Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Dr. Hermann Vogel

Taylor-Polynome und Potenzreihen

Die Tangente $\boldsymbol{P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$ approximiert eine stetig differenzierbare Funktion f an der Stelle x_o. $P_1(x)$ und $f(x)$ stimmen an der Stelle x_0 im Funktionswert und der 1.Ableitung überein. Die Suche nach Polynomen vom Grad n, die mit einer Funktion f an der Stelle x_o, an der f n mal stetig differenzierbare ist, im Funktionswert und den ersten n Ableitungen übereinstimmen, liefert die **Taylor-Polynome vom Grad n**

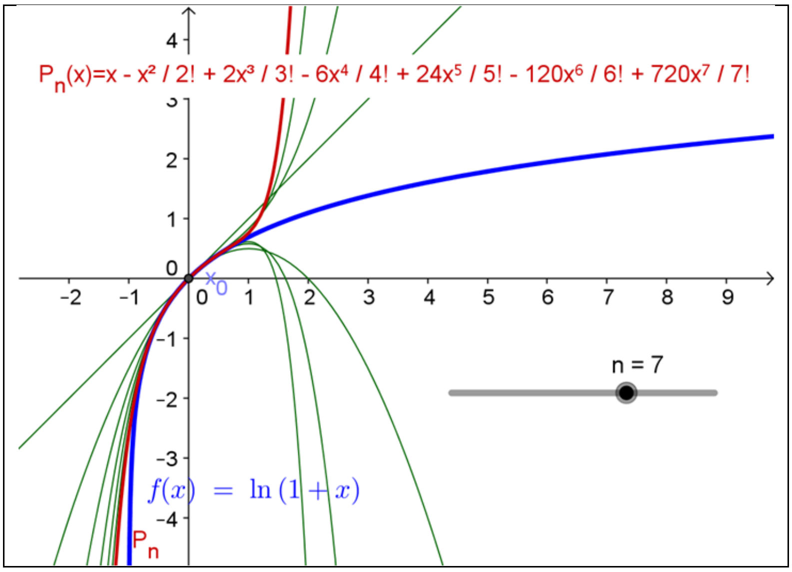
$$\boldsymbol{P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n} .$$

GeoGebra liefert diese mit dem Befehl **TaylorReihe[<Funktion>, <x-Wert>, <Grad>]**.

Öffne zum Erkunden der Eigenschaften der Taylor-Polynome GeoGebra, wähle eine Funktion f, z.B**.** **f(x) = ln(1+x)** , einen Punkt **X0** auf der x-Achse und erzeuge den zugehörigen Punkt **P0** auf dem Graphen von f und einen Schieberegler für die **Zahl n** zwischen 1 und 10, vgl. Konstruktionsprotokoll.

Nr.	Name	Definition	Wert
1	Funktion f		f(x) = ln(1 + x)
2	Punkt X0	Punkt auf xAchse	X0 = (0, 0)
3	Punkt P0	(x(X0), f(x(X0)))	P0 = (0, 0)
4	Zahl n		n = 3
5	Funktion P_n	TaylorReihe[f, x(X0), n]	P_n(x) = x - x² / 2! + 2x³ / 3!
6	Text Text1	"P_n(x)=" + P_n + ""	"P_n(x)=x - x² / 2! + 2x³ / 3!"
7	Liste Liste1	Folge[TaylorReihe[f, x(X0), k], k, 1, n]	Liste1 = {x, x - x² / 2!, x - x² / 2! + 2x³ / 3!}

P_n = TaylorReihe[f , x(X0) , n] liefert dann das Taylor-Polynom vom Grad n und **Folge[TaylorReihe[f , x(X0) , k] , k , 1 , n]** die Schar der Taylor-Polynome von 1 bis n.



Vergrößert man n, so stellt man fest, dass das Taylor-Polynom $P_n(x)$ die Funktion ln(1+x) in einer Umgebung von x_0=0, dem Intervall]-1,1[, immer besser annähert, d.h.:

Der Fehler $|f(x) - P_n(x)|$ geht für n gegen unendlich gegen Null. **Frage:** Gilt $f(x) = P_\infty(x)$?

Kürzen der Koeffizienten liefert:

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k .$$

Anwendung: Numerische Auswertung von Funktionen in einer Umgebung von x_0 mit Hilfe der Taylor-Polynome vom Grad n bis auf vorgegebene Fehler, z.B. 10^{-10}, Fehlerabschätzung.

