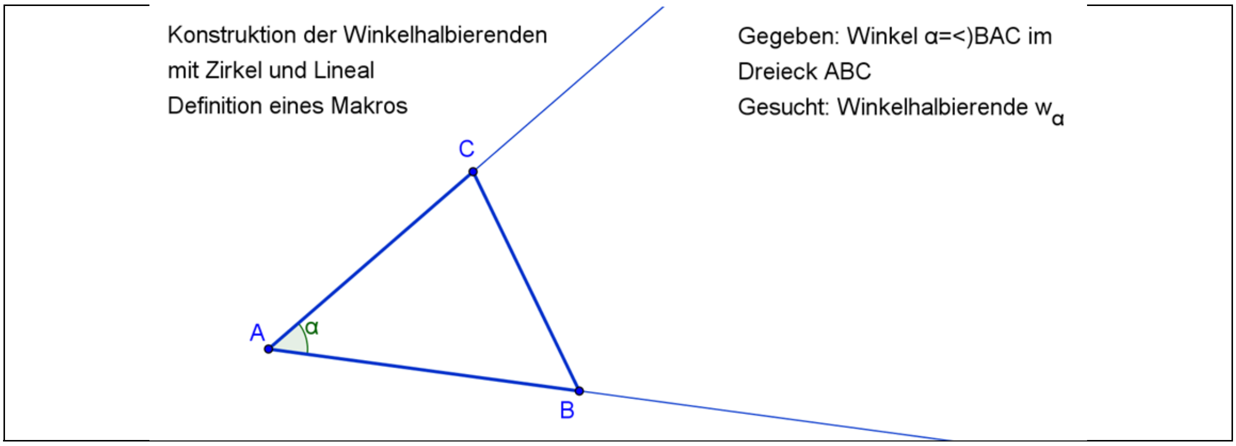
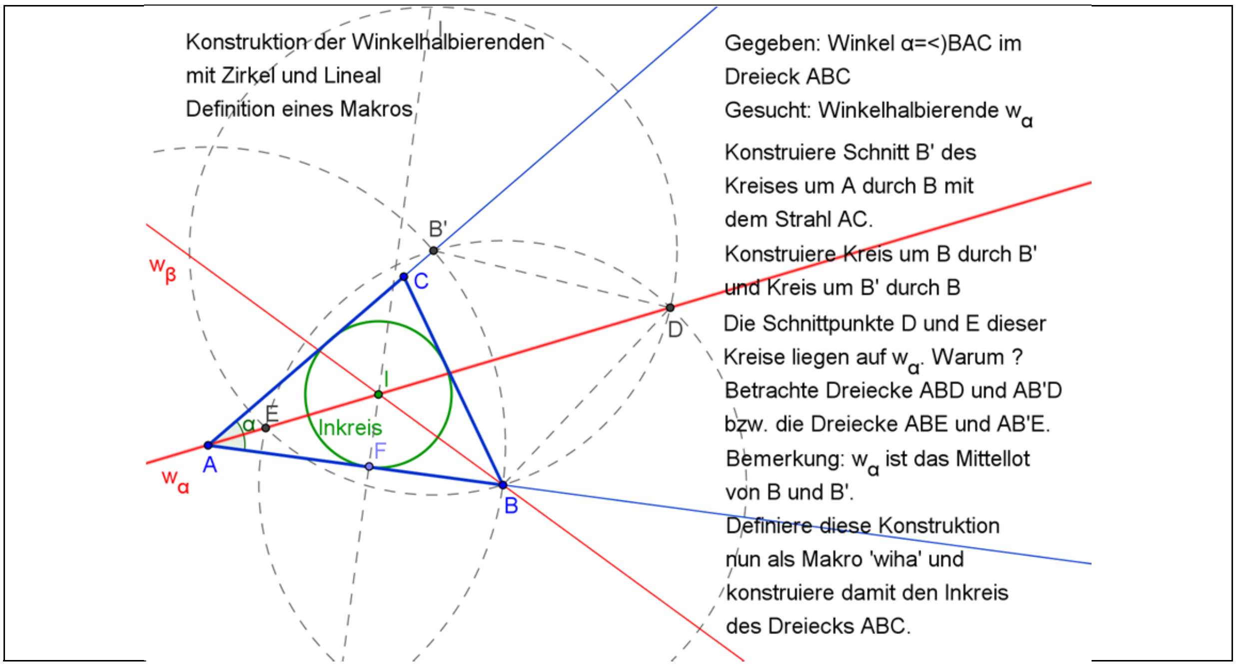
5 Konstruktion der Winkelhalbierenden als Makro

Gegeben ist der Winkel α=<)BAC eines Dreiecks ABC. Gesucht ist eine Konstruktion der Winkelhalbierenden w_α allein mit Zirkel und Lineal.



