

Geometrie für das Lehramt an beruflichen Schulen

Tutoraufgaben:

T24. Gegeben sei im \mathbb{R}^3 eine C^∞ -Kurve c durch die Parameterdarstellung:

$$\vec{x}(t) := \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 3 \sin t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

- Zeigen Sie, dass $\vec{x}(t)$ auf $(-\pi, \pi)$ regulär und einfach ist.
- Bestimmen Sie die Tangenten von c im Anfangs- und Endpunkt A, E von c .
- Berechnen Sie die Länge s des Kurvenbogens von c (Schleife AE).
- Bestimmen Sie eine Gleichung der Schmiegebene σ von c im Punkt $\vec{x}(t)$ in Abhängigkeit von t . In welchen Punkten von c enthält die Schmiegebene den Punkt $R(0, 0, 6)$?
- Berechnen Sie die Krümmung $\kappa(t)$ und die Torsion $\tau(t)$ von c in Abhängigkeit des Parameters t . In welchen Punkten von c ist die Krümmung $\kappa(t)$ extremal?
- Skizzieren Sie die Normalprojektion c^* von c in die yz -Ebene in einem yz -Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1cm.

T25. Gegeben ist die (nichtebene) "kubische Parabel"

$$c \subset \mathbb{R}^3 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 4 - 3t^2 \\ 6t^3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Zeigen Sie, dass c eine reguläre, doppelpunkt- und W-punktfreie Kurve ist.
- Berechnen Sie die Bogenlänge $s(t)$, die Krümmung $\kappa(t)$ und die Torsion $\tau(t)$ von c .
- Bestimmen Sie das Frenet-Dreibein $\{\vec{t}(t), \vec{n}(t), \vec{b}(t)\}$ der Kurve c .
- Zeigen Sie, dass c eine Böschungslinie ist, d.h.:

Es gibt eine Richtung $\vec{a} \neq \vec{o}$ und einen Winkel $\alpha \in [0, \pi]$, so dass

$$\frac{\dot{\vec{x}}(t) \cdot \vec{a}}{|\dot{\vec{x}}(t)| \cdot |\vec{a}|} = \cos(\alpha) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Anmerkung: Alle Kurventangenten haben den selben Winkel α zur Richtung \vec{a} , d.h. die Kurve hat in jedem Punkt die selbe Steigung gegenüber einer Ebene senkrecht zur Richtung \vec{a} .

Hausaufgaben:

H23. Gegeben sei im \mathbb{R}^3 eine C^∞ -Kurve c durch die Parameterdarstellung:

$$\vec{x}(t) := \begin{pmatrix} \sin t \\ \frac{1}{2} \sin^2 t \\ \frac{1}{2}(t - \sin t \cos t) \end{pmatrix}, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

- Zeigen Sie, dass der Kurvenparameter t die Bogenlänge s von c ist. Warum ist damit c sicher regulär?
- Bestimmen Sie die Schnittgerade g der Schmiegebenen $\sigma(0)$ und $\sigma(\frac{\pi}{2})$ von c .
- Berechnen Sie die Krümmung $\kappa(s)$ und die Torsion $\tau(s)$ von c in Abhängigkeit der Bogenlänge s .
- Zeigen Sie, dass die Normalprojektion c^* von c in die xy -Ebene in einer Parabel liegt und geben Sie diese in expliziter Darstellung an.

H24. Durch die Parameterdarstellung

$$c \subset \mathbb{R}^3 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \cos t - \sin t \\ t \sin t + \cos t \\ t^2 + 1 \end{pmatrix}, \quad t > 0$$

ist eine Raumkurve c gegeben.

- Zeigen Sie, dass c eine reguläre, doppel- und W-punktfreie Kurve ist.
- Geben Sie eine Parameterdarstellung von c nach ihrer Bogenlänge s an.
- Berechnen Sie die Krümmung $\kappa(t)$ und die Torsion $\tau(t)$ von c .
- Zeigen Sie, dass c eine Böschungslinie ist, siehe **T 25**.
- Zeigen Sie, dass die Kurve c auf dem Drehparaboloid $\Phi : x^2 + y^2 - z = 0$ liegt.

Abgabetermin: Montag, 23. Januar 2017, in der Vorlesung