3 Einführung von Koordinaten

3.1 Affine Koordinaten

3.1.1 Affines Koordinatensystem im Raum

Tafelskizze

Im dreidimensionalen euklidischen Anschauungsraum $\mathbb{E}^3$
wählen wir einen Punkt O,
den **Koordinatenursprung** und
drei Geraden durch O,
die nicht in einer Ebene liegen,
die x-, die y- und die z-**Achse**.

Die Geraden brauchen nicht paarweise zueinander orthogonal zu sein.

Auf der x-Achse wählen wir einen Punkt $E_x \neq O$ als **Einheitspunkt**
usw.

Dabei ist im allgemeinen $d(E_x, O) \neq d(E_y, O) \neq d(E_z, O) \neq d(E_x, O)$.

Die x- und die y-Achse spannen die xy-**Ebene** auf usw.

Ist P ein Punkt im $\mathbb{E}^3$, so schneidet
die Parallele zur z-Achse die xy-Ebene im Punkt P',
die Parallele zur x-Achse die yz-Ebene im Punkt P'' und
die Parallele zur y-Achse die xz-Ebene im Punkt P'''.

Die Parallele zur y-Achse durch P' schneidet die x-Achse im Punkt P_x,
die Parallele zur x-Achse durch P' schneidet die y-Achse im Punkt P_y und
die Parallelebene zur xy-Ebene durch P schneidet die z-Achse im Punkt P_z.

Die Formulierung ist nicht symmetrisch in P_x, P_y und P_z, aber das liegt nur an der Kürze.

Das Teilverhältnis

$$TV(P_xE_xO) = \frac{d(P_x, O)}{d(E_x, O)} \cdot \varepsilon$$

(siehe 2.2.5) heißt x-**Koordinate** p_x von P bezüglich des **affinen** xyz-**Koordinatensystems**.

Analog: p_y, p_z.

Kurzschreibweise: $P(p_x, p_y, p_z)$: Der Punkt P hat die **affinen Koordinaten** p_x, p_y, p_z.

P hat bezüglich dieses xyz-**Koordinatensystems** (xyz-**KS**) den **Koordinatenvektor**

$$\vec{p} := \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}.$$

3.1.2 Wechsel von affinen KSen bei gleichem Ursprung

Seien ein xyz-KS und ein $x'y'z'$-KS gegeben mit (zunächst) demselben Ursprung O.

Für einen Punkt P gilt dann:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OE_x} \cdot p_x + \overrightarrow{OE_y} \cdot p_y + \overrightarrow{OE_z} \cdot p_z = \\ &= \overrightarrow{OE'_x} \cdot p'_x + \overrightarrow{OE'_y} \cdot p'_y + \overrightarrow{OE'_z} \cdot p'_z\end{aligned}$$

Sei nun

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE'_x} &= a_{11}\overrightarrow{OE_x} + a_{21}\overrightarrow{OE_y} + a_{31}\overrightarrow{OE_z} \\ \overrightarrow{OE'_y} &= a_{12}\overrightarrow{OE_x} + a_{22}\overrightarrow{OE_y} + a_{32}\overrightarrow{OE_z} \qquad (*) \\ \overrightarrow{OE'_z} &= a_{13}\overrightarrow{OE_x} + a_{23}\overrightarrow{OE_y} + a_{33}\overrightarrow{OE_z}\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} = (p'_x a_{11} + p'_y a_{12} + p'_z a_{13})\overrightarrow{OE_x} + \\ + (p'_x a_{21} + p'_y a_{22} + p'_z a_{23})\overrightarrow{OE_y} + \\ + (p'_x a_{31} + p'_y a_{32} + p'_z a_{33})\overrightarrow{OE_z}\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{aligned}p_x &= p'_x a_{11} + p'_y a_{12} + p'_z a_{13} \\ p_y &= p'_x a_{21} + p'_y a_{22} + p'_z a_{23} \\ p_z &= p'_x a_{31} + p'_y a_{32} + p'_z a_{33}\end{aligned} \qquad (**)$$

Vergleich (*) mit (**):

(*) . . . **Basistransformation**
(**) . . . **Koordinatentransformation** (**KT**)
In (*) stehen die gestrichenen Größen links, in (**) rechts.
In (*) wird über den Index i bei a_{ik} summiert, in (**) über k.