Führe die Konstruktion von w_α wie unten angegeben durch.



Was ergibt sich, wenn man statt der beiden Kreise um B durch B' bzw. um B' durch B zwei kongruente Kreise um B bzw. B' mit festem Radius nimmt ? Was, wenn man w_α als Verbindung von A und E statt als Verbindung von E und D verwendet ?

Wählt man den festen Radius zu klein und öffnet dann den Winkel, so existieren u.U. die Punkte D und E nicht mehr (reell) und die Konstruktion bricht bei GeoGebra ab. Da Cinderella über das Komplexe rechnet, gibt es die Verbindungsgerade der konjugiert komplexen Punkte aus, siehe Anmerkung. Wählt man w_α=AE, so fallen A und E im Fall, dass α=60° ist, zusammen und definieren daher keine Verbindungsgerade.

Um eine **Konstruktion als Makro** verwenden zu können, muss diese **allgemeingültig** sein.

Die DGS-Programme stellen viele Konstruktionen zur Verfügung, für die man mit Zirkel und Lineal mehrere Konstruktionsschritte benötigt. Man kann aber auch selbst für aufwändigere Konstruktionen **Makros als eigene Werkzeuge definieren,** die zu gegebenen Startobjekten die Zielobjekte der Konstruktion bestimmen, indem man:

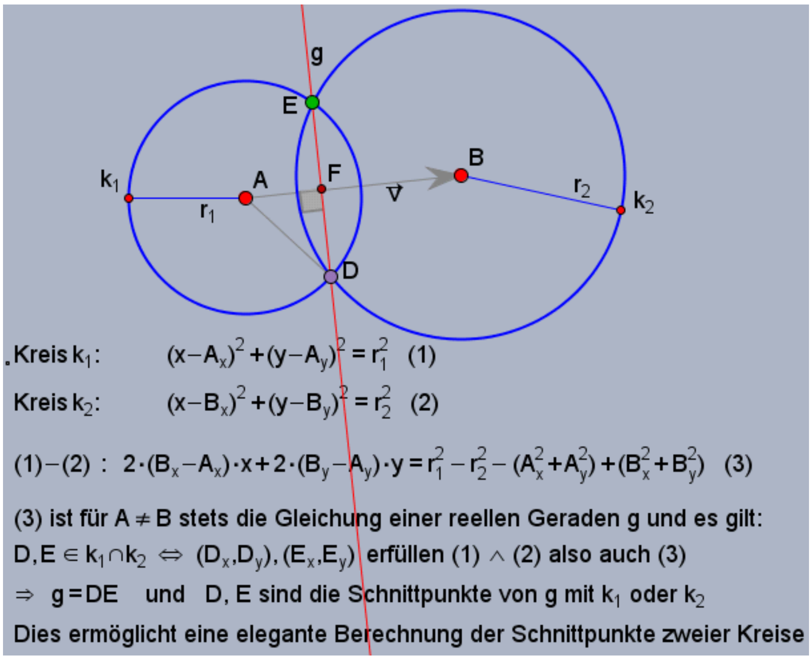
1) bei **GeoGebra** unter „**Werkzeug/Neues Werkzeug erstellen**“ zunächst aus einer Liste die Ausgabe-Objekte, dann die Eingabe-Objekte in der gewünschten Reihenfolge auswählt und dann einen Werkzeug-Namen und Werkzeug-Hilfe sowie ggfs. ein Werkzeugsymbol für ein Button einträgt. Das Werkzeug steht dann mit einem Werkzeug-Button in der Werkzeugleiste zur Verfügung.

