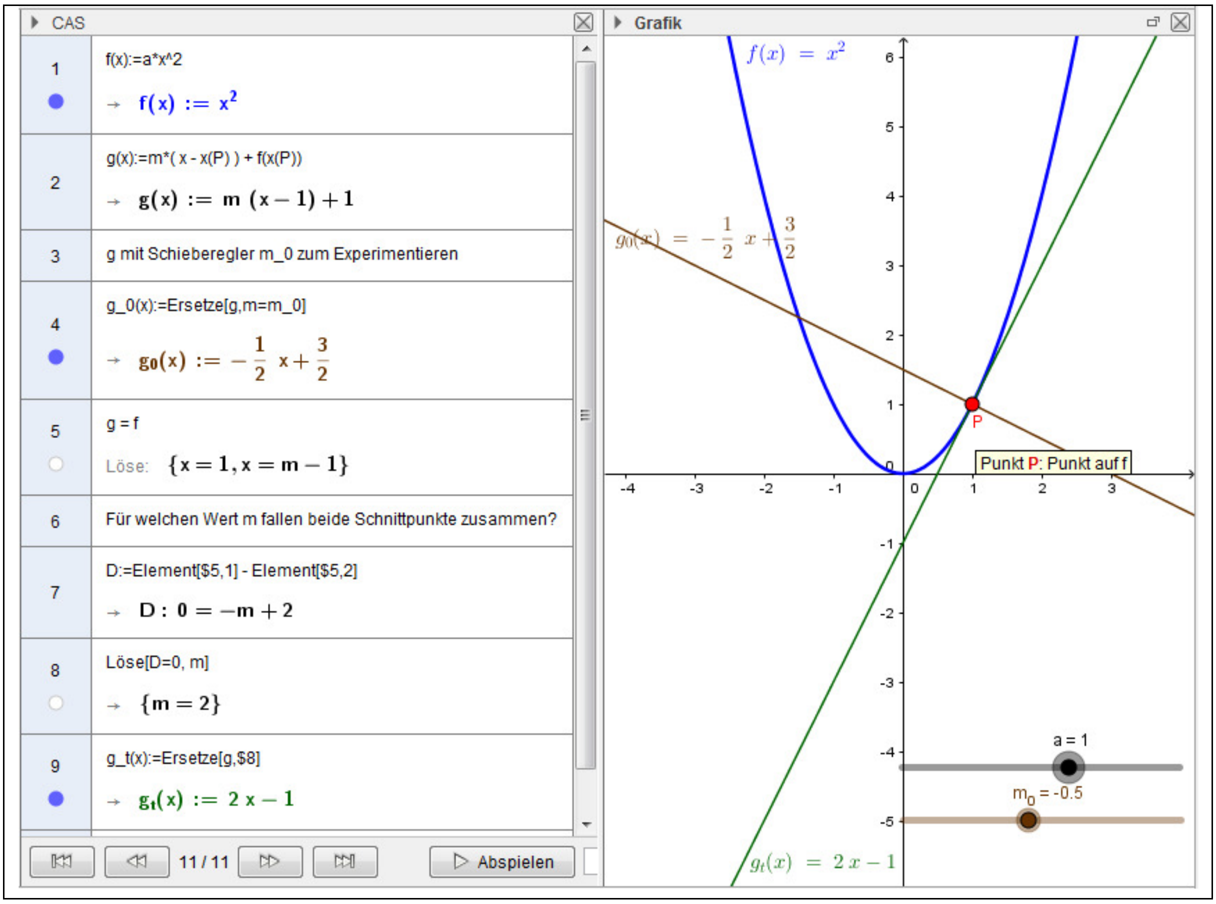
Gibt man im CAS-Fenster eine Gleichung der Form **f(x,y) = 0** ein, so wird die dadurch implizit gegebene Kurve im Zeichenfenster ausgegeben. Probiere

x^3-2xy+y^2 = 0.

Beachte in Zeile 5 die Substitution von x =1 und y = 3 in P := (x,y).

