4.3 Euklidische Geometrie mit Skalarprodukt und Vektorprodukt

Kann man zwei Vektoren miteinander multiplizieren?

4.3.1 Zerlegung einer Kraft, Skalarprodukt

Tafelskizze: Wagen wird mit einer Schnur schräg nach oben auf horizontaler Bahn gezogen: Kraft $\vec{F}$, Fahrtrichtung $\vec{r}$ mit $|\vec{r}| = 1$.

Die Kraft, die den Wagen in Richtung $\vec{r}$ zieht, hat den Betrag

$$\pm|\vec{F}|\cos\varphi,$$

wobei $\varphi = \angle(\vec{F}, \vec{r})$.

Ist z.B. $\vec{F} * \vec{r} := |\vec{F}|\cos\varphi$ ein ”schönes” Produkt?

Nein: Es ist nicht definiert für alle $\vec{r}$,
und es ist nicht symmetrisch.

Aber:

$$\vec{F} \circ \vec{s} := |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\varphi$$

ist definiert für alle Vektoren $\vec{F}$, $\vec{s}$, und $\circ$ ist symmetrisch.

Offenbar gilt:

$$(\lambda \cdot \vec{F}) \circ \vec{s} = \lambda \cdot (\vec{F} \circ \vec{s})$$

Warum gilt das auch für negative λ?

$\vec{F} \circ \vec{s}$ heißt das **Skalarprodukt** der beiden Vektoren $\vec{F}$ und $\vec{s}$.

4.3.2 Geometrische Deutung

$\vec{F} \circ \vec{s}$ ist
$|\vec{s}|$-mal ($\pm$ die Länge der Normalprojektion von $\vec{F}$ auf eine Gerade mit Richtung $\vec{s}$) und
$|\vec{F}|$-mal ($\pm$ die Länge der Normalprojektion von $\vec{s}$ auf eine Gerade mit Richtung $\vec{F}$)

Es gilt:

$$\vec{F} \circ \vec{s} = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = \vec{o} \text{ oder } \vec{s} = \vec{o} \text{ oder } \vec{F} \perp \vec{s}.$$

4.3.3 Distributivität

Tafelskizze: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$, $\vec{s}$,
Risse von Lotebenen zu $\vec{s}$

$\vec{s} \parallel$ Zeichenebene

Damit ist

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \circ \vec{s} = \vec{F}_1 \circ \vec{s} + \vec{F}_2 \circ \vec{s}$$

4.3.4 Anschluss an die Lineare Algebra (LA)

Nach 4.3.1 und 4.3.3 ist $\circ$ eine Bilinearform (**BLF**),
die nach 4.3.1 symmetrisch ist,
und die offenbar positiv definit ist:

$$\vec{F} \circ \vec{F} \geq 0, \quad \vec{F} \circ \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} = \vec{o}.$$

Also ist $\circ$ ein Skalarprodukt im Sinn der LA.

Schreibweisen:

$$\vec{F} \circ \vec{s} =:< \vec{F}, \vec{s} >=: \vec{F} \cdot \vec{s} =: \vec{F}\vec{s}.$$

$$\vec{F}^2 := \vec{F} \circ \vec{F}$$

$$||\vec{F}|| := |\vec{F}| := \sqrt{\vec{F}^2}$$

heißt die **Länge** oder die **Norm** oder der **Betrag** von $\vec{F}$.

4.3.5 Kanonische Darstellung

Sei $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ eine Orthonormalbasis (**ONB**), d.h.

$$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3 \perp \vec{e}_1$$

und

$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$$

Dann gilt für Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y}$:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

$$\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$$

mit $x_i, y_i \in \mathbb{R} (i = 1, 2, 3)$ und

$$\vec{x}\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

4.3.6 Koordinatenvektoren bezüglich einer ONB

Sind $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ Koordinatenvektoren **bezüglich einer ONB (!)**, so ist

$$\vec{x}\vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \vec{x}^T \vec{y} = \vec{y}^T \vec{x}.$$

4.3.7 Das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

$\vec{v}$, $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Dann definiert man:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} :=$$

$$:= \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} v_3 & w_3 \\ v_1 & w_1 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

Das ist das **Vektorprodukt** oder **Kreuzprodukt** (oder **äußere Produkt**) der Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$.