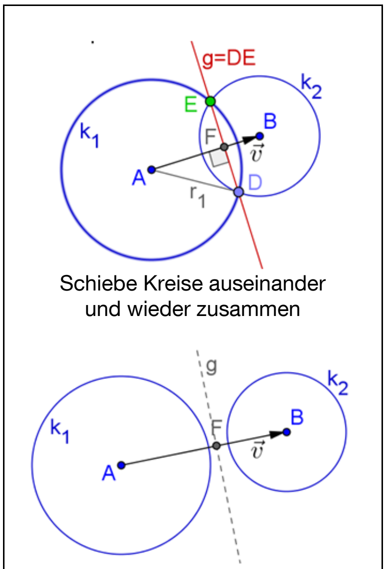
   Über **Werkzeuge/Werkzeuge verwalten** kann man das Makro z.B. als **wiha.ggt** abspeichern und dieses Makro durch **Drag&Drop** in ein neues GeoGebra-Fenster ziehen. Dann steht es auch dort zur Verfügung. So kann man eine Datenbank mit eigenen Makros erstellen. Über **Werkzeuge/Werkzeugleiste anpassen** kann man einzelne Werkzeuge löschen oder hinzunehmen und so die Leiste jahrgangsbezogen gestalten.

2) bei **Cinderella** die Startobjekte (Punkte!) <u>und</u> die Zielobjekte im Zugmodus bei gedrückter Shift-Taste markiert und mit „Strg C“ und „Strg V“ die **Konstruktion kopiert**, vgl. Bearbeiten. Man erhält eine 1 zu 1-Kopie der ausgewählten Objekte (die Bezeichnung werden soweit möglich mit Strich übernommen) und kann die Startobjekte mit dem Schraubenschlüssel mit den gewünschten Objekten identifizieren. Dieses Kopieren kann man als **eigenes Werkzeug definieren** mit „Strg+Umschalt+N“. Dabei wird ein Button mit den Start- und Zielobjekten erzeugt. Das „Ankleben“ der Kopie an die gewünschten Punkte erfordert einige Übung.

Achte auf die Reihenfolge der Objekte: Hier Punkt B auf dem einen Schenkel, dann Scheitel A und dann Punkt C auf dem zweiten Schenkel. Konstruiere die **dritte Winkelhalbierende.** Erzeuge ein Werkzeug für den **Schwerpunkt** oder des **Inkreises** eines Dreiecks.

Anmerkung zur Berechnung der Schnittpunkte zweier Kreise:





Schiebe Kreise auseinander und wieder zusammen

Bei Cinderella tauschen D und E die Seiten, bei GeoGebra nicht !

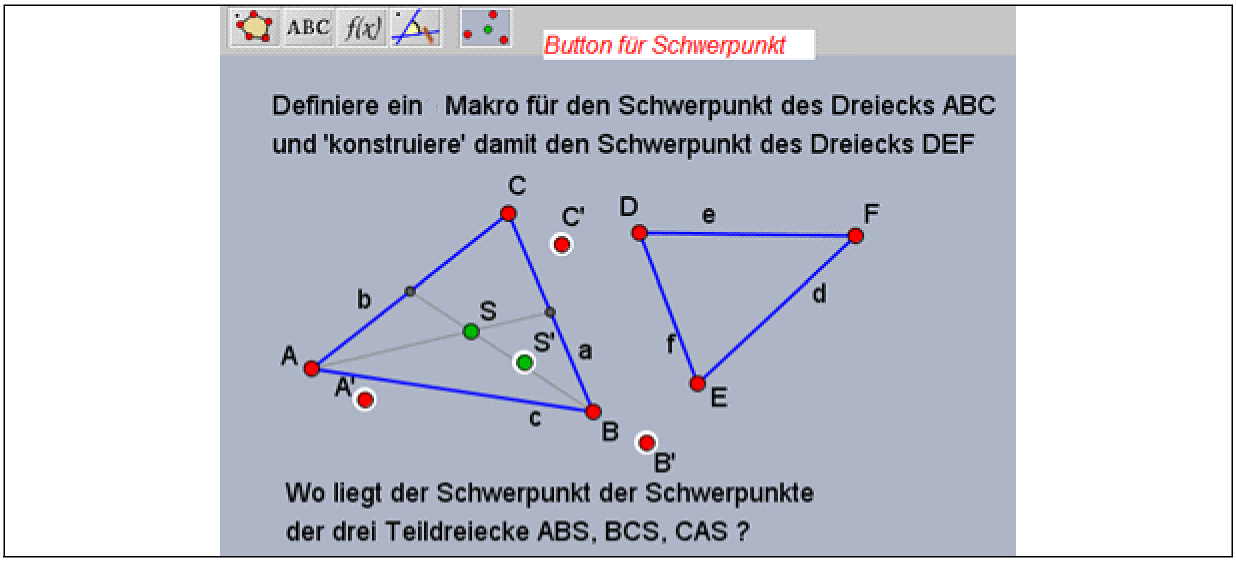
Die **Hessenormalform** der Geraden g in Figur **(3)** liefert den Abstand **d = |AF|** von A zu g. Nur für **d** ≤ $\mathbf{r_1}$ gibt es Schnittpunkte (**Fallunterscheidung**). Nach Pythagoras gilt in Δ AFD:

