7.5 Geodätische

7.5.1 