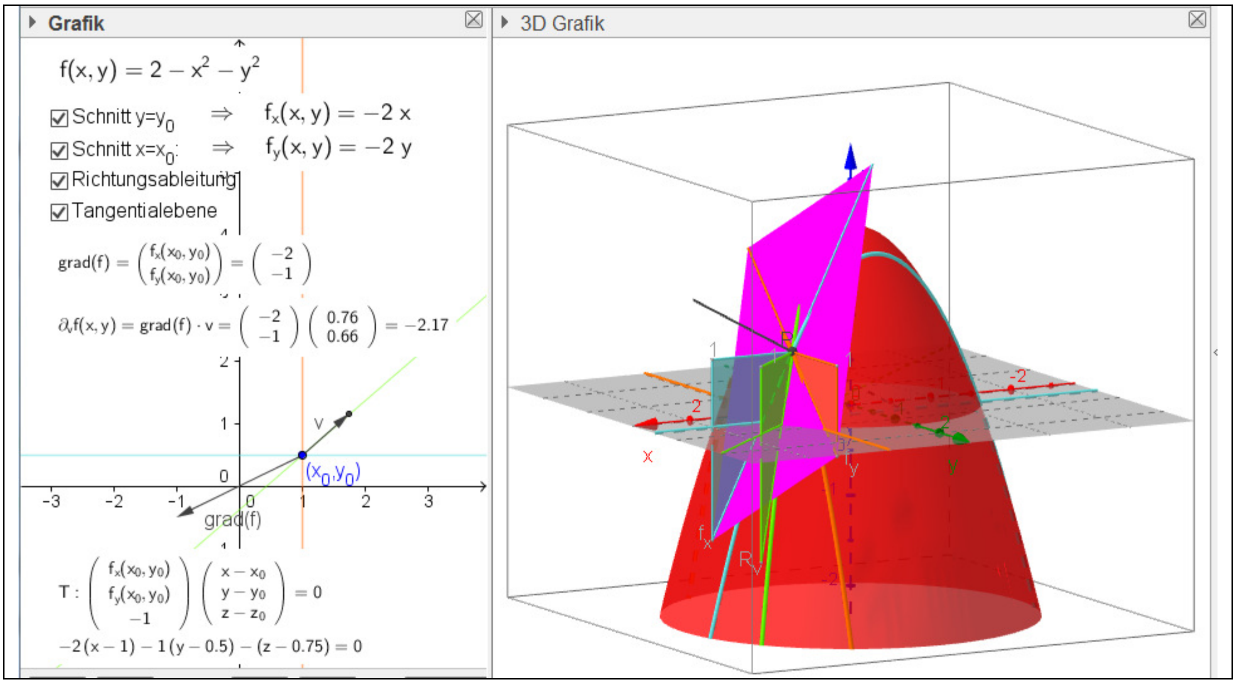
Partielle Ableitungen, Gradient und Richtungsableitung

Die Figur **Differentiation.ggb** zeigt zunächst den Schnitt längs $y = y_0$, dessen Ableitung nach x die partielle Ableitung f_x von f(x,y) nach x (bei konstantem y_0) ist. Dann analog den Schnitt längs $x = x_0$ mit der partiellen Ableitung f_y von f(x,y) nach y (bei konstantem x_0).



Diese beiden partiellen Ableitungen bilden den Gradienten von f, der in der xy-Ebene dargestellt wird und die Richtungsableitung von f(x,y) in Richtung v mit |v| = 1 (d.h. die Ableitung des Schnittes längs der Geraden durch (x_0, y_0) in Richtung v) als: $\partial_v f(x,y) = \text{grad}(f)\cdot v$.
Schließlich wird die Tangentialebene T mit dem Normalenvektor $n = (f_x , f_y , -1)^T$ ausgegeben.