$$\mathbf{e = |FD|} = \sqrt{r_1{}^2 - d^2} \Rightarrow \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FD} \quad \text{mit} \quad \overrightarrow{AF} = \frac{d}{|\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{AB} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{FD} = \frac{e}{|\overrightarrow{AB}|}\begin{pmatrix} B_y - A_y \\ A_x - B_x \end{pmatrix}.$$

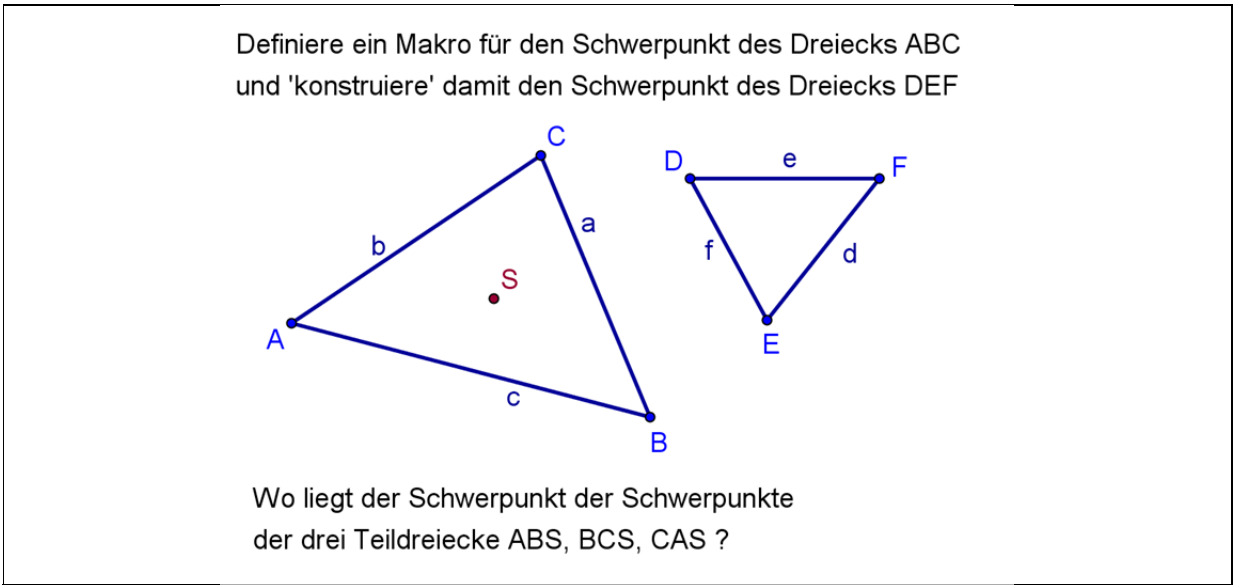
Bei Cinderella werden die Punkte D und E vertauscht, wenn man die Kreise soweit auseinander schiebt, dass die Schnittpunkte verschwinden (konjugiert komplex werden), und dann wieder zusammenschiebt. Cinderella ändert dabei das Vorzeichen von e und erreicht so Kontinuität, vgl. **Kreisschnitt.xyz** und **Koppelkurve.xyz**. Bei GeoGebra ist D stets derjenige Schnittpunkt, der in Richtung $\vec{v}$ von A nach B auf der rechten Seite liegt; E liegt immer links.

6 Werkzeug für Schwerpunkt eines Dreiecks

Den Schwerpunkt S eines Dreiecks ABC erhält man zum einen als Schnittpunkt zweier Seitenhalbierender zum anderen analytisch als S=1/3 (A+B+C).



Neben der Konstruktion kann man bei beiden Programmen S über die Koordinaten analytisch bestimmen, wobei Cinderella die CindyScript-Festlegung S.xy=1/3(A+B+C); bei der Definition eines Werkzeugs leider nicht übernimmt. Das selbst definierte Werkzeug „Schwerpunkt" erhält in der Werkzeugleiste automatisch ein eigener Button und kopiert die Start- und Zielobjekte. Mit Hilfe des Schraubenschlüssels kann man die Startobjekte A', B', C' mit den Punkten D, E, F identifizieren, um den Schwerpunkt S' des Dreiecks DEF zu erhalten.