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} \qquad (**)$$

kurz: $\vec{p} = A \cdot \vec{p}\,'$

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{OE'_x} \\ \overrightarrow{OE'_y} \\ \overrightarrow{OE'_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overrightarrow{OE_x} \\ \overrightarrow{OE_y} \\ \overrightarrow{OE_z} \end{pmatrix} \quad (*)$$

In (*) steht A^T, wo in (**) A steht.

(*) und (**) heißen **zueinander kontragredient**.

Bem.: Bei orthogonaler Matrix A ist $A^T = A^{-1}$.

3.1.3 Wechsel von affinen KSen bei nicht notwendig gleichem Ursprung

Seien nun
ein affines xyz-KS und
ein affines $x'y'z'$-KS gegeben
mit Ursprung O bzw. O'.

Dann ist $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$,

also

$$\vec{p} = \vec{b} + A\vec{p}\,',$$

wobei $\vec{b}$ der Koordinatenvektor von O' im xyz-KS ist.
Hier ist $\vec{p}\,'$ der Koordinatenvektor von P im $x'y'z'$-KS,
$\vec{p}$ der Koordinatenvektor von P im xyz-KS und
A bestimmt durch (*).

Aus der Linearen Algebra weiß man:

$$\det A \neq 0$$

bei bijektiven linearen Abbildungen, also auch bei Koordinatentransformationen und bei Basistransformationen.

3.2 Homogene Koordinaten

Kann man Fernpunkten Koordinaten zuordnen?

$(u \cdot \infty, v \cdot \infty) = (\infty, \infty)$ (im allgemeinen)

Das ist nicht sinnvoll!

3.2.1 Einführung homogener Koordinaten

der Kürze halber in der Ebene

Im dreidimensionalen Raum geht alles analog.

$P(x, y)$ (x, y affine Koordinaten) erhält die **homogenen Koordinaten** $P(1, x, y)$, und $P(\rho \cdot 1, \rho \cdot x, \rho \cdot y)$ mit $\rho \neq 0$ (und sonst beliebig) ist derselbe Punkt.
(Daher heißen diese Koordinaten homogene Koordinaten.)

Einschub: Koordinaten mit dieser Eigenschaft kennen wir schon: Einer Geraden in der Ebene mit der Gleichung

$$a \cdot x + b \cdot y + d = 0$$

kann man die **Geradenkoordinaten** (a, b, d) zuordnen.
Die Geradenkoordinaten $(\rho \cdot a, \rho \cdot b, \rho \cdot d)$ mit $\rho \neq 0$ stellen dann dieselbe Gerade dar.
(Multiplikation einer Gleichung mit $\rho \neq 0$ ändert die Lösungsmenge nicht.)

Der Punkt $P(x_0, x_1, x_2)$ mit $x_0 \neq 0$ hat die affinen Koordinaten

$$P(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}) = P(x, y).$$

Punkte $P(0, x_1, x_2)$ mit $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ haben keine Entsprechung in der affinen Ebene.

Sind das die früher eingeführten Fernpunkte?

Wir ordnen dem Fernpunkt jeder Geraden

$$g : \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{r} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

mit der Darstellung in homogenen Koordinaten

$$g : \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_x + t \cdot r_x \\ a_y + t \cdot r_y \end{pmatrix}$$

oder

$$g : \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ \frac{a_x}{t} + r_x \\ \frac{a_y}{t} + r_y \end{pmatrix}$$

den **homogenen Koordinatenvektor**

$$\lim_{t \to \infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ \frac{a_x}{t} + r_x \\ \frac{a_y}{t} + r_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r_x \\ r_y \end{pmatrix}$$

zu.