Geometrische Bestimmung der Parabeltangenten

Die beiden Files **CAS-Parabeltangenten1.ggb** und **CAS-Parabeltangenten2.ggb** zeigen die Möglichkeit, die Parabeltangenten durch einen Punkt P der Parabel oder parallel zu einer Geraden g samt Berührpunkt B geometrisch ohne den Ableitungsbegriff zu bestimmen. Analog zum Kreis schneiden (nicht vertikale) Geraden eine Parabel in zwei reellen Punkten (Sekante), genau einem Punkt (Tangente) oder zwei konjugiert komplexen Punkten (Passante). Suche daher (nicht vertikale) Geraden, welche die Parabel in genau einem Punkt treffen.



Setze zunächst im Zeichenfenster einen **Schieberegler für den Wert a**, definiere dann im CAS-Fenster die Funktion **f(x) := a x^2** und wähle einen **Punkt P** auf dem Graphen von f.

Eine Gerade g durch P ist bestimmt durch die Funktion **g(x) := m (x - x(P)) + y(P)** mit variabler Steigung m. Bestimme nun m so, dass die beiden Schnittpunkte P und Q von g und der Parabel zusammenfallen.

Mit dem Schieberegler für den Wert m_0 im Zeichenfenster wird in Zeile 4 die Gerade g_0 durch P mit der Steigung m_0 definiert als: **g_0(x):=Ersetze[g, m=m_0]** . Man kann dann experimentell m_0 so wählen, dass P mit Q zusammenfällt und g_0 Tangente an die Parabel in P ist.

Um m zu bestimmen, **Löse** die Gleichung **g = f** (vgl. Zeile 5) und setze die Lösungen gleich (bzw. die Differenz gleich 0, vgl. Zeile 7). Da die beiden Lösungen in Zeile 5 in einer Liste ausgegeben werden, muss zur Definition von D auf die Elemente des Ergebnisses **$5** mit dem Befehl **Element[<Liste>, <Position des Elements>]** zugegriffen werden.

Löse[D=0, m] liefert den gesuchten Wert von m (vgl. Zeile 8) und damit die Tangente in P als **g_t := Ersetze[g , $6]** (vgl. Zeile 9) bzw. **CAS-Parabeltangenten1.ggb** .

Verändere nun den Wert von a oder verschiebe den Punkt P auf der Parabel.

Um das CAS-Protokoll zu kommentieren, sind in Zeile 3 und 6 **Texte** eingefügt. Dazu klickt man die Zeilennummer mit der rechten Maustaste an und wählt **Text.** Dort findet man auch **Lösche Zeile**.