Beim File 6-Schwerpunkt.ggb wird S analytisch über die Koordinaten bestimmt. Nach Wahl der Start- und Zielobjekte kann man bei GeoGebra auch ein eigener Button für das Werkzeug definieren, vgl. 6-Schwerpunkt-Button.ggb und Schwerpunkt-Button.png. Dieses erscheint direkt in der Werkzeugleiste. Speichere das Makro z.B. als Schwerpunkt.ggt ab.

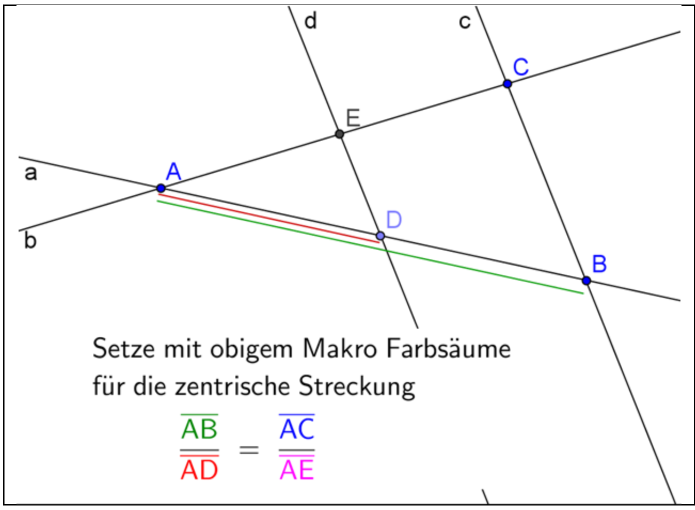
Der Schwerpunkt der Schwerpunkte der drei Teildreiecke ABS, BCS, CAS ist der Schwerpunkt S des Ausgangsdreiecks ABC.

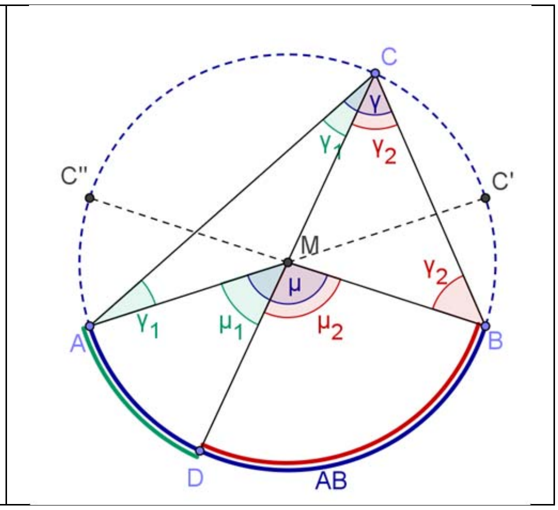
Öffne ein neues GeoGebra-Fenster und lade die Makros wiha.ggt und Schwerpunkt.ggt.

Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Dr. Hermann Vogel

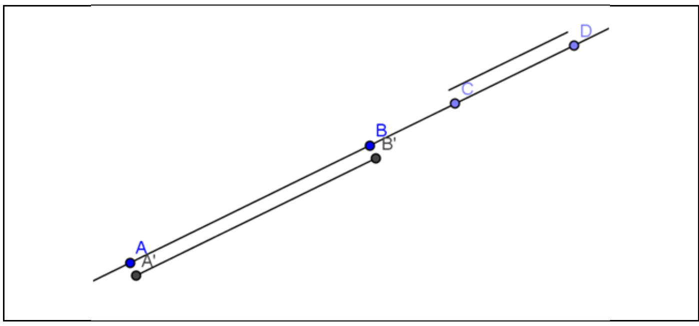
Makros für Farbsäume, farbige Texte

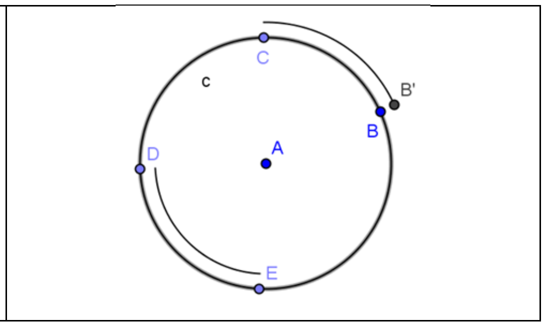
Um in der Figur zur Zentrischen Streckung die einzelnen Strecken durch **„Farbsäume“** hervorzuheben, muss man diese als Strecken definieren und dazu deren Anfangs- und Endpunkt konstruieren/definieren. Entsprechend benötigt man bei der Figur zum Peripheriewinkelsatz farbige Kreisbogen, um zu kennzeichnen: „Über dem Bogen AD gilt: $\mu_1 = 2\ \gamma_1$“.