Nr.	Name	Befehl	Wert
1	Funktion in mehreren Variablen f		f(x, y) = 2 - x² - y²
2	Text Text1	"f(x,y) = " + (FormelText[f]) + ""	"f(x,y) = 2 - x^{2} - y^{2}"
3	Funktion in mehreren Variablen f_x	Ableitung[f, x]	f_x(x, y) = -2x
4	Funktion in mehreren Variablen f_y	Ableitung[f, y]	f_y(x, y) = -2y
5	Punkt P_0		P_0 = (1, 0.5)
6	Punkt P	(x(P_0), y(P_0), f(x(P_0), y(P_0)))	P = (1, 0.5, 0.75)
7	Strecke z_0	Strecke[(x(P_0), y(P_0), 0), P]	z_0 = 0.75

Nach Definition der Funktion **$f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$** werden die partiellen Ableitungen mit dem Befehl **Ableitung[<Funktion>, <Variable>]** bereitgestellt. Der Punkt P_0 wird in der xy-Ebene (2D-Fenster) gewählt. Durch Eingabe von **P = (x(P_0), y(P_0), f(x(P_0),y(P_0)))** wird der zugehörige Punkt P auf dem Graphen von f im 3D-Fenster samt Ordinate z_0 bestimmt.

Beachte: P_0 wird über die Eigenschaften -> Erweitert ☑ Grafik ☐ Grafik 2 ☑ 3D Grafik in beiden Fenstern ausgegeben.

8	Wahrheitswert w_y		w_y = true
9	Gerade y_0	y = y(P_0)	y_0: y = 0.5
10	Ebene s_x	y = y(P_0)	s_x: y = 0.5
11	Parameterkurve c_x	Kurve[t, y(P_0), f(t, y(P_0)), t, -3, 3]	c_x:(t, 0.5, (2 - t^2 - 0.5^2))
12	Punkt Tx	P + (1, 0, 0)	Tx = (2, 0.5, 0.75)
13	Punkt T_x	P + (1, 0, f_x(x(P_0), y(P_0)))	T_x = (2, 0.5, -1.25)
14	Dreieck $Vieleck_x$	Vieleck[P, Tx, T_x]	$Vieleck_x$ = 1
14	Strecke vx3	Strecke[P, Tx, $Vieleck_x$]	vx3 = 1
14	Strecke vx1	Strecke[Tx, T_x, $Vieleck_x$]	vx1 = 2
14	Strecke vx2	Strecke[T_x, P, $Vieleck_x$]	vx2 = 2.24
15	Punkt T'_x	P - (1, 0, f_x(x(P_0), y(P_0)))	T'_x = (0, 0.5, 2.75)
16	Strecke t_y	Strecke[T'_x, T_x]	t_y = 4.47
17	Text Text2	"\Rightarrow \quad f_x(x,y) = " + (FormelText[f_x]) + " "	"\Rightarrow \quad f_x(x,y) =...

Mit dem Wahrheitswert w_y (Kontrollkästchen „Schnitt y=y_0“) kann der Schnitt längs $y = y_0$ ausgegeben werden, der in den **Zeilen 9 – 17** definiert wird.

Die Eingabe von **y=y(P_0)** in der Eingabezeile liefert bei aktivem 2D-Fenster die Gerade y_0, bei aktivem 3D-Fenster die Ebene s_x, deren Schnittkurve mit dem Graphen von f der Befehl **Kurve[t, y(P_0), f(t, y(P_0)), t, -3, 3]** als Parameterkurve mit dem Kurvenparameter t liefert.

Das Steigungsdreieck dieses Schnittes im Punkt P wird mit den Punkten Tx und T_x als **Vieleck$_x$** definiert und mit T'_x die Tangente in die andere Richtung verlängert, vgl. **Zeilen 12-16**.

Analog kann mit dem Wahrheitswert w_x (Kontrollkästchen „Schnitt x=x_0“) der Schnitt längs $x = x_0$ mit dem Steigungsdreieck **Vieleck$_y$** ausgegeben werden, vgl. **Zeilen 18 – 27**.

18	Wahrheitswert w_x		w_x = true
19	Gerade x_0	x = x(P_0)	x_0: x = 1
20	Ebene s_y	x = x(P_0)	s_y: x = 1
21	Parameterkurve c_y	Kurve[x(P_0), t, f(x(P_0), t), t, -3, 3]	c_y:(1, t, (2 - 1^2 - t^2))
22	Punkt Ty	P + (0, 1, 0)	Ty = (1, 1.5, 0.75)
23	Punkt T_y	P + (0, 1, f_y(x(P_0), y(P_0)))	T_y = (1, 1.5, -0.25)
24	Dreieck $Vieleck_y$	Vieleck[P, Ty, T_y]	$Vieleck_y$ = 0.5
24	Strecke vy3	Strecke[P, Ty, $Vieleck_y$]	vy3 = 1

24	Strecke vy1	Strecke[Ty, T_y, Vieleck_y]	vy1 = 1
24	Strecke vy2	Strecke[T_y, P, Vieleck_y]	vy2 = 1.41
25	Punkt T'_y	P - (0, 1, f_y(x(P_0), y(P_0)))	T'_y = (1, -0.5, 1.75)
26	Strecke t_x	Strecke[T'_y, T_y]	t_x = 2.83
27	Text Text3	"\Rightarrow \quad f_y(x,y) = " + (FormelText[f_y]) + ""	"\Rightarrow \quad f_y(x,y) =...

Die Eingabe von **grad_0 = Vektor[(f_x(P_0) , f_y(P_0))]** liefert den Vektor zunächst im Ursprung O. Er wird mit **grad = Vektor[P_0, P_0 + grad_0]** verschoben.

28	Vektor grad_0	Vektor[(f_x(x(P_0), y(P_0)), f_y(x(P_0), y(P_0)))]	grad_0 = (-2, -1)
29	Text Text6	"grad(f) = \binom{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}=" + (FormelText[grad_0]) + ""	"grad(f) = \binom{f_x(x_0,y_...
30	Vektor grad	Vektor[P_0, P_0 + grad_0]	grad = (-2, -1)

Mit dem Wahrheitswert w_v (Kontrollkästchen „Richtungsableitung") kann der Schnitt längs einer Geraden g_v durch P_0 mit Richtung v mit |v| = 1 ausgegeben werden, vgl. **Zeilen 31 – 42**

31	Wahrheitswert w_v		w_v = true
32	Kreis k	Kreis[P_0, 1]	k: x² + y² - 2x - y = -0.25
33	Punkt V	Punkt[k]	V = (1.76, 1.16)
34	Vektor v	Vektor[P_0, V]	v = (0.76, 0.66)
35	Gerade g_v	Gerade[P_0, V]	g_v: -0.66x + 0.76y = -0.28
36	Ebene s_v	y(v) x - x(v) y + z(v) z - y(v) x(P_0) + x(v) y(P_0) = 0	s_v: 0.66x - 0.76y = 0.28
37	Parameterkurve c_v	Kurve[x(P_0) + t x(v), y(P_0) + t y(v), f(x(P_0) + t x(v), y(P_0) + t y(v)), t, -2, 2]	c_v:(1 + t 0.76, 0.5 + t 0.66, (2 - (1 + t 0.76)² - (0.5 + t 0.66)²))
38	Zahl R_v	grad v	R_v = -2.17
39	Punkt T_v	P + (x(v), y(v), R_v)	T_v = (1.76, 1.16, -1.42)
40	Punkt Tv	P + (x(v), y(v), z(v))	Tv = (1.76, 1.16, 0.75)
41	Dreieck Vieleck_v	Vieleck[P, Tv, T_v]	Vieleck_v = 1.08
41	Strecke w1	Strecke[P, Tv, Vieleck_v]	w1 = 1
41	Strecke w2	Strecke[Tv, T_v, Vieleck_v]	w2 = 2.17
41	Strecke w3	Strecke[T_v, P, Vieleck_v]	w3 = 2.39
42	Text Text4	"∂$_v$f(x,y)=grad(f)\cdot v=" + (FormelText[grad]) + " " + (FormelText[v]) + "=" + (FormelText[R_v])	"∂_vf(x,y)=grad(f)\cdot v=\lef...

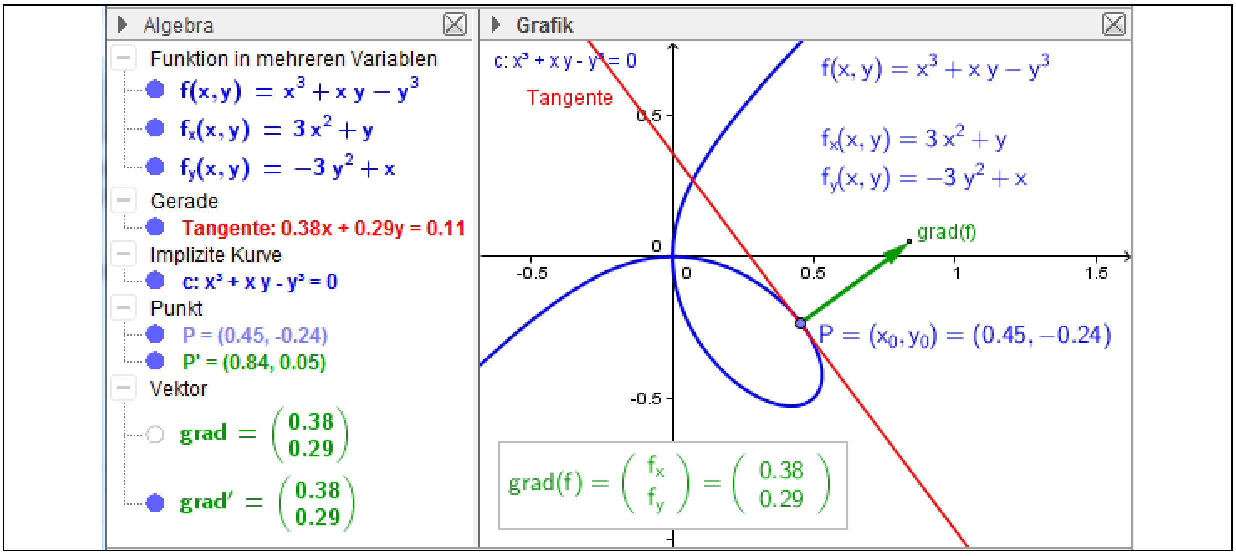
Die Richtung v der Gerade g_v wird dabei in der xy-Ebene mit einem Punkt V auf dem Kreis k um P_0 mit Radius 1 festgelegt, vgl. **Zeilen 32 – 35.**
Die Schnittebene s_v längs g_v wird im 3D-Fenster durch Eingabe der Koordinatengleichung **y(v) x - x(v) y + z(v) z - y(v) x(P_0) + x(v) y(P_0) = 0** mit dem Normalenvektor (y(v), -x(v), $0)^T$ festgelegt. **Beachte:** Im CAS-Teil von GeoGebra reicht die Eingabe von $n_v \cdot (x,y,z)= n_v \cdot P_0$.
Der Befehl **Kurve[x(P_0) + t x(v), y(P_0) + t y(v), f(x(P_0) + t x(v), y(P_0) + t y(v)), t, -2, 2]** liefert die zugehörige Schnittkurve von s_v mit dem Graphen von f als Parameterkurve.
Mit dem Wert der Richtungsableitung **R_v = grad · v** wird das Steigungsdreieck **Vieleck$_v$** dieses Schnittes analog zu obigen definiert, vgl. **Zeilen 38 – 42.**

43	Wahrheitswert w_T		w_T = true
44	Viereck $Vieleck_T$	Vieleck[T'_x, T'_y, T_x, T_y]	$Vieleck_T$ = 4.9
44	Strecke vt1	Strecke[T'_x, T'_y, $Vieleck_T$]	vt1 = 1.73
44	Strecke vt2	Strecke[T'_y, T_x, $Vieleck_T$]	vt2 = 3.32
44	Strecke vt3	Strecke[T_x, T_y, $Vieleck_T$]	vt3 = 1.73
44	Strecke vt4	Strecke[T_y, T'_x, $Vieleck_T$]	vt4 = 3.32
45	Text Text7	"$T:\left(\begin{array}{} f_x(x_0,y_0) \\ f_y(x_0,y_0) \\ -1 \end{array} \right)\left(\begin{array}{} x-x_0 \\ y-y_0	"$T:\left(\begin{array}{} f_x(...
46	Vektor n	(f_x(x(P_0), y(P_0)), f_y(x(P_0), y(P_0)), -1)	n = (-2, -1, -1)
47	Strecke nn	Strecke[P - n, P + n]	nn = 4.9

Mit dem Wahrheitswert w_T (Kontrollkästchen „Tangentialebene") kann die von den Strecken t_x und t_y aufgespannte Tangentialebene an den Graphen im Punkt P als **Vieleck$_T$** und deren Normale n ausgegeben werden, vgl. **Zeile 43 – 47**.

Definiere f durch Doppelklick auf den Graphen nach eigener Wahl um, z.B. **f(x,y) =x^2 – y^2.**

Die Figur **ImpliziteKurve.ggb** zeigt, dass der Gradient einer Funktion f(x,y) stets in Richtung



des steilsten Anstiegs (senkrecht zu den Höhenlinien, hier f(x,y) = 0) weist. Dass die Falllinien (Orthogonaltrajektorien der Höhenlinien) nicht notwendig die Kürzesten Verbindungen (Geo-dätische) auf dem Graphen von f(x,y) sind, zeigt das Beispiel **SchieferKreiskegel.ggb**.