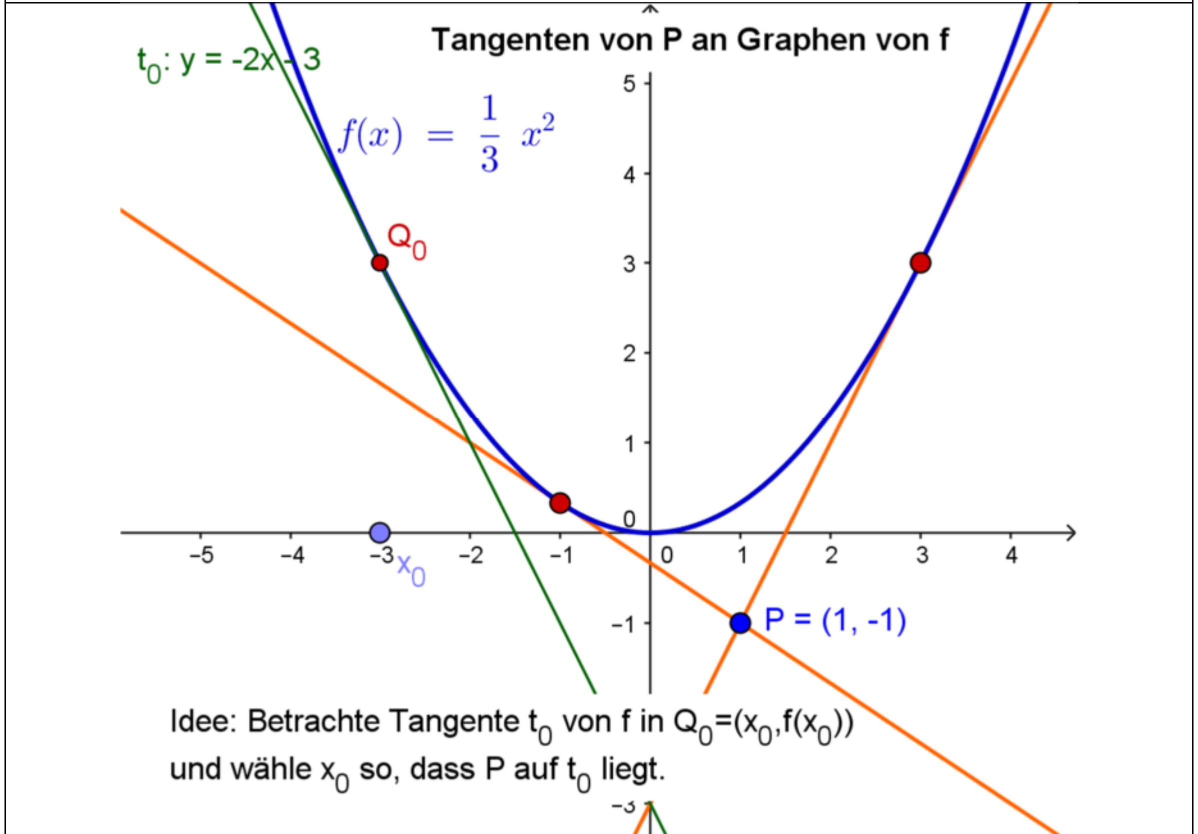
CAS

1	f(x) := 1 / 3 x² → $f(x) := \frac{1}{3} x^2$
2	Wähle beliebigen Pkt. Q auf f
3	Q:=(x_0,f(x_0)) → $Q := \left(x_0, \frac{x_0^2}{3}\right)$
4	Tangente t von f in Q
5	t(x):=f'(x_0)*(x-x_0)+f(x_0) → $t(x) := -\frac{1}{3} x_0^2 + \frac{2}{3} x_0 x$
6	P liegt auf t <=> t(x(P)) = y(P) => Bedingung für x_0
7	t(x(P))=y(P) → $-\frac{1}{3} x_0^2 + \frac{2}{3} x_0 = -1$
8	Löse[$7] → $\{x_0 = -1, x_0 = 3\}$
9	Liste1:=Folge[Ersetze[Q,Element[$8,k]],k,1,Länge[$8]] → $Liste1 := \left\{\left(-1, \frac{1}{3}\right), (3, 3)\right\}$
10	Liste2:=Folge[Ersetze[t,Element[$8,k]],k,1,Länge[$8]] → $Liste2 := \left\{-\frac{1}{3} - \frac{2}{3} x, -3 + 2 x\right\}$

Gegeben: Graph einer Funktion f und ein Punkt P.

Gesucht: Tangenten von P an den Graphen von f.

Lösungsweg mit Ableitung von f und Tangente in einem Punkt Q von f.



Siehe File: Tangenten-von-P-an-f-1.ggb

Klicke dich mittels der Navigationsleiste durch die Konstruktion/Berechnung.

Verschiebe x_0 so, dass P auf t_0 liegt. Verschiebe den Punkt P.

Wähle f(x):=1/3 x^3-x oder f(x):=1/3*exp(x), wähle dann statt **Löse** den Befehl **NLöse**

Beachte: Bei Polynomen bestimmt GeoGebra alle Nullstellen (siehe auch **KLöse**)