Bei **GeoGebra** kann man dazu wie folgt Makros definieren, vgl. **Offset-Strecke.ggb** und **Offset-Bogen.ggb**.





Statt **A'** bei Offset-Strecke auf der Normalen zur Geraden a=AB im Abstand d von A zu konstruieren, wird **A' = A + d / Abstand[A, B] (y(B) - y(A), x(A) - x(B))** und analog **B'** definiert. Bei Aufruf des Makros wird nach Eingabe der Endpunkte (z.B. C und) der Abstand d abgefragt. Je nach Vorzeichen von d liegt der Farbsaum rechts oder links von der Strecke CD.

Bei Offset-Bogen wird der Punkt **B'** einfach definiert als **B' = B + d / Abstand[A, B] (B - A)** und der Bogen für den Farbsaum als **Kreisbogen[A, B', C]** . Bei Aufruf des Makros wird nach Eingabe des Kreismittelpunktes und der Punkte auf dem Kreis der Abstand d abgefragt. Je nach Vorzeichen von d liegt der Farbsaum außerhalb oder innerhalb des Kreises.

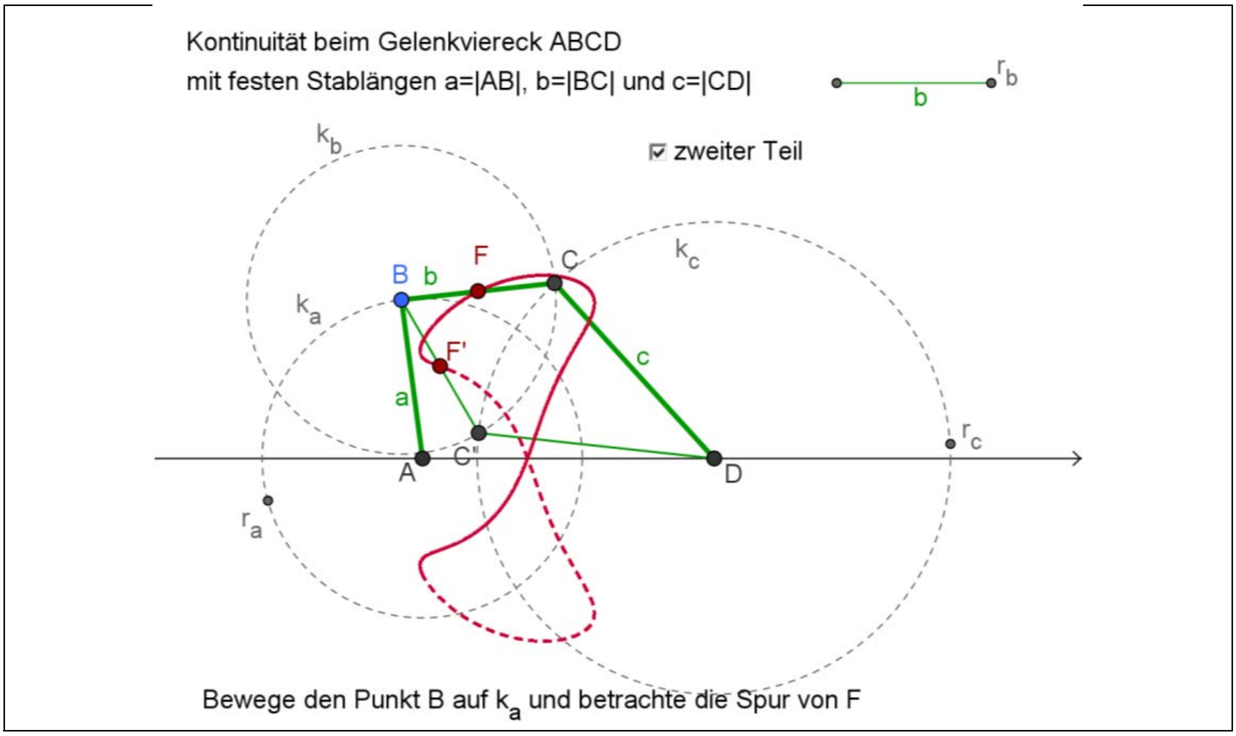
Bei **Cinderella** erzeugt man Farbsäume am einfachsten mit **CindyScript**. Dazu später mehr.