Damit ist (pA) erfüllt.

Eine **geometrische Deutung:**

Tafelskizze

3.2.2 Ein neues Modell für eine projektiv abgeschlossene euklidische Ebene P^2

in P^2	im Modell
Punkt	Gerade durch $O(0,0,0)$
Fernpunkt	Gerade durch O in der Ebene $x_0 = 0$
eigentlicher Punkt	sonstige Gerade durch O
Gerade	Ebene durch O
Ferngerade	Ebene $x_0 = 0$
eigentliche Gerade	Ebene durch O verschieden von $x_0 = 0$
Kreis	Menge der Erzeugenden eines (im allgemeinen schiefen) Kreiskegels (Kreis in Ebene $x_0 = 1$)
Ellipse	Menge der Erzeugenden eines (im allgemeinen schiefen) Kreiskegels
Hyperbel	selbe Beschreibung
Parabel	selbe Beschreibung

Ebene $x_0 = 0 \cap$ Kegel $\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\right\}$ Erzeugende

$$\ldots \left\{\begin{array}{c} \text{Ellipse} \\ \text{Parabel} \\ \text{Hyperbel} \end{array}\right\}$$

3.2.3 Projektivitäten (nachgeholte Definition zu 2.2.9)

Eine Projektivität π des P^n ($n = 1, 2, 3$ oder $n \in \mathbb{N}$) ist eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \pi : P^n & \to & P^n \\ \pi : X(x_0, x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & X'(x'_0, x'_1, \ldots, x'_n) \end{array},$$

die gegeben ist durch

$$\vec{x}\,' = A\vec{x} \qquad \text{mit} \quad \det A \neq 0 \text{ und}$$

$$\vec{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)^T, \vec{x}\,' = (x'_0, x'_1, \ldots, x'_n)^T$$

Ausführlicher in P^3:

$x'_0 = a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3$
$x'_1 = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$
$x'_2 = a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$
$x'_3 = a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$
$\vec{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)^T, \vec{x}\,' = (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3)^T$

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ausführlicher in P^2:
$x_0' = a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2$
$x_1' = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2$
$x_2' = a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2$
$\vec{x} = (x_0, x_1, x_2)^T, \vec{x}\,' = (x_0', x_1', x_2')^T$

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

3.2.4 Affinitäten (siehe 2.2.9)

Die Menge der Fernpunkt in bleibt in 3.2.3 fest $\iff$
$(x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0' = 0) \iff$
$a_{01} = a_{02} = \ldots = a_{0n} = 0.$

Wegen $\det A \neq 0$ ist dann $a_{00} \neq 0$.

Da $\vec{x}$, $\vec{x}\,'$ homogene Koordinatenvektoren sind, kann man A ersetzen durch

$$\frac{1}{a_{00}} A.$$

Für $n = 3$:

$$\frac{1}{a_{00}} A = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline b_{10} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{30} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array} \right)$$

Für $n = 2$:

$$\frac{1}{a_{00}} A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_{10} & b_{11} & b_{12} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} \end{array} \right)$$

Schreibt man

$$\rho \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{p} \end{pmatrix}, \rho \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{p}\,' \end{pmatrix},$$

so erhält man

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \vec{p}\,' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{o}^T \\ \vec{b} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

oder

$$\vec{p}\,' = B\vec{p} + \vec{b}$$

mit (für $n = 3$)

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_{1,0} \\ \vdots \\ b_{n0} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \ \det(B) \neq 0.$$

3.3 Kartesisches KS

3.3.1 Einführung eines kartesischen KS

Ein affines xyz-KS im dreidimensionalen euklidischen Raum heißt ein **kartesisches KS**
nach **Renatus Cartesius**
= **René Descartes** (1596 - 1650)
(Cogito, ergo sum.)
(Ich denke, also bin ich.)
wenn gilt:
Die x-, die y- und die z-Achse sind paarweise zueinander orthogonal und
die drei Streckenlängen $d(O, E_x)$, $d(O, E_y)$ und $d(O, E_z)$ sind gleich lang.
Sind die drei Vektoren $\overrightarrow{OE_x}$, $\overrightarrow{OE_y}$ und $\overrightarrow{OE_z}$ (in dieser Reihenfolge) angeordnet wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand, so heißt das KS ein **Rechts-KS**,
andernfalls ein **Links-KS**.

