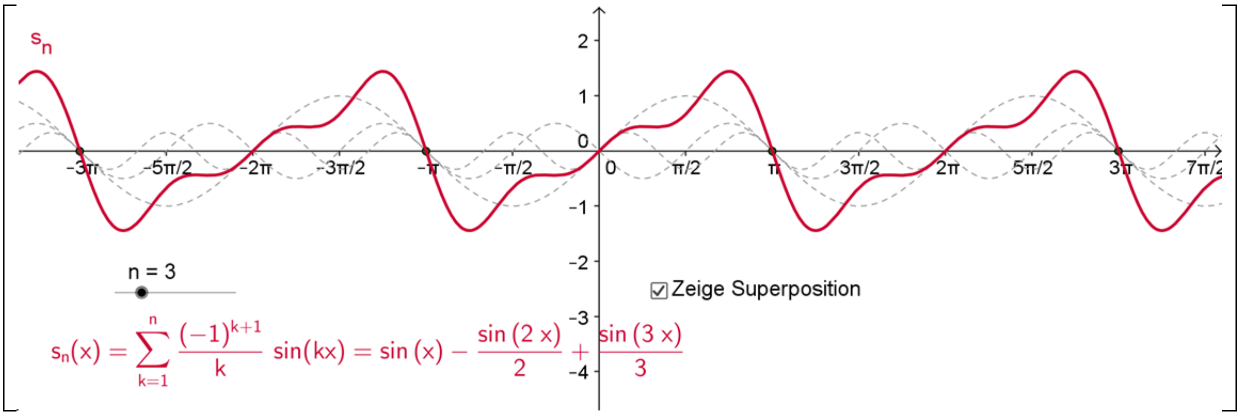
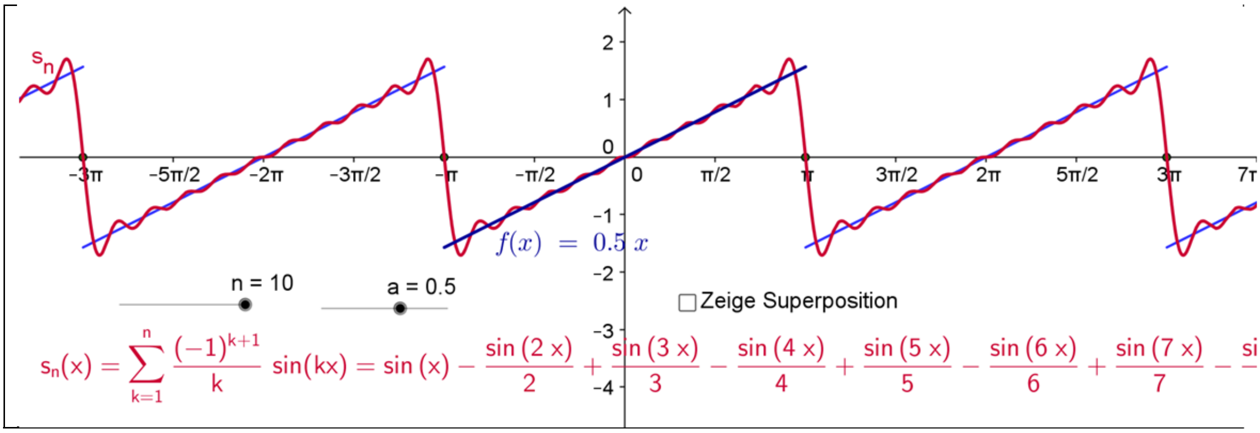
Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Dr. Hermann Vogel

Superposition und Fourier-Reihen

Das File **Superposition.ggb** zeigt zunächst die Überlagerung von **n = 3** Sinusfunktionen **sin(k x)** mit gegebener Amplitude **$a_k = (-1)^{k+1}/k$** , siehe Figur:



Für wachsendes n nähert sich der Graph **der Superposition $s_n(x)$** offenbar dem Graph einer 2π-periodischen Funktion **f(x) = x/2** für **$-\pi < x < \pi$** mit **$f((2k+1)\pi) = 0$** an den Sprungstellen.

