Geometrie für Lehramt an beruflichen Schulen

MA9925

Vorlesung von

Prof. Dr. Johann Hartl
Fakultät für Mathematik
Technische Universität München

Wintersemester 2016/17

Diese Folien bilden kein Skriptum zur Vorlesung.
Sie sollen das Mitschreiben entlasten.

1 Von der naiven Elementargeometrie zu den Grundlagen der Geometrie

1.1 Wie entstand die Geometrie?

1.1.1 Wortbedeutung

$\gamma\varepsilon\omega\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho\eta\sigma$ = Erdmaß, Landmessung

1.1.2 Notwendigkeit der Geometrie

Die Geometrie entstand aus praktischen Bedürfnissen.

Assuanstaudamm im südlichen Ägypten: Erbaut 1960 - 1971

Vorher seit Jahrtausenden: Jährliche Überschwemmungen des Niltals

Folgen:

Der Nilschlamm macht die Felder fruchtbar.

Die Felder müssen jährlich neu abgesteckt werden.

Nötig dafür: Jährliche Landvermessung.

Nötig dafür: Kenntnisse aus der Elementargeometrie,
Erfahrungswissen

Wie steckt man auf dem Feld einen rechten Winkel ab?

Geschlossene Schnur mit 30 gleichabständigen Knoten, also 30 gleichlangen Abschnitten auf der Schnur.

Drei Landvermesser nehmen je einen Knoten in die Hand: Abstand 5 Abschnitte, 12 Abschnitte, 13 Abschnitte.

Beim Spannen der Schnur ergibt sich ein rechtwinkliges Dreieck.

(Lehrsatz des Pythagoras:

$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$)

Die ägyptischen Landvermesser hießen daher auch Harpedonapten = Seilspanner.

1.1.3 Anfänge der Geometrie als Wissenschaft

Thales von Milet (ca. 624 - ca 546 v. Chr.),

Kaufmann, Philosoph und Mathematiker,

begründete Aussagen, indem er sie auf einfachere Aussagen zurückführte.

Philosoph: Alles kommt aus dem Urstoff Wasser.

Einfache Messung der Höhe einer Pyramide:

Warten, bis der Schatten eines senkrecht stehenden Stabes so lang ist, wie der Stab.

Dann Schatten der Spitze der Pyramide markieren.

Länge des Schattens der Pyramide messen.

Sie ist gleich der Höhe der Pyramide.

(Tafelskizze: Ähnliche Dreiecke!)

1.2 Beispiele aus der naiven Elementargeometrie

1.2.1 Entfernung eines Schiffes

Tafelskizze: Turm, Meer, Schiff, Winkel α zwischen Turm und Sehstrahl

Turmhöhe bekannt, Winkel α messen, liefert die Entfernung des Schiffes

(z.B. durch Zeichnung in einem Maßstab oder

Ablesen an einem Zeiger)

1.2.2 Satz des Thales

Tafelskizze: Halbkreis k mit Kreismittelpunkt M und Kreisradius r über Kreisdurchmesser $\overline{AB}$, Dreiecksecke $C \neq A, B$ auf k, $\angle CAB = \alpha, \angle CBA = \beta, \angle ACM = \gamma_1, \angle BCM = \gamma_2$

Von jedem Punkt eines Kreises aus wird jeder Durchmesser des Kreises unter einem rechten Winkel gesehen (außer von den Endpunkten des Durchmessers).

Alternative Formulierung:

Sei M der Mittelpunkt einer Strecke $\overline{AB}$ mit $A \neq B$. Sei $C \neq A, B$ ein Punkt auf dem Kreis um M durch A (und B). Dann ist der Winkel $\angle ACB$ ein Rechter.

Bew.:
ΔAMC ist gleichschenklig $\Rightarrow \alpha = \gamma_1$
ΔBMC ist gleichschenklig $\Rightarrow \beta = \gamma_2$
Folglich ist $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \alpha + \beta$ die Hälfte der Winkelsumme im ΔABC, also ein Rechter.