Gibt man umgekehrt die Koeffizienten $\boldsymbol{a_k}$ der Monome $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})^{\boldsymbol{k}}$ als Folge $\boldsymbol{a_k} \coloneqq \boldsymbol{a}(\boldsymbol{k})$, $\boldsymbol{k} \geq \boldsymbol{k_0}$ vor, so kann man untersuchen, für welche x in der Umgebung von x_0 die Partialsummen

$$\boldsymbol{s_n}(\boldsymbol{x}) := \sum_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k_0}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a_k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})^{\boldsymbol{k}}$$

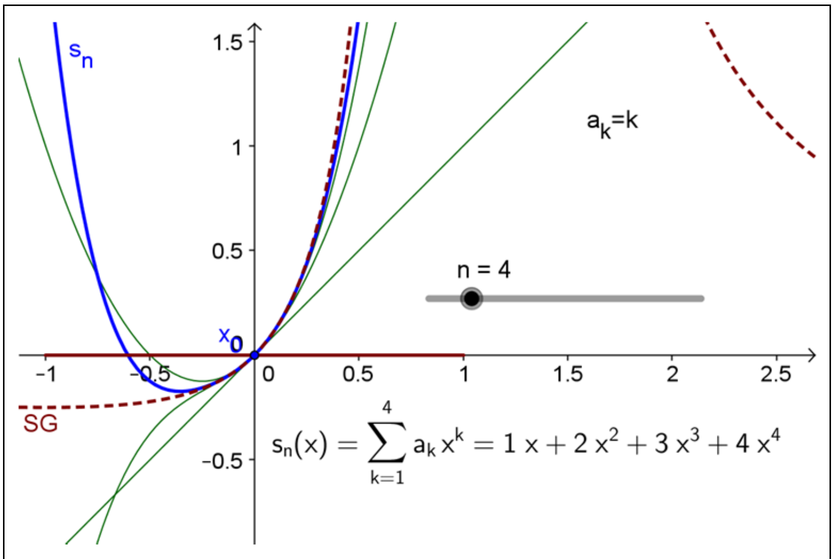
für $n \to \infty$ konvergieren. Dabei kann man o.E. $x_0 = 0$ setzen, da die Transformation $x \to x - x_0$ nur eine Translation um x_0 parallel zur x-Achse ist.

Öffne GeoGebra, setze den **Entwicklungspunkt X0=(0,0)** fix und füge einen Schieberegler für die **Zahl n** zwischen 1 und 20 ein.

Nr.	Name	Definition	Wert
1	Punkt X0		X0 = (0, 0)
2	Zahl n		n = 4
3	Funktion a		a(k) = k
4	Liste a_k	Folge[a(k) x^k, k, 1, n]	a_k = {1x¹, 2x², 3x³, 4x⁴}
5	Funktion s_n	Summe[a_k]	s_n(x) = 1x¹ + 2x² + 3x³ + 4x⁴
6	Liste s_1	Folge[Summe[a_k, i], i, 1, n]	s_1 = {1x¹, 1x¹ + 2x², 1x¹ + 2x² + 3x³, 1x¹ + 2x² + 3x³ + 4x⁴}
7	Strecke KVB	Strecke [(-1, 0), (1, 0)]	KVB = 2
8	Funktion SG		SG(x) = x / (1 - x)²

Nach Wahl einer Folge a(k), z.B. a(k) = k bestimme mit **Folge [a(k)*x^k , k , 1 , n]** die Liste $\mathbf{a_k}$ der einzelnen Summanden von $s_n(x)$ und $\mathbf{s_n(x)}$ über **Summe[$\mathbf{a_k}$]**.

Folge[Summe[$\mathbf{a_k}$, i], i , 1 , n] liefert die Liste der Partialsummen von $s_0(x)$ bis $s_n(x)$, da **Summe[<Liste> , <Zahl i>]** jeweils die ersten i Summenden von a_k aufsummiert.



Vergrößert man n, so stellt man fest, dass die Graphen von s_n sich im Intervall (-1, 1) offenbar dem Graphen einer Grenzfunktion SG annähern.

Den Konvergenzbereich erhält man mit dem Quotientenkriterium für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ mit $b_k = a_k x^k$ als

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = \cdots = |x| < 1$$

Weitere Überlegungen liefern

$$SG(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Die Taylor-Entwicklung von SG liefert wieder die gegebene Potenzreihe. Probiere es aus.

Die Taylorreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ von f(x) = ln(1+x) konvergiert nach dem Quotientenkriterium $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1}|x| = |x| < 1$ wie vermutet für x im Intervall]-1, 1[.