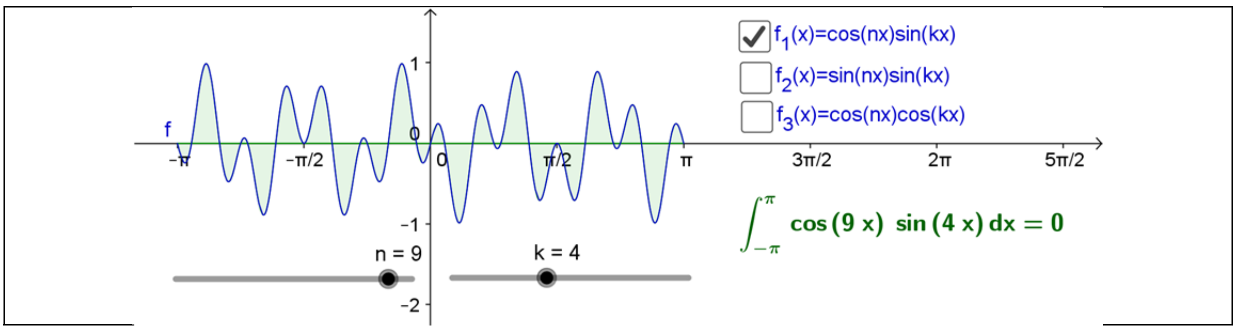


Mit Hilfe der Superposition von Winkelfunktionen kann man offenbar periodische Funktionen annähern. Um bei einer gegebenen **π-periodischen Funktion f(x)** die nötigen Amplituden zu erhalten, betrachtet man formal den Ansatz:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

und erhält daraus aufgrund folgender Orthogonalitätsrelationen der Winkelfunktionen:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(kx)\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)dx = \begin{cases} \pi & \text{für } n = k \\ 0 & \text{für } n \neq k \end{cases}$$



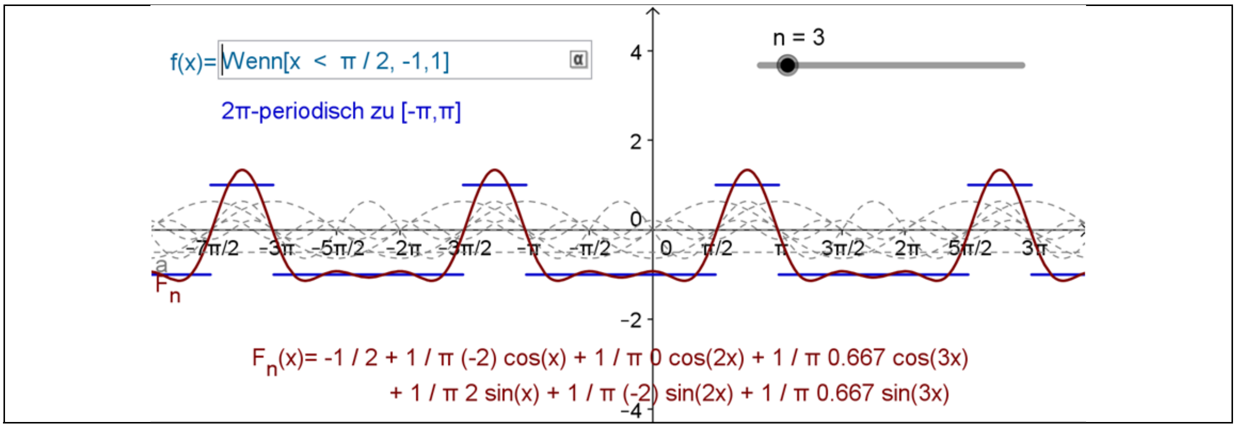
durch Multiplikation des Ansatzes mit $\sin(kx)$ bzw. $\cos(kx)$ und Integration über [$-\pi,\pi$]:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \quad (0 \le k) \quad und \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \quad (1 \le k).$$

Für endliche Summen von Winkelfunktionen ist das klar. Dass es auch für n → ∞ gilt, muss in der Analysis noch begründet werden. Vgl. auch **Orthogonalitätsrelationen.ggb**.

Im File **Fourier-Reihe.ggb** werden die Koeffizienten der Fourier-Reihe einer vorgegebenen Funktion f(x), die 2π-periodisch fortgesetzt wird, mit obigen Formeln berechnet.

Die Funktion f aus der Eingabezeile kann dabei 2π-periodisch fortgesetzt werden mit dem Befehl **Folge[Funktion[f(x-2 k π), (2 k-1) π , (2 k+1) π],k,-2,2]** ;gleichbedeutend mit dem Befehl **Folge[Wenn[(2k - 1) π ≤ x ≤ (2k + 1) π,f(x - 2k π)], k, -3, 3]**.



Der Befehl **Folge[1 / π Integral[f(x) cos(k x), -π, π], k, 1, n]** liefert eine Liste der Koeffizienten a_k für $1 \le k \le n$ und **a_n = Folge[1 / π Integral[f(x) cos(k x), - π, π] cos(k x), k, 1, n]** die Liste der ersten n Summanden von $F_n(x)$. Damit liefert **Summe[a_n]** die erste Summe von F_n. über die Cosinuse. Analog erhält man die zweite Summe über die Sinuse von F_n und mit **a_0 = 1 / π Integral[f, - π, π]** schließlich **$F_n(x) = a_0/2$ + Summe[a_n] + Summe[b_n].**

Der exakte Nachweis der Orthogonalitätsrelationen und die Berechnung der Koeffizienten der Fourier-Reihe von f(x) sind gute Übungen der Integralrechnung.