Nach dem Determinantenentwicklungssatz von Laplace gilt für alle $\vec{x}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$:

$$\vec{x}^T(\vec{v} \times \vec{w}) = \det(\vec{x}\vec{v}\vec{w})$$

Satz: Für alle $\vec{x}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ ist

$$\vec{x}^T(\vec{v} \times \vec{w})$$

das (orientierte) Volumen des von $\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}$ aufgespannten **Spat**s = **Parallelepiped**s.

Daraus folgt speziell:

$$\vec{v}^T(\vec{v} \times \vec{w}) = \det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (*)$$

und

$$\vec{w}^T(\vec{v} \times \vec{w}) = 0 \quad (**)$$

Aus (*) und (**) :

Satz: Für alle $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{v}, \vec{w}.$$

Wählt man für $\vec{x}$ speziell einen Einheitsvektor in Richtung von $\vec{v} \times \vec{w}$, so ist

$$\vec{x}^T(\vec{v} \times \vec{w})$$

1-mal die (orientierte) Grundfläche des von $\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}$ aufgespannten Spats. Daher gilt:

Satz: Für alle $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, die Koordinatenvektoren bezüglich einer ONB sind, ist $||\vec{v} \times \vec{w}||$ die Fläche des von $\vec{v}, \vec{w}$ aufgespannten Parallelogramms.

Satz: Für alle $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$$

Bew.: Definition anschauen!

Satz: Für alle $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$$

Bew.: nachrechnen!

Satz: Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und für alle $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$(\lambda \vec{v}) \times \vec{w} = \lambda \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Bew.: Definition anschauen!

Satz: Sind $\vec{v}$, $\vec{w}$ Koordinatenvektoren bzgl. einer ONB, so gilt:

$$||\vec{v}\times\vec{w}||^2 = ||\vec{v}||^2||\vec{w}-||\vec{v}||^2||\vec{w}||^2 \cos^2 \angle(\vec{v},\vec{w}) =$$

$$= ||\vec{v}||^2||\vec{w}||^2 \sin^2 \angle(\vec{v},\vec{w})$$

Eine geometrische Interpretation, wenn $\vec{v}$, $\vec{w}$ Koordinatenvektoren bezüglich einer ONB:

$$\vec{v} \times \vec{w} \text{ ist ein Vektor } \perp \vec{v}, \vec{w}$$

$$\text{mit der Länge } ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}|| \cdot \sin \angle(\vec{v},\vec{w}).$$

Davon gibt es zwei!

Von jetzt an werde eine Rechts-ONB vorausgesetzt. Dann gilt allgemein:

$$\vec{x}^T(\vec{v} \times \vec{w}) = \det(\vec{x}\vec{v}\vec{w}) = \det(\vec{v}\vec{w}\vec{x}) > 0 \Leftrightarrow$$

$\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Daraus folgt:

$$\det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{v} \times \vec{w})^2 = ||\vec{v} \times \vec{w}||^2 > 0$$

falls $\vec{v}$, $\vec{w}$ l.u.

Satz: $\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem, falls $\vec{v}, \vec{w}$ l.u.

4.3.8 Beispiele (bzg. kartesischer Rechts-KSe)

a) Geraden $g : \vec{x} = \vec{a} + t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}$
$h : \vec{x} = \vec{b} + s\vec{w}, \quad s \in \mathbb{R}$

g nicht parallel zu h

Ges.: Abstand $\mathrm{d}(g, h)$

$$\mathrm{d}(g,h) = \frac{|\det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{b} - \vec{a})|}{|\vec{v} \times \vec{w}|}$$

Warum?

Projektion $\perp \vec{v} \times \vec{w}$,
Projektionsrichtung nicht parallel zu g,
nicht parallel zu h

Tafelskizze!

