

**Geometrie für das Lehramt an beruflichen Schulen**

**Tutoraufgaben:**

**T17.** Der folgende Satz sei mit S bezeichnet:

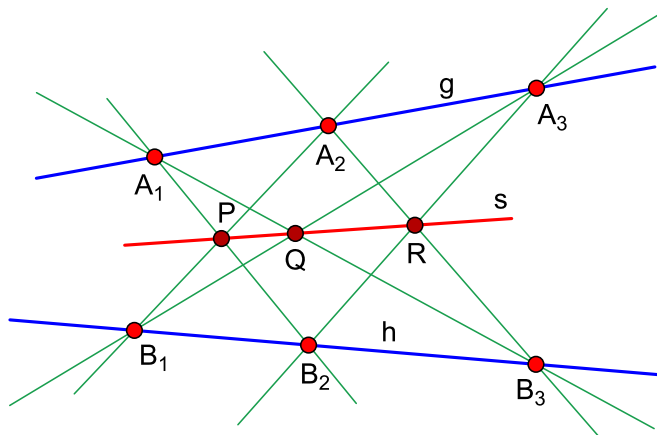
Seien  $g, h$  zwei verschiedene Geraden in einer projektiv erweiterten euklidischen Ebene  $P^2$  und  $Z \in P^2 \setminus (g \cup h)$ . Dann gilt:

Vier paarweise verschiedene Geraden  $z_1, z_2, z_3, z_4$  durch  $Z$  schneiden die beiden Geraden  $g$  und  $h$  in je vier Punkten  $G_1, G_2, G_3, G_4$  bzw.  $H_1, H_2, H_3, H_4$  mit der Eigenschaft:

$$DV(G_1, G_2, G_3, G_4) = DV(H_1, H_2, H_3, H_4)$$

- a) Dualisieren Sie den Satz S und bezeichnen Sie den dualen Satz mit S'.
- b) Begründen Sie die Gültigkeit der beiden Sätze S und S'.

**T18.** Dualisieren Sie die Aussage des Axioms von Pappos in der projektiven Ebene  $P^2$ .



**T19.** Kreise, Ellipsen und Hyperbeln sind zueinander projektiv.

- a) Bestimmen Sie eine Projektivität  $\vec{y} = U\vec{x}$  des  $P^2$ , welche die Gerade  $y=mx+b$  auf die Ferngerade  $y_0 = 0$  abbildet.
- b) Bestimmen Sie das Bild des Kreises  $x^2 + y^2 = 1$  unter dieser Abbildung speziell für  $m = 0$ . Was ergibt sich für  $b = 0, b = 1$  bzw.  $b = 2$ ?

**Hausaufgaben:**

**H15.** Gegeben sei ein Kegelschnitt  $k$  in affinen  $xy$ -Koordinaten  $x^2 - 4xy + ay^2 + 2y = 1$  mit konstantem  $a \in \mathbb{R}$ .

- a) Geben Sie eine Gleichung von  $k$  in homogenen Koordinaten an und stellen Sie diese in der Form  $\vec{x}^T A \vec{x} = 0$  mit  $A^T = A$  dar.
- b) Bringen Sie diese Gleichung durch quadratische Ergänzung auf projektive Normalform. Was gilt im Fall  $a = 3$ ?
- c) Geben Sie für  $a = 2$  die zugehörige projektive Abbildung  $\vec{x} = U\vec{y}$  an und berechnen Sie  $U^T A U$ .

**H16.** Die Aussage des Satzes von Desargues in Aufgabe **H 8b)** für den projektiven Raum  $P^3$  gilt auch in der projektiven Ebene  $P^2$ .

- a) Dualisieren Sie den Satz von Desargues in der projektiven Ebene  $P^2$ .
- b) Welcher Zusammenhang besteht im  $P^2$  zwischen dem Satz von Desargues und dem zu ihm dualen Satz ?
- c) Wie kann man die beiden Sätze in  $P^2$  in einem Satz zusammenfassen ?

**H17.** Dualisieren Sie die Aussage des Satzes von Desargues im projektiven Raum  $P^3$ , vgl. **H 8**.

**Abgabetermin:** Montag, 12. Dezember 2016, in der Vorlesung