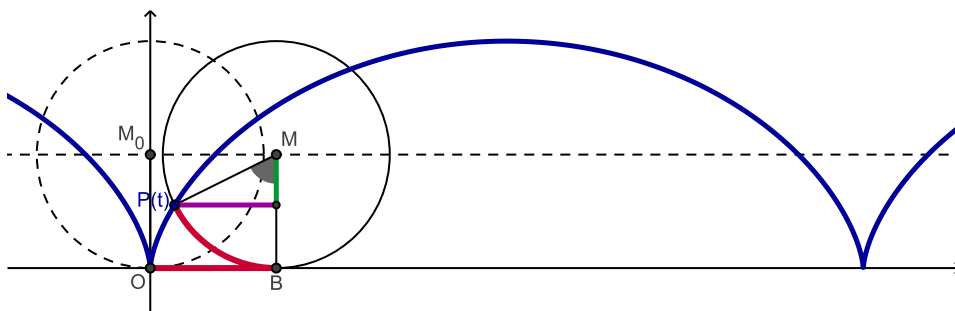


**Geometrie für das Lehramt an beruflichen Schulen**

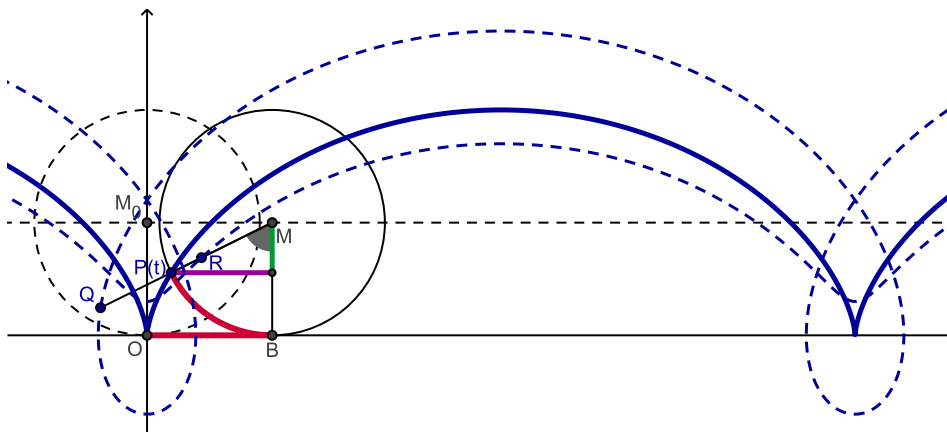
**Tutoraufgaben:**

**T22.** Eine Kreisscheibe mit Radius 1 rollt in der  $xy$ -Ebene die  $x$ -Achse entlang. Die durch einen festen Punkt auf dem Rand der Kreisscheibe beschriebene Kurve  $c$  heißt **Zykloide**. Bestimmen Sie:

- eine Parameterdarstellung von  $c$ ,
- die singulären Punkte von  $c$ ,
- die Länge von  $c$  zwischen zwei benachbarten singulären Punkten.



**Zusatz:** Punkte  $Q, R$ , die fest mit dem Kreis verbunden sind, beschreiben bei der Rollbewegung **verkürzte bzw. verlängerte Zykloiden**, wenn ihr Abstand vom Kreismittelpunkt  $M$  kleiner oder größer als der Kreisradius 1 ist.



Begründen Sie, warum diese Zykloiden keine singulären Stellen haben.

**T23.** Gegeben sei die Parameterdarstellung einer ebenen  $C^\infty$ -Kurve durch:

$$c : \vec{x}(u) = \left( \frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{u-u^3}{1+u^2} \right)^T, \quad u \in \mathbb{R}.$$

- Untersuchen Sie  $c$  auf singuläre Stellen und Doppelpunkte.
- Skizzieren Sie den Verlauf von  $c$ .
- Zeigen Sie, dass  $f : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \rightarrow \mathbb{R}$   
 $v \mapsto u = f(v) := \tan v$  eine zulässige Parametertransformation von  $c$  ist. Geben Sie die neue Parameterdarstellung von  $c$  an.

## Hausaufgaben:

**H21.** Gegeben sei die  $C^\infty$ -Abbildung  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t^3 \end{pmatrix}$

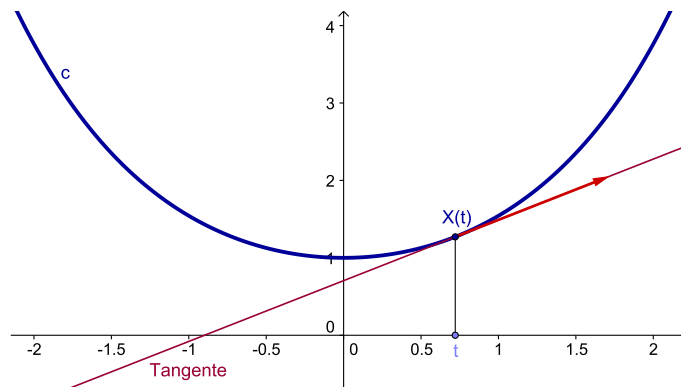
sowie die  $C^\infty$ -Funktion  $f : ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t = f(u) = \tan(u)$

Zeigen Sie:

- Die Abbildung  $x$  ist injektiv, d.h.  $\vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$ .
- Die Funktion  $f$  ist bijektiv, d.h. injektiv und surjektiv, d.h. zu jedem  $t \in \mathbb{R}$  gibt es genau ein  $u \in ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , so dass  $f(u) = t$ .
- Die Komposition  $y := x \circ f$  ist 3-mal stetig nach  $t$  differenzierbar. Geben Sie dazu die ersten Ableitungen von  $y$  mit Hilfe der Ableitungen von  $x$  und  $f$  an.
- Betrachten Sie nun  $y := x \circ f$ , d.h.  $\vec{y}(u) = \vec{x}(f(u)) = \begin{pmatrix} 3 \tan^2 u \\ 2 \tan^3 u \end{pmatrix}$  und berechnen Sie die 3. Ableitung  $\frac{d^3 \vec{y}}{du^3}$  an der Stelle  $u = \frac{\pi}{4}$ . Ist  $y$  injektiv?

**H22.** Eine Kettenlinie kann durch  $c : \vec{x}(t) = (t, \cosh t)^T$ ,  $t \in \mathbb{R}$  parametrisiert werden.

Bestimmen Sie die Bogenlänge  $s = s(t)$  von  $c$  von  $\vec{x}(0)$  bis  $\vec{x}(t)$  und stellen Sie  $c$  in Abhängigkeit der Bogenlänge  $s$  dar.



**Abgabetermin:** Montag, 16. Januar 2017, in der Vorlesung