$\mathrm{d}(g, h) =$
$|$Normalprojektion von $\vec{b} - \vec{a}$ auf $\vec{v} \times \vec{w}|$

$$= |(\vec{b} - \vec{a}) \frac{\vec{v} \times \vec{w}}{|\vec{v} \times \vec{w}|}|$$

b) $\Delta A(\vec{a})B(\vec{b})C(\vec{c})$ im dreidim. Raum

Ges.: Dreiecksfläche F:

$$F = \frac{1}{2}|(\vec{c} - \vec{a}) \times (\vec{b} - \vec{a})|$$

Warum?

Tafelskizze

Projektion $\perp ABC$

Zwei Deutungen:
halbe Parallelogrammfläche oder
Länge einer Höhe ist

$$|\vec{c} - \vec{a}| \sin \angle(\vec{c} - \vec{a}, \vec{b} - \vec{a})$$

c) $\Delta A(\vec{a})B(\vec{b})C(\vec{c})$ in der Ebene

Ges.: Dreiecksfläche F:

$$F = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Warum? (Sind das homogene Koordinaten?)

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vec{a} & \vec{b}-\vec{a} & \vec{c}-\vec{a} \end{pmatrix} =$$

$$\det(\vec{b}-\vec{a}, \vec{c}-\vec{a})$$

Nach **b)** ist

$$F = \frac{1}{2}|\begin{pmatrix} \vec{b}-\vec{a} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vec{c}-\vec{a} \\ 0 \end{pmatrix}| =$$

$$= \frac{1}{2}|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \det(\vec{b}-\vec{a}, \vec{c}-\vec{a}) \end{pmatrix}| =$$

$$= \frac{1}{2}|\det(\vec{b}-\vec{a}, \vec{c}-\vec{a})|$$

Achtung: (*) liefert eine **orientierte Dreiecksfläche**

d) Brennpunkte von Ellipsen

Geg.: Zwei Pkte F_1, F_2, $F_1 \neq F_2$, in der euklid. Ebene

Ges.: Menge aller Pkte $X(x, y)$, für die gilt:

$$\mathrm{d}(X, F_1) + \mathrm{d}(X, F_2) = 2a$$

mit $a \in \mathbb{R}$ fest

Tafelskizze mit kart. xy-KS, $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ mit $c > 0$, $X(x, y)$

Notwendig: $2a \geq \mathrm{d}(F_1, F_2)$

$$2a = \mathrm{d}(X, F_1) + \mathrm{d}(X, F_2) =$$

$$= \sqrt{(x-(-c))^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(2a - \sqrt{(x-(-c))^2 + y^2})^2 = (\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$$

$$4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 =$$

$$= (x-c)^2 + y^2$$

$$4a^2 + 4xc = 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$16a^4 + 32a^2xc + 16x^2c^2 = 16a^2((x+c)^2 + y^2)$$

Division durch 16 und weitere Umformung ergibt:

$$a^4 + 2a^2xc + x^2c^2 = a^2((x+c)^2 + y^2)$$

$$a^4 + x^2c^2 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$a^2 \underbrace{(a^2 - c^2)}_{=:b^2} = (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 | : a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Die gesuchte Punktmenge ist eine **Ellipse** e.

Was ist b?

Tafelskizze

$a^2 = b^2 + c^2$ (Pythagoras)

b ist die **kleine Halbachse** von e
a ist die **große Halbachse** von e
F_1, F_2 ... **Brennpunkte** von e

Die soeben gezeigte Eigenschaft gibt Anlass zur **Gärtnerkonstruktion** der Ellipse.

Mitteilung ohne Beweis:

Der Scheitelkrümmungskreis einer Ellipse in einem $\left\{\begin{array}{c}\text{Haupt}\\ \text{Neben}\end{array}\right\}$scheitel hat den Radius $\left\{\begin{array}{c}\frac{b^2}{a}\\ \frac{a^2}{b}\end{array}\right\}$.

Tafelskizze: Krümmungskreiskonstruktion

Gedächtnisstütze: Dimension Länge!