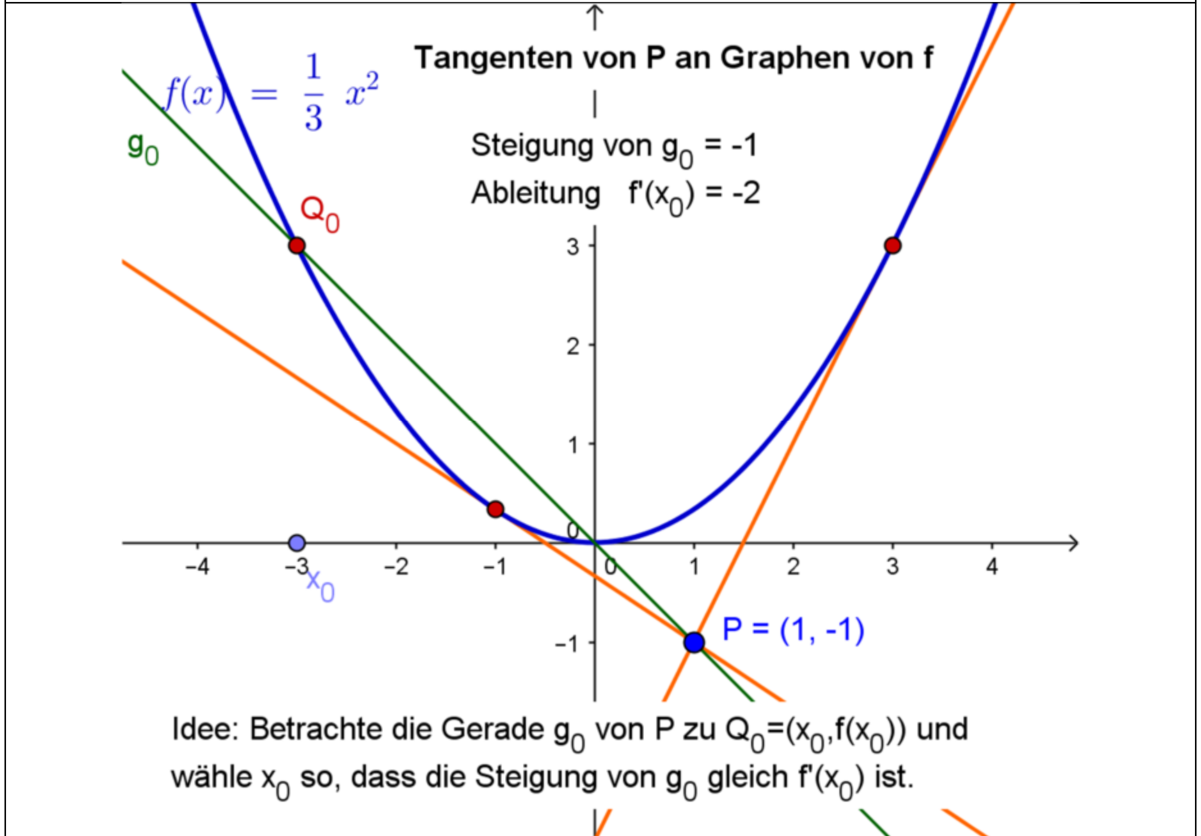
CAS

1	f(x) := 1 / 3 x² → $f(x) := \frac{1}{3} x^2$
2	Wähle beliebigen Pkt. Q auf Graph f
3	Q:=(x_0,f(x_0)) → $Q := \left(x_0, \frac{x_0^2}{3}\right)$
4	Gerade g = PQ als lineare Fkt.
5	g(x):=(y(P)-y(Q))/(x(P)-x(Q))*(x-x(P))+y(P) → $g(x) := (x-1) \cdot \frac{-\frac{1}{3} x_0^2 - 1}{-x_0 + 1} - 1$
6	Bestimme x_0 so, dass Steigung von g = f'(x_0)
7	(y(P)-y(Q))/(x(P)-x(Q))=f'(x_0) → $\frac{x_0^2 + 3}{3 x_0 - 3} = \frac{2}{3} x_0$
8	Löse[$7] → $\{x_0 = -1, x_0 = 3\}$
9	Liste1:=Folge[Ersetze[Q,Element[$8,k]],k,1,Länge[$8]] → $Liste1 := \left\{\left(-1, \frac{1}{3}\right), (3, 3)\right\}$
10	Liste2:=Folge[Vereinfache[Ersetze[g,Element[$8,k]]],k,1,Läng → $Liste2 := \left\{\frac{-2x-1}{3}, 2x-3\right\}$

Gegeben: Graph einer Funktion f und ein Punkt P.

Gesucht: Tangenten von P an den Graphen von f.

Lösungsweg mit Ableitung von f und einer Geraden von P zu einem Punkt Q auf f.



Siehe File: Tangenten-von-P-an-f-2.ggb

Klicke dich mittels der Navigationsleiste durch die Konstruktion/Berechnung.

Verschiebe den Punkt x_0 so, dass g_0 Tangente von f ist. Verschiebe den Punkt P.

Die Verbindungsgeraden von P zu den Punkten der Liste 1 erhält man auch mit **Folge[Gerade[P,Element[$8,k]],k,1,Länge[$8]]** .

Siehe auch GeoGebra-Figuren zu Tangenten an eine Kubik.