Die farbige Formel in obiger Figur erhält man als LaTeX Formel mit dem Befehl
\frac{ \textcolor{0,135,0}{\overline{AB}}}{\textcolor{red}{\overline{AD}}}\;=\;
\frac{ \textcolor{blue}{\overline{AC}}}{\textcolor{magenta}{\overline{AE}}}
wobei neben festen Farbbezeichnungen auch der Rot-, Grün- und Blau-Anteil angegeben werden kann, vgl. Texteditor und Objekteigenschaften -> Farbe.

Um bei der Ausgabe von Werten in Texten Ausdrücke der Art „+-1“ zu vermeiden, ersetzt man im Texteditor das **Objekt „a**“ durch „**Wenn[a < 0, "−" + (abs(a)), "+" + a]**“, vgl. **Vorzeichen.ggb**.

7 Kontinuität am Beispiel Koppelkurve

Ein **Gelenkviereck** besteht aus drei Stäben fester Länge a=|AB|, b=|BC| und c=|CD|, die beweglich in den festgehaltenen Punkten A und D gelagert und durch Gelenke in B und C miteinander verbunden sind. Betrachtet man den Mittelpunkt F von B und C, so durchläuft dieser eine so genannte **Koppelkurve**, vgl. 7-Koppelkurve-Lsg.xyz.

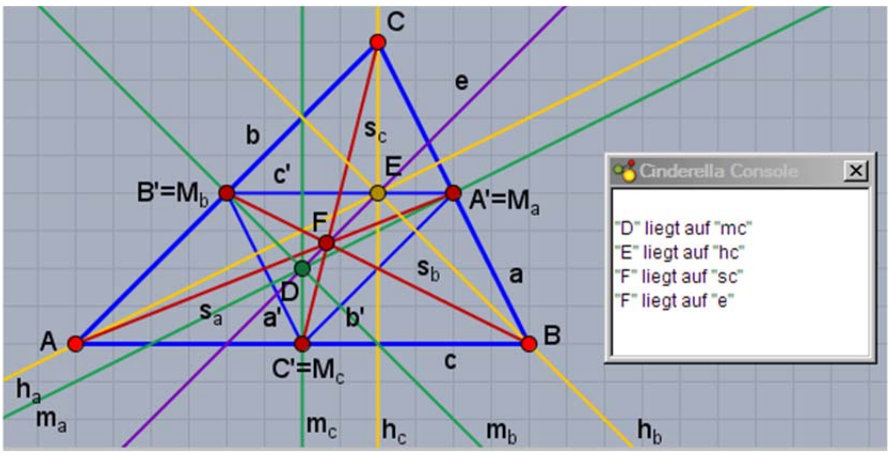


Da der Schnittpunkt C von k_b und k_c bei **GeoGebra** nicht nach unten „durchschlagen“ kann (er bleibt immer auf der selben Seite des Vektors von B nach D, d.h. links davon), erhält man nur einen Teil der Koppelkurve. Den zweiten Teil der Kurve erhält man mit dem zweiten Schnittpunkt C’ der beiden Kreise.

Da **Cinderella** über das Komplexe rechnet und damit **Kontinuität** ermöglicht, durchläuft C die Koppelkurve vollständig. Betrachte auch die **Animation** von C.

Automatisches Beweisen am Beispiel Eulergerade

Die Verbindungsgerade e des Umkreismittelpunkts M und des Höhenschnittpunkts H enthält den Schwerpunkt S des Dreiecks ABC. Man nennt e auch **Eulergerade**.

