7.6.5 Gaußsche Krümmung K und mittlere Krümmung H

Im folgenden sei stets $\Phi: \ \vec{x}(u,v), \ (u,v) \in G$, eine reguläre C^2-Fläche.

Dann ist an jeder Stelle $(u,v) \in G$ für jede Flächenrichtung

$$\vec{t} = a_1\vec{x}_u + a_2\vec{x}_v$$

nach 7.6.3

$$\kappa_n(a_1,a_2) = \frac{II(a_1,a_2)}{I(a_1,a_2)} =$$

$$\frac{h_{11}a_1^2 + 2h_{12}a_1a_2 + h_{22}a_2^2}{g_{11}a_1^2 + 2g_{12}a_1a_2 + g_{22}a_2^2}$$

die Normal(schnitt)krümmung von Φ an der Stelle (u,v) in Richtung (a_1,a_2) oder in Richtung $\vec{t}$.

Aus 7.6.4 wissen wir:

Entweder es gilt: $\kappa_n(a_1,a_2)$ hängt nicht ab von (a_1,a_2)

oder es gilt: $\kappa_n(a_1,a_2)$ besitzt genau ein Maximum und genau ein Minimum.

In einem Flächenpunkt, der weder Nabel- noch Flachpunkt ist gilt:

Die Flächenrichtungen (a_1, a_2), in denen die Hauptkrümmungen angenommen werden, heißen die **Hauptkrümmungsrichtungen** von Φ an der Stelle (u, v).

In einem Nabel- oder Flachpunkt kann man zwei beliebige orthogonale Flächenrichtungen als Hauptkrümmungsrichtungen wählen.

Man wird das so tun, dass die Hauptkrümmungsrichtungen auf der Fläche stetig sind.

Definition:

$$K := \kappa_1 \cdot \kappa_2$$

heißt **Gaußsche Krümmung** von Φ an der Stelle (u, v).

$$H := \frac{1}{2} \cdot (\kappa_1 + \kappa_2)$$

heißt **mittlere Krümmung** von Φ an der Stelle (u, v).

Definition: Ein Flächenpunkt heißt
elliptisch für $K > 0$,
hyperbolisch für $K < 0$ und
parabolisch für $K = 0$.

Wie sieht die Fläche lokal um einen elliptischen, um einen hyperbolischen und um einen parabolischen Punkt aus?

Erzählung: Gegeben sei eine glatte, geschlossene und doppelpunktfreie Raumkurve c.
Findet man eine Fläche Φ, die c als Rand besitzt und unter allen Flächen, die c als Rand besitzen, minimale Oberfläche hat, so besitzt Φ die mittlere Krümmung $H = 0$.

Die Umkehrung gilt nicht!

Definition: Eine reguläre C^2-Fläche mit $H = 0$ heißt eine **Minimalfläche**.

Theorema egregium: (von Gauß, 1828)
Die Gaußsche Krümmung K hängt nur ab von den Koeffizienten der ersten Grundform und ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach den Flächenparametern.

Bemerkung: Ist Φ eine C^3-Fläche, so kann man K berechnen ohne die zweite Grundform zu kennen.

Bemerkung: Ist Φ eine C^3-Fläche, so ist K biegungsinvariant.

Bemerkung: Ist Φ eine C^3-Fläche, so ist K invariant gegenüber längentreuen Flächenabbildungen.

Bemerkung: Verbiegt man eine Fläche, so ändern sich im allgemeinen in jedem Punkt

- die Krümmungsrichtungen und
- die Hauptkrümmungen.

Erhalten bleibt das Produkt der Hauptkrümmungen.

Satz: Es gibt keine längentreue Abbildung der Kugel auf die Ebene.

Beweis: Die Normalschnittkrümmung einer Kugel Σ mit Radius $R \neq 0$ ist in jedem Kugelpunkt in jeder Flächenrichtung

$$\kappa_n^{\Sigma} = \frac{1}{R}.$$

Die Normalschnittkrümmung einer Ebene ε ist in jedem Ebenenpunkt in jeder Flächenrichtung

$$\kappa_n^{\varepsilon} = 0.$$

Die Gaußsche Krümmung einer Kugel Σ mit Radius $R \neq 0$ ist in jedem Kugelpunkt

$$K^{\Sigma} = \frac{1}{R^2} \neq 0.$$

Die Gaußsche Krümmung einer Ebene ε ist in jedem Ebenenpunkt

$$K^{\varepsilon} = 0.$$

Wäre $\alpha : \Sigma \to \Phi$ eine längentreue Abbildung in kanonischer Darstellung,
also eine längentreue Abbildung durch gleiche Flächenparameter,

so wären die Koeffizienten der ersten Grundform nach 7.4.4 auf beiden Flächen identisch,
also auch ihre ersten und zweiten Ableitungen nach den Flächenparametern,
also nach dem Theorema egregium auch die Gaußschen Krümmungen von Σ und Φ, im Widerspruch zu

$$K^{\Sigma} = \frac{1}{R^2} \neq 0 = K^{\varepsilon}.$$

7.6.6 Mindingsche Verbiegungen

Satz: (Minding, 1839)
Seien P und $\overline{P}$ Punkte von zwei Flächen Φ und $\overline{\Phi}$ derselben konstanten Gaußschen Krümmung K.
Seien t und $\bar{t}$ Tangenten von Φ bzw. von $\overline{\Phi}$ in P bzw. in $\overline{P}$.
Dann gibt es eine längentreue Abbildung einer Umgebung U von P auf Φ auf eine Umgebung $\overline{U}$ von $\overline{P}$ auf $\overline{\Phi}$, so dass P auf $\overline{P}$ und die durch t bestimmte Flächenrichtung auf Φ auf die durch $\bar{t}$ bestimmte Flächenrichtung auf $\overline{\Phi}$ abgebildet wird.

Bemerkung: Durch eine konstante Gaußsche Krümmung wird die innere Geometrie einer Fläche lokal eindeutig festgelegt,
das heißt die geometrischen Eigenschaften, die durch Messungen in der Fläche bestimmt werden können, also durch Angabe der g_{jk}.

Bemerkung: Unter starken Differenzierbarkeitsvoraussetzungen kann man U durch Verbiegung überführen in $\overline{U}$ oder (für $K > 0$) zumindest in ein Spiegelbild von $\overline{U}$.

Für $\Phi = \overline{\Phi}$ folgt daraus:

Folgerung: Ist Φ eine Fläche konstanter Gaußscher Krümmung, so lässt Φ lokal eine Bewegung in sich zu wie die Ebene: Eine Verschiebung gefolgt von einer Drehung.