Durch den Beweis ist der Satz des Thales zurückgeführt auf die beiden einfacheren Sätze:

In jedem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich.

Die Winkelsumme im Dreieck beträgt zwei Rechte.

Sind diese beiden Sätze wirklich "einfacher"?

1.2.3 Satz vom gleichschenkligen Dreieck

Jedes Dreieck ist gleichschenklig.

Bew.:

Tafelskizze: "Allgemeines Dreieck" ABC,
M Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$,
m Mittellot von $\overline{AB}$,
w nach Augenmaß Winkelhalbierende des Winkels $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ mit $\gamma_1 = \gamma_2$ bei C,
Schnittpunkt S von m und w,
Lotfußpunkt D auf $\overline{AC}$ aus S,
Lotfußpunkt E auf $\overline{BC}$ aus S

(1) Wären m und w parallel, dann wäre w die Höhe aus C auf $\overline{AB}$, also $\alpha + \gamma_1 = \beta + \gamma_2 = 90°$ und ΔABC gleichschenklig. Fertig.

Ab jetzt ist $m \cap w =: S$ eindeutig bestimmt.

(2) $d(A, M) = d(B, M)$, $d(M, S) = d(M, S)$, $\angle AMS = \angle BMS \Rightarrow$
$d(A, S) = d(B, S)$ $\qquad (*)$.

(3) $\gamma_1 = \gamma_2$, $d(C, S) = d(C, S), \angle CDS = \angle CES \Rightarrow$
ΔCDS kongruent $\Delta CES \Rightarrow$
$d(C, D) = d(C, E)$ $\qquad (**)$
$d(D, S) = d(E, S)$ $\qquad (***)$

(4) (*), (***) und $\angle ADS = \angle BES \Rightarrow$
ΔADS kongruent ΔBES
(Der rechte Winkel Bei D bzw. bei E ist der größte Winkel im Dreieck, also der Gegenwinkel der größeren Seite.)
$\Rightarrow d(D, A) = d(E, B)$ (+)

(5) (**), (+) $\Rightarrow d(C, A) = d(C, B) \Rightarrow$
ΔABC gleichschenklig

Folgerung 1: Weil der Beweis auch mit dem Mittellot von $\overline{AC}$ und der Winkelhalbierenden von $\angle ABC$ geführt werden kann, gilt sogar: Jedes Dreieck ist gleichseitig.

Folgerung 2: Weil der Satz falsch ist, muss im Beweis ein Fehler sein.

Bemerkung: Man muss aufpassen wie ein Haftelmacher, damit man nicht "etwas Falsches beweist".

1.3 Axiomatisches Vorgehen nach Euklid

1.3.1 Die "Elemente"

Um 300 v. Chr.: Euklid lebt in Alexandria und lehrt am Museion,
der größten Bibliothek des Altertums.

Man weiß fast nichts über sein Leben.

Anekdoten über Euklid:

Der Pharao Ptolemaios soll einmal Euklid gefragt haben, ob es nicht einen einfacheren Weg zur Erlernung der Geometrie gebe, als das Studium seiner Elemente. Dieser antwortete jedoch: "Oh Pharao, in der normalen Welt existieren immer zwei Wege, einem auf dem das Volk reist und einen der dem König zum Reisen vorbehalten ist. Zur Erlernung der Mathematik gibt es aber keinen Königsweg." Diese Anekdote ist uns von Proklos (412 - 485 n. Chr) überliefert.

Ein Schüler Euklids, fragte ihn nach dem Lernen des ersten Satzes: "Aber wozu soll das alles gut sein und was kann ich damit verdienen?" Euklid rief nach seinem Sklaven und sagte ihm: "Gib ihm 3 Obolus, denn er muss mit dem was er lernt, etwas verdienen." Diese Geschichte stammt aus einer Übersetzung von Stobaeus für seinen Sohn Septimius.

Quelle: http://www.satz-des.de/euklid-leben-und-zitate/

Euklid fasst das geometrische (und allgemeiner mathematische) Wissen seiner Zeit zusammen in 13 Büchern, genannt "Elemente".