Ein affines xy-KS im zweidimensionalen euklidischen Raum
(in der euklidischen Ebene)

heißt ein **kartesisches KS**, wenn gilt:
Die x- und die y- Achse sind zueinander orthogonal und
die zwei Streckenlängen $d(O, E_x)$, $d(O, E_y)$ sind gleich lang.
Geht der Vektor $\overrightarrow{OE_y}$ aus $\overrightarrow{OE_x}$ durch eine Drehung auf kürzestem Wege im mathematisch positiven Sinne hervor, so heißt das KS ein **Rechts-KS**,
andernfalls ein **Links-KS**.

3.3.2 Orientierung des Raumes

Rechts- sind vor Linkssystemen geometrisch nicht ausgezeichnet, denn:
Man kann Rechts- in Linkssysteme überführen, z.B. durch eine Punktspiegelung (im Raum!)
oder durch eine Spiegelung an einer Ebene.
Dadurch werden auch Links- in Rechtssysteme übergeführt.

Man wählt in der euklidischen Geometrie (im Prinzip) willkürlich,

z.B. wie angegeben
ein System als Rechtssystem aus.
Alle Systeme, die daraus hervorgehen durch eine Affinität mit positiver Determinante, sind dann ebenfalls Rechtssysteme.

Ein Mathematiker kann einem Mathematiker von einem anderen Stern den Unterschied von Rechts- und Linkssystemen erklären, aber er kann ihm nicht erklären, was ein Rechtssystem ist, ohne ihm eines zu zeigen.

Physiker können das seit 1956 (**Lee** und **Yang**) theoretisch und seit 1957 experimentell (**Wu**):
Elektronen, welche aus einem β-Zerfall stammen,sind immer links-zirkular polarisiert.

3.3.3 Orientierung der Ebene

Schaut man auf eine Ebene mit einem xy-KS, das ein Rechtssystem ist, von der anderen Seite, so wird das Rechtssystem zu einem Linkssystem.

Eine Drehung des Raumes um eine Achse erfolgt mit positivem Drehwinkel, wenn sie eine Rechtsdrehung ist.

Eine Drehung der Ebene um einen Punkt erfolgt mit positivem Drehwinkel, wenn sie eine Linksdrehung ist.

Warum?

Liegt ein Blatt Papier mit einem kartesischen xy-Rechts-KS auf einem Zeichentisch, so zeigt die zugehörige z-Achse nach oben.
Die Blickrichtung des Betrachters ist der z-Achse entgegengerichtet.
Was der Betrachter als Linksdrehung sieht, ist eine Rechtsdrehung um die orientierte z-Achse.

3.3.4 Bewegungen

Eine Affinität α eines euklidischen Raumes heißt eine **Bewegung**, wenn sie Abstände erhält, wenn also für alle Punkte X, Y gilt:

$$d(\alpha(X), \alpha(Y)) = d(X, Y).$$

In einem euklidischen Raum liege ein kartesisches KS zugrunde.

Eine Affinität α mit $\alpha : X \mapsto X'$ mit

$$\vec{x}\,' = A\vec{x} + \vec{b}$$

ist eine Bewegung, wenn A orthogonal ist, wenn also gilt:

$$A^T A = E \qquad (E \text{ die Einheitsmatrix}).$$

Eine solche Bewegung heißt **orientierungserhaltend** oder **gleichsinnig**, wenn gilt:

$$\det(A) = 1.$$

Erinnerung: Es gilt: A orthogonal $\Longrightarrow$ $\det(A) = \pm 1$.
Die Umkehrung gilt nicht!