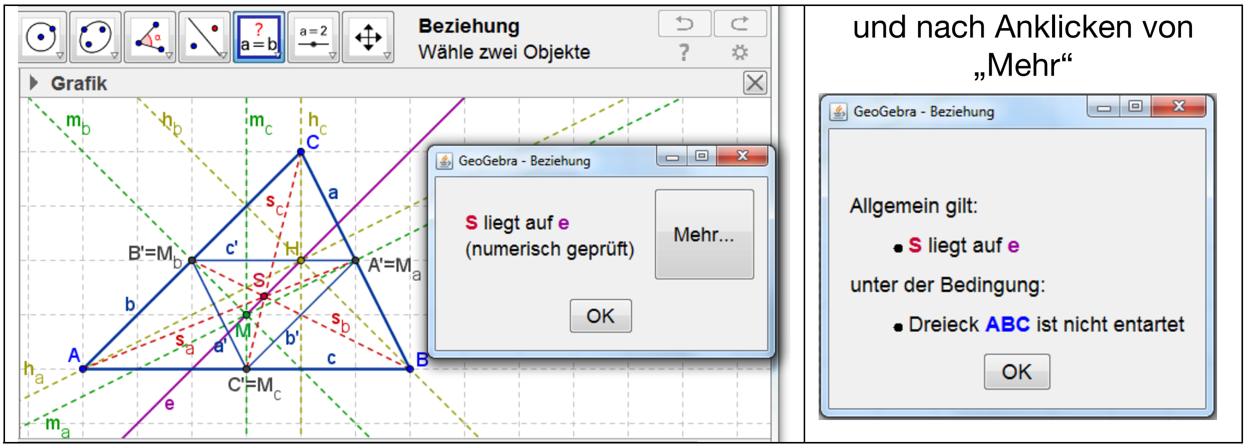


Öffnet man bei Cinderella **vor der Konstruktion** der Schnittpunkte $D = m_a \cap m_b$, $E = h_a \cap h_b$ und $F = s_a \cap s_b$ sowie der Verbindungsgerade $e = DE$ **unter Ansichten** das **Informationsfenster**, so gibt Cinderella (nach der jeweiligen Konstruktion) in der „Console“ aus, dass die Punkte jeweils auf der dritten Geraden liegen sowie auch F auf der Geraden e liegt, betrachte 7-Eulergerade.cdy. Beachte hier die fortlaufende alphabetische Bezeichnung der konstruierten Punkte, d.h. D statt M, E statt H und F statt S.

Cinderella überprüft im Hintergrund stets Identitäten und Inzidenzen von Objekten. Das gelingt, da die Koordinaten von Punkten und Koeffizienten von Geraden bei euklidischen Konstruktionen stets Lösungen linearer oder quadratischer Gleichungen sind (Schnitt zweier Geraden, Verbindungsgerade zweier Punkte, Schnitt Gerade-Kreis, Schnitt zweier Kreise). Hinter Aussagen über Identitäten oder Inzidenzen geometrischer Objekte stecken daher algebraische Gleichungen, die unabhängig von den Ausgangsdaten der Basisobjekte (hier A, B, C) sind. Da algebraische Ausdrücke identisch sind, wenn sie an genügend vielen Stellen gleich sind, überprüft Cinderella diese Übereinstimmung mittels randomisierter Verfahren (Beachte: ein Polynom n-ten Grades $P_n(x)$ mit n+1 verschiedenen Nullstellen ist identisch Null).

Da diese „Überprüfung“ jedoch nur mit endlicher Rechengenauigkeit erfolgt, liefert dieses Verfahren allerdings nur eine **starke Evidenz für eine geometrische Aussage**.

GeoGebra überprüft die **Beziehung von zwei Objekten** und gibt bei Wahl von S und e an, dass S auf e liegt, aber auch bei Wahl von H und c', dass H (momentan) auf c' liegt aber nicht allgemein. Das erkennt man aber auch beim Verschieben der Ausgangspunkte A, B, C.



Insofern lohnt es sich, beim Auftreten von „zufälligen“ Inzidenzen von Objekten bei Variation einer Konstruktion, darüber nachzudenken, ob das immer so sein muss. Diese ermöglicht das **Entdecken von Sachverhalten**. **Der exakte Beweis ist aber noch zu führen.**

Zum Beweis obiger Aussagen:

Klar ist die Konstruktion und Eigenschaft des **Umkreismittelpunkts M** und des **Schwerpunkts S**

Die Höhen des Seitenmittendreiecks A'B'C' sind die Mittellote des Dreiecks ABC, die sich in M schneiden. Damit schneiden sich in allen Dreiecken die Höhen in einem Punkt, dem **Höhenschnittpunkt H**

Da das Seitenmittendreieck A'B'C' aus dem Dreieck ABC durch zentrische Streckung aus dem Schwerpunkt S hervorgeht, liegen M, S, H kollinear => Aussage der **Eulergeraden e.**