4 Ein wenig analytische Geometrie

4.1 Einige Grundgebilde der projektiven Geometrie

4.1.1 Gerade

Im Raum in homogenen Koordinaten:

$P(\vec{p})$, $Q(\vec{q})$ verschiedene Punkte
$\Rightarrow$ $\vec{p}$, $\vec{q}$ linear unabh''angig (**l.u.**)

Parameterdarstellung von $PQ =: g$

$g : \vec{x} = u \cdot \vec{p} + v \cdot \vec{q}$ mit $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$u = 0$ liefert Q
$v = 0$ liefert P

Division durch u und $\frac{v}{u} =: v'$:

$$\vec{x} = \vec{p} + v' \cdot \vec{q} \quad \text{mit } v' \in \mathbb{R}$$

liefert $g \setminus \{Q\}$.

Division durch v liefert $g \setminus \{P\}$.

Wenn Q ein Fernpunkt ist, liefert Division durch u die übliche Parameterdarstellung in affinen Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + v' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

In der Ebene:

Gleichung einer Geraden in affinen Koordinaten:

$$a_1x + a_2y + a_0 = 0 \qquad (a_1, a_2) \neq (0,0)$$

In homogenen Koordinaten: $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$

$$a_1\frac{x_1}{x_0} + a_2\frac{x_2}{x_0} + a_0 = 0 \qquad | \cdot x_0$$

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \qquad (*)$$

(*) ist die Gleichung einer Geraden in P^2 in homogenen Koordinaten.

Für $(a_1, a_2) = (0,0)$ und $a_0 \neq 0$ liefert (*) die Ferngerade $x_0 = 0$.
(In affinen Koordinaten ausgeschlossen)

Für eigentliche Geraden ist $(a_1, a_2) \neq 0$ und es gilt: $(0, a_2, -a_1)$ ist Fernpunkt.

Beobachtung: (*) ist symmetrisch in $\vec{a}$ und $\vec{x}$.

Für festes $\left\{ \begin{array}{c} \vec{a} \\ \vec{x} \end{array} \right\}$ ist (*) die Gleichung für die Menge der $\left\{ \begin{array}{c} \text{Punkte auf einer Geraden} \\ \text{Geraden durch einen Punkt} \end{array} \right\}$.

$\left\{ \begin{array}{c} \vec{a} \\ \vec{x} \end{array} \right\}$ ist homogener Koordinatenvektor eine$\left\{ \begin{array}{l} \text{r Geraden} \\ \text{s Punktes} \end{array} \right\}$.

Damit hat man zwei bijektive Abbildungen:

Punkte eines $P^2 \leftrightarrow$
homogene Koordinatenvektoren aus dem $\mathbb{R}^3 \leftrightarrow$
Geraden eines P^2

Die Menge der Geraden einer projektiv abgeschlossenen euklidischen Ebene P^2 bildet selbst eine projektiv abgeschlossene euklidische Ebene, die zu P^2 duale Ebene $\widehat{P}^2$.

(Der Ferngeraden $1 \cdot x_0 + 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0$ entspricht dabei der Koordinatenursprung $(1, 0, 0)$ eines kartesischen KS.)

Tafelskizzen:

Seien $\vec{a}$, $\vec{b}$ Koordinatenvektoren zweier Geraden. Dann ist
$\vec{a}^T\vec{x} = 0$, $\vec{b}^T\vec{x} = 0$
ein lineares Gleichungssystem (**LGS**) für deren Schnittpunkt $X(\vec{x})$.

Seien $\vec{x}$, $\vec{y}$ Koordinatenvektoren zweier Punkte. Dann ist
$\vec{a}^T\vec{x} = 0$, $\vec{a}^T\vec{y} = 0$
ein LGS für deren Vebindungsgerade $g(\vec{a})$.