Die Elemente bleiben 2000 Jahre lang **das** für die Wissenschaften vorbildliche Werk!

Man versuchte, auch andere Wissenschaften "more geometrico" zu begründen, aber ohne großen Erfolg.

1.3.2 Absicht Euklids

Aussagen, die so einleuchtend sind, dass sie keines Beweises bedürfen (Axiome und Postulate) und Definitionen werden aufgeschrieben.

Es werden Folgerungen gezogen
auf rein logischem Weg
ohne Rückgriff auf die Anschauung.

1.3.3 Kritik aus heutiger Sicht

Es gibt Lücken in der Darstellung, z.B.:

Euklid hat die Anordnung nicht axiomatisiert:

Reihenfolge von Punkten auf einer Geraden,

Zerlegung einer Ebene durch eine Gerade in Halbebenen u.ä.

1.3.4 Das Axiom von Pasch

Vollständig wurde das Axiomensystem der euklidischen Geometrie in den "Vorlesungen über neuere Geometrie" (1882) von Moritz Pasch (1843 - 1930).

Nach ihm benannt wurde von Hilbert das Axiom von Pasch :

A, B, C drei Punkte, nicht auf einer Geraden, a eine Gerade in der Ebene ABC mit $A, B, C \notin a$. Geht dann a durch einen Punkt der Strecke $\overline{AB}$, so auch durch einen Punkt der Strecke $\overline{BC}$ oder durch einen Punkt der Strecke $\overline{AC}$.

Skizze dazu!

1.3.5 Bemerkungen zu Euklids Definitionen und Axiomen

Def. 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 u.a. scheinen Appelle an die Anschauung zu sein.

Def. 10: Winkelgleichheit ist hier nicht definiert.

Def. 11, 12: Vergleich von Winkeln ist nicht definiert.

Def. 15: Gleichheit von Strecken ist nicht definiert.

Def. 17 enthält eine (beweisbare?) Aussage.

Def. 18 ist zumindest zweideutig.

z.B. Def. 20: Heute bezeichnet man gleichseitige Dreiecke auch als gleichschenklig.

Def. 22: Sprachgebrauch heute anders.

Postulat 5: Das berühmte Parallelenaxiom.

(Man unterscheidet heute nicht mehr zwischen Axiomen und Postulaten.)

Tafelskizze!

Im Parallelenaxiom wird die Anordnung implizit benützt.

1.4 Was ist eine Gerade?

Antwort nach Plato (427 - 347 v.Chr.)

Höhlengleichnis

Punkte, Geraden usw. existieren in der Welt der Ideen.

Die Welt der Ideen ist die eigentlich wirkliche Welt.

Was wir sehen, ist nur ein schwacher Schatten dieser Ideen.

(Punkt - Klecks,

Gerade - unregelmäßiger Streifen mit ausgezackten Rändern)

Gegenstandpunkt: Begriffe entstehen durch Abstraktion aus Erfahrungen.

Andere Formulierung: Werden mathematische Theorien entdeckt oder erfunden?

Plato meint: Mathematische Theorien werden entdeckt.

Moderne Mathematiker sind keine Platoniker,

aber bei ihrer Arbeit verhalten sie sich wie Platoniker.

1.5 Das Parallelenaxiom und die nicht-euklidische (hyperbolische) Geometrie

1.5.1 Die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms

Postulat 5 (Axiom 11) klingt kompliziert für ein Axiom.

Viele Versuche, das Parallelenaxiom als Satz zu beweisen,

meist durch einen indirekten Beweis

(durch einen Beweis mit Widerspruch).

Alle vergeblich.

Heute formuliert man das Parallelenaxiom einfacher:

Zu einer gegebenen Geraden g gibt es durch einen gegebenen Punkt außerhalb von g genau eine Parallele h (eine Gerade h, die mit g in einer Ebene liegt, so dass $g \cap h = \emptyset$).

Letzte veröffentlichte ernstgemeinte Beweisversuche Ende des 18. Jahrhunderts.

Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855),

Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1792 - 1856),

János Bolyai (1802 - 1860)

ersetzten das Parallelenaxiom durch ein anderes:

Zu einer gegebenen Geraden gibt es durch einen Punkt außerhalb mindestens zwei verschiedene Parallelen.

Sie sind überzeugt:
Das führt nicht auf Widersprüche.

Man erhält dadurch eine neue Geometrie, die keine Widersprüche enthält und von der euklidischen Geometrie verschieden ist, eine nichteuklidische Geometrie.

Welche Geometrie im realen Raum gilt, entscheidet die Physik, nicht die Mathematik.

Gauß war auch Leiter der Landesvermessung des Königreichs Hannover.

Er ließ die Winkel des Dreiecks Brocken - Inselsberg - Hoher Hagen besonders genau messen.

Die Abweichung der Winkelsumme von 180° lag innerhalb der Messgenauigkeit.

Die euklidische Geometrie, die erwähnte nichteuklidische (hyperbolische) Geometrie und weitere nichteuklidische Geometrien sind weit entwickelt.

1.5.2 Axiomatisches Vorgehen

Man wählt wenige einfache Sätze aus einer mathematischen Theorie aus,
stellt sie als Axiome an den Anfang
und leitet daraus auf rein logischem Weg die Aussagen der Theorie her.

Axiomensysteme müssen sein: **widerspruchsfrei**.

Sie sollen sein: **unabhängig**.
(Kein Axiom soll aus den anderen folgen.)

Ein Axiomensystem heißt vollständig, wenn jede Aussage der Theorie daraus beweisbar oder widerlegbar ist.
(Vorsicht: ein schwieriger Begriff!)

1.5.3 Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems

Man kann sie z.B. zeigen durch Angabe eines Modells.

Ein Modell für die euklidische Geometrie: $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$.

Die euklidische Geometrie ist widerspruchsfrei,
wenn die Theorie der reellen Zahlen widerspruchfrei ist.
(relativer Widerspruchsfreiheitsbeweis)

Seit ca. 1870 weiß man: Es gibt Modelle der hyperbolischen Geometrie im Rahmen der euklidischen Geometrie.

Die hyperbolische Geometrie ist widerspruchsfrei, wenn die euklidische Geometrie widerspruchsfrei ist.

Modell von Felix Klein (1849 - 1925, Prof. an der TU München von 1875 bis 1880): Skizze

Modelle von Henri Poincaré (1854 - 1912): Skizze

1.5.4 Unabhängigkeit eines Axioms A von Axiomen B_1, B_2, . . . , B_k

Dass ein Axiom A unabhängig ist von Axiomen B_1, B_2, ..., B_k, kann man zeigen, indem man
ein Modell angibt, in dem B_1, B_2, ..., B_k gelen, nicht aber A.

(Bekanntes Beispiel: Kommutativität ist unabhängig von den anderen Gruppenaxiomen: Es gibt nichtkommutative Gruppen.)

1.6 Moderne Grundlegung der Geometrie

1.6.1 axiomatisches Vorgehen nach Hilbert (David Hilbert (1862 - 1943))

"Grundlagen der Geometrie", erstmals 1899, mehrere Auflagen, z.B. auch Stuttgart 1972

Hilbert definiert Punkte, Geraden und Ebenen nicht.

Die Axiome beschreiben die Beziehungen zwischen ihnen vollständig.

Man kann dabei auch an andere Objekte denken.
Wenn diese die Axiome erfüllen, gelten für sie alle Aussagen der Theorie.

1.6.2 Axiome nach Karzel/Sörensen/Windelberg

"Einführung in die Geometrie" 1973

Stufenweiser Aufbau der euklidischen Geometrie mit Abschweifungen

Beispiele für Inzidenzräume:

$P = \emptyset, \mathfrak{G} = \emptyset$

$P = \{x, y\}, \mathfrak{G} = \{G\}, G = \{x, y\}$

Wichtigste Beispiele: Zeichenebene oder $\mathbb{R}^2$,
Anschauungsraum oder $\mathbb{R}^3$