Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. J. Hartl, Dr. H. Vogel

WS 2016/17
Blatt 11

Geometrie für das Lehramt an beruflichen Schulen

Tutoraufgaben:

T26. Auf welcher Kurve liegen die Mittelpunkte der Krümmungskreise ("Evolute") der durch $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t + t\sin t \\ \sin t - t\cos t \end{pmatrix}$, $t > 0$ gegebenen Kurve

T27. Durch die Parameterdarstellung $\Phi \subset \mathbb{R}^3 : \ \vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ \sqrt{2}\,u \end{pmatrix}$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ ist eine C^ω−Fläche im Raum gegeben.

a) Beschreiben Sie die Parameterlinien von Φ und zeigen Sie, dass Φ eine Drehfläche ist.

b) Zeigen Sie, dass $\vec{x}(u,v)$ mit $(u,v) \in G := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0\}$ regulär ist. Geben Sie einen Parameterbereich $\widetilde{G}$ an, so dass Φ sogar einfach ist.

Durch $(u(t), v(t)) = (e^t, t)$, $t \in \mathbb{R}$ ist eine Flächenkurve $c \subset \Phi : \ \vec{x}(u(t), v(t))$, $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

c) Zeigen Sie dass c eine reguläre Flächenkurve ist.

d) Berechnen Sie die Bogenlänge $s(t)$ von c.

Hausaufgaben:

H25. Die ***logarithmische Spirale*** ist gegeben durch Polarkoordinaten $r(\varphi) = a\,e^{b\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$.

a) Berechnen Sie die Bogenlänge $s(\varphi)$ von c mit der Anfangsbedingung $s(0) = 0$.

b) Zeigen Sie, dass die Kurve c die Geraden durch $O = (0,0)$ unter konstantem Winkel schneidet.

c) Zeigen Sie, dass die Evolute von c wieder eine logarithmische Spirale ist.

H26. Ein Torus entsteht im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ als Drehfläche eines Kreises $k(M,r)$ mit Mittelpunkt M und Radius $r > 0$ um eine Achse a in der Kreisebene. Der Abstand des Mittelpunkts M von der Drehachse a sei $R > 0$.

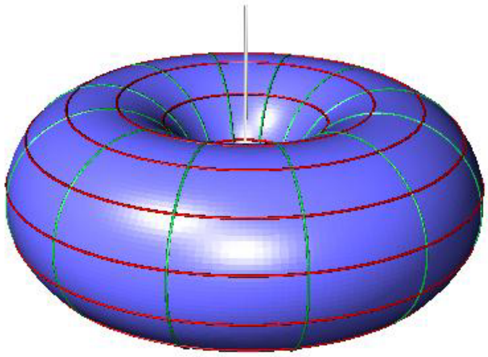
a) Geben Sie eine Parameterdarstellung $\vec{x}(u,v)$, $(u,v) \in G \subset \mathbb{R}^2$ des Torus an.

b) Für welche Radien r , R besitzt der Torus nur reguläre Punkte ?

c) Geben Sie ein Parametergebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ an, so dass durch $\vec{x}(u,v)$ der Torus als eine einfache $C^\omega-$Fläche dargestellt ist.

d) Bestimmen Sie die Oberfläche des Torus Φ für $R > r$.

Wie groß ist der Flächeninhalt des Teils von Φ, der bei Parallelbeleuchtung parallel zur x-Achse von rechts beleuchtet wird, wenn der Torus undurchsichtig ist.



Abgabetermin: Montag, 30. Januar 2017, in der Vorlesung