Dualitätsprinzip der ebenen projektiven Geometrie:

Ist A eine allgemeingültige Aussage in P^2, in der Punkte, Geraden, Verbinden von Punkten, Schneiden von Geraden und keine weiteren Operationen vorkommen, so erhält man aus A eine dazu duale Aussage $\hat{A}$, inden man ersetzt:

A	$\hat{A}$
Punkt	Gerade
Gerade	Punkt
verbinden	schneiden
schneiden	verbinden

$\hat{A}$ braucht nicht mehr eigens bewiesen zu werden.

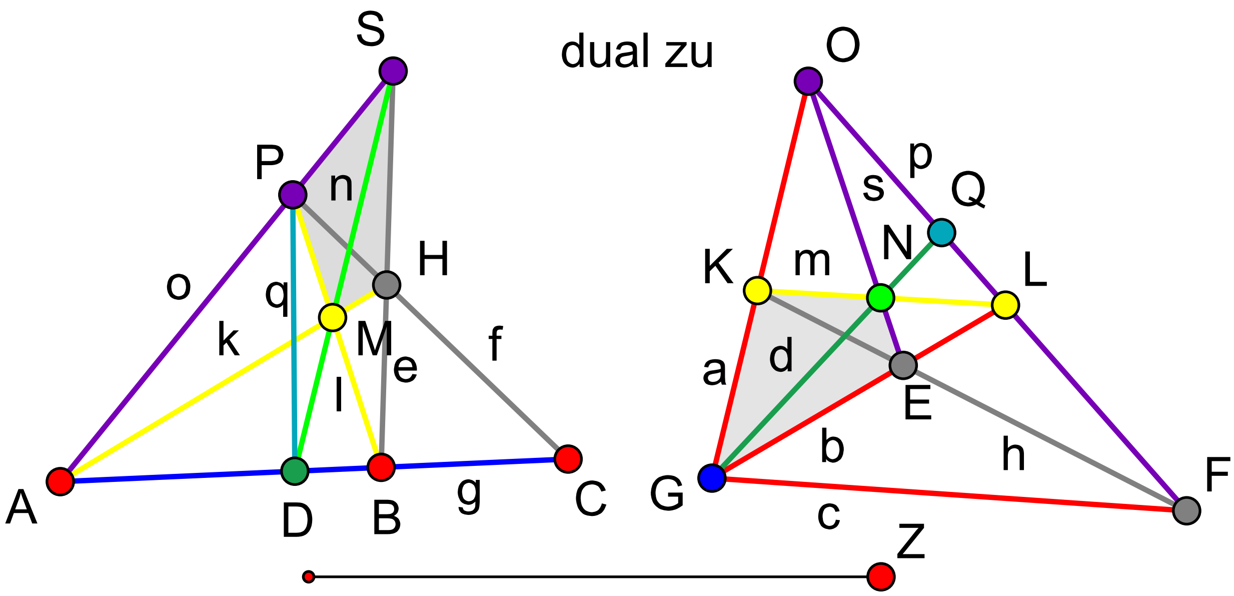
Beispiel: Definition der harmonischen Lage von vier Geraden durch einen Punkt:

Erinnerung:
Geg.: ebenes Vierseit $PQRS$ mit den Seiten $p := PQ$, $q := QR$, $r := RS$, $s := SP$
Schnittpunkte der Gegenseiten
$p \cap r =: \{A\}$, $q \cap s =: \{B\}$
Schnittpunkte von AB mit den Diagonalen
$AB \cap QS =: \{C\}$, $AB \cap PR =: \{D\}$
Dann heißen die vier Punkte A, B, C, D (in dieser Reihenfolge) **in harmonischer Lage**.

Tafelskizze:

Dual dazu:
Geg.: ebenes Viereck $pqrs$ mit den Ecken $P := pq$, $Q := qr$, $R := rs$, $S := sp$
Verbindungsgeraden der Gegenecken $PR =: a$, $QS =: b$
Verbindungsgerade von ab mit den Schnittpunkten der Gegenseiten $(ab)(qs) =: c$, $(ab)(pr) =: d$
Dann heißen die vier Geraden a, b, c, d (in dieser Reihenfolge) **in harmonischer Lage**.

Konstruktion der vierten harmonischen Geraden d zu drei gegebenen Geraden a, b, c:



Die Figur stammt von Dr. Hermann Vogel und wurde mit Cinderella erstellt.

Man sieht an der Figur:

Vier Geraden a, b, c, d in P^2 durch einen Punkt G liegen harmonisch $\Leftrightarrow$ Ihre Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden h mit $G \notin h$ liegen harmonisch.

4.1.2 Ebene

In homogenen Koordinaten:

Eine Ebene ε wird aufgespannt durch drei **nicht kollineare** Punkte $P(\vec{p})$, $Q(\vec{q})$, $R(\vec{r})$.

(Punkte heißen **kollinear**, wenn sie auf einer gemeinsamen Geraden liegen.)

Dann sind $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ l.u.

$\varepsilon : \vec{x} = u\vec{p} + v\vec{q} + w\vec{r}, \quad (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{o}^T\}$.

Division durch u: $\frac{v}{u} =: v'$, $\frac{w}{u} =: w'$:

$$\vec{x} = \vec{p} + v'\vec{q} + w'\vec{r}, \quad (v', w') \in \mathbb{R}^2$$

liefert $\varepsilon \setminus QR$.

Sind $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ fest gewählt, so sind $(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$ homogene Koordinaten in ε, (v', w') "affine Koordinaten" in $\varepsilon \setminus QR$.

Ist P ein eigentlicher Punkt, und sind Q, R Fernpunkte, so erhält man die Darstellung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + v' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} + w' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix},$$

also (bis auf die erste Zeile) die bekannte Parameterdarstellung einer Ebene im $\mathbb{R}^3$. Dann sind (v', w') **affine Koordinaten in** ε.

Alternative Beschreibung:

Eine Ebene ε in $\mathbb{E}^3$ kann man auch beschreiben durch eine Gleichung in affinen Koordinaten:

$$a_1x+a_2y+a_3z+a_0 = 0, \quad (a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0).$$

In homogenen Koordinaten:
$x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$, $z = \frac{x_3}{x_0}$:

$$a_1 \cdot \frac{x_1}{x_0} + a_2 \cdot \frac{x_2}{x_0} + a_3 \cdot \frac{x_3}{x_0} + a_0 = 0 \qquad | \cdot x_0$$

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \qquad (*)$$

(*) ist die Gleichung einer Ebene ε in P^3, falls $(a_0, a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0, 0)$.

Falls $(a_1, a_2, a_3) = (0,0,0)$ und $a_0 \neq 0$: Fernebene des P^3.

(*) und $x_0 = 0$: Ferngerade von ε

Für festes $\left\{ \begin{array}{c} \vec{a} \\ \vec{x} \end{array} \right\}$ ist (*) die Gleichung für die Menge aller $\left\{ \begin{array}{c} \text{Punkte in einer Ebene} \\ \text{Ebenen durch einen Punkt} \end{array} \right\}$.

$\left\{ \begin{array}{c} \vec{x} \\ \vec{a} \end{array} \right\}$ ist homogener Koordinatenvektor $\left\{ \begin{array}{c} \text{eines Punktes} \\ \text{einer Ebene} \end{array} \right\}$.

Bijektive Beziehungen:

Punkte eines $P^3 \leftrightarrow$
homogene Koord.-Vektoren eines $\mathbb{R}^4 \leftrightarrow$
Ebenen eines P^3

Die Menge der Ebenen eines dreidimensionalen projektiv abgeschlossenen euklidischen Raumes P^3 bildet selbst einen dreidimensionalen projektiv abgeschlossenen euklidischen Raum, den zu P^3 **dualen Raum** $\widehat{P}^3$.

Tafelskizzen:

Seien $\vec{a}$, $\vec{b}$ Koordinatenvektoren zweier Ebenen. Dann ist
$\vec{a}^T\vec{x} = 0$, $\vec{b}^T\vec{x} = 0$
ein lineares Gleichungssystem (**LGS**) für deren Schnittgerade g.

Seien $\vec{x}$, $\vec{y}$ Koordinatenvektoren zweier Punkte. Dann ist
$\vec{a}^T\vec{x} = 0$, $\vec{a}^T\vec{y} = 0$
ein LGS für deren Vebindungsgerade g.

Dualitätsprinzip der räumlichen projektiven Geometrie:

Ist A eine allgemeingültige Aussage in P^3, in der Punkte und Ebenen (und Geraden) sowie Verbinden und Schneiden und keine weiteren Operationen vorkommen, so erhält man aus A eine dazu duale Aussage $\hat{A}$, inden man ersetzt:

A	$\hat{A}$
Punkt	Ebene
Gerade	Gerade
Ebene	Punkt
verbinden	schneiden
schneiden	verbinden

$\hat{A}$ braucht nicht eigens bewiesen zu werden.

4.1.3 Quadriken

Gleichung einer eigentlichen **Fläche zweiter Ordnung**, einer eigentlichen **Quadrik**, im $\mathbb{E}^3$ in affinen Koordinaten:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 +$$

$$2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +$$

$$2a_{01}x + 2a_{02}y + 2a_{03}z + a_{00} = 0$$

mit $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}) \neq \vec{o}^T$.

Gleichung einer eigentlichen **Kurve zweiter Ordnung**, eines eigentlichen **Kegelschnitts** in $\mathbb{E}^2$ in affinen Koordinaten:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$$

mit $(a_{11}, a_{22}, a_{12}) \neq \vec{o}^T$.

Rechnung für Kegelschnitte:

homogene Koordinaten:
$x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$

$$a_{11}(\frac{x_1}{x_0})^2 + a_{22}(\frac{x_2}{x_0})^2 + 2a_{12}(\frac{x_1}{x_0})(\frac{x_2}{x_0}) +$$

$$2a_{01}(\frac{x_1}{x_0}) + 2a_{02}(\frac{x_2}{x_0}) + a_{00} = 0$$

Multiplikation mit x_0^2:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 +$$

$$2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{00}x_0^2 = 0$$

Umsortieren und:
$a_{10} := a_{01}$, $a_{20} := a_{02}$, $a_{21} := a_{12}$
liefert:
$a_{00}x_0^2 + a_{01}x_0x_1 + a_{02}x_0x_2 +$
$a_{10}x_1x_0 + a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 +$
$a_{20}x_0x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 = 0.$

Mit

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} =: A$$

ist A symmetrisch und die Kegelschnittsgleichung kann man schreiben als:

$$\vec{x}^T A \vec{x} = 0. \qquad (*)$$

Definition: Ist $A \neq O$, $A^T = A$, eine 3×3-Matrix, so ist (*) die Gleichung einer **Kurve zweiter Ordnung** (eines **Kegelschnitts**, einer **Quadrik**) in P^2 in homogenen Koordinaten.

Definition: Ist $A \neq O$, $A^T = A$, eine 4×4-Matrix, so ist (*) die Gleichung einer **Fläche zweiter Ordnung** (einer **Quadrik**) in P^3 in homogenen Koordinaten.

Warum ist für projektive Quadriken die Forderung an A schwächer als für affine Quadriken?

Ist $\det A \neq 0$, so heißt die Quadrik **nichtentartet**, sonst **entartet**.

Für jede Quadrik lässt sich durch eine Projektivität erreichen, dass ihre Gleichung in **Normalform** (**NF**) vorliegt:

$$x_0^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots x_r^2 = 0.$$

Dabei ist $2p \geq r$.

Kein Beweis, sondern ein **Beispiel:**

$x_0^2 - 2x_0x_2 + 4x_0x_3 + x_1^2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 5x_3^2 = 0$

Wir klammern $2x_0$ aus allen gemischten Produkten aus, in denen x_0 vorkommt:

$x_0^2 + 2x_0(-x_2 + 2x_3) + x_1^2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 5x_3^2 = 0$

Wir ergänzen die ersten zwei Summanden nach einer binomischen Formel zu einem vollständigen Quadrat und ziehen die Ergänzung wieder ab:

$x_0^2 + 2x_0(-x_2 + 2x_3) + (-x_2 + 2x_3)^2 - (-x_2 + 2x_3)^2 + x_1^2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 5x_3^2 = 0$

Wir fassen das vollständige Qudrat zusammen, multiplizieren den Rest aus uns sortieren geschickt:

$(x_0 - x_2 + 2x_3)^2 + x_1^2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 = 0$

Jetzt kommt x_0 nur noch in der ersten Klammer vor. Wir machen weiter mit x_1:

$(x_0 - x_2 + 2x_3)^2 + x_1^2 + 2x_1x_3 + x_3^2 - x_3^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 = 0$

$(x_0 - x_2 + 2x_3)^2 + (x_1 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 = 0$

$(x_0 - x_2 + 2x_3)^2 + (x_1 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 = 0$
$(x_0 - x_2 + 2x_3)^2 + (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2 = 0$

Wir setzen:
$x_0' := x_0 - x_2 + 2x_3$,
$x_1' := x_1 + x_3$,
$x_2' := x_2 + x_3$,
$x_3' := x_3$ oder

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Damit erhält man die neue Quadrikgleichung:

$$x_0'^2 + x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 = 0,$$

also die Normalform. Wir haben es so eingerichtet, dass gilt:
Die Transformationsmatrix in (*) ist eine obere Dreiecksmatrix
mit nicht verschwindenden Diagonalelementen,
also mit einer Determinante $\neq 0$.

Geht das immer?

Was ist mit

$$x_0 x_1 = 0$$

Quadratische Ergänzung nicht möglich!

Trick:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &=: x_0' + x_1' \\ x_1 &=: x_0' - x_1' \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_0 x_1 = x_0'^2 - x_1'^2$$

Damit hat man Quadrate erhalten.
Gegebenenfalls kann man jetzt quadratisch ergänzen.

Quadrik-Normalformen im P^3:

Nichtentartete Quadriken:

$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ . . .

nichtentartete nullteilige Quadrik

(nichtentartet, weil die Anzahl der Quadrate $4 = 3 + 1$ ist,
nullteilig, weil Null die Anzahl der Minuszeichen in der Normalform ist)
Die nichtentartete nullteilige Quadrik enthält keine (reellen) Punkte.

$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ . . .

ovale Quadrik

(Kugel,
Ellipsoid,
elliptisches Paraboloid,
zweischaliges Hyperboloid)

$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$ . . .

ringartige Quadrik

(einschaliges Hyperboloid,
hyperbolisches Paraboloid)

Entartete Quadriken:

$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ ...
nullteiliger Kegel, Doppelpunkt

$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ ...
einteiliger Kegel

(Kegel,
elliptischer Zylinder,
parabolischer Zylinder,
hyperbolischer Zylinder)

Das waren **Kegel mit punktförmiger Spitze**.

$x_0^2 - x_1^2 = 0 \ldots (x_0 + x_1)(x_0 - x_1) = 0$
(reelles) **schneidendes Ebenenpaar**

(Paar einander schneidender Ebenen,
Paar zueinander paralleler Ebenen)

$x_0^2 + x_1^2 = 0 \ldots (x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1) = 0$
nullteiliges Ebenenpaar,
konjugiert komplexes Ebenenpaar

mit der reellen Schnittgeraden $x_0 = x_1 = 0$,
Doppelgerade

$x_0^2 = 0$ ... **Doppelebene**

Normalformen von Kegelschnitten in P^2:

Nichtentartete Kegelschnitte:

$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ ... **nichtentarteter nullteiliger Kegelschnitt**

$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ ... **nichtentarteter einteiliger Kegelschnitt**
(Ellipse,
Parabel,
Hyperbel)

Entartete Kegelschnitte:

$x_0^2 + x_1^2 = 0$ ... $(x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1) = 0$
nullteiliges Geradenpaar, Doppelpunkt

$x_0^2 - x_1^2 = 0$ ... $(x_0 + x_1)(x_0 - x_1) = 0$
(einteiliges) schneidendes oder paralleles **Geradenpaar**

$x_0^2 = 0$ ... **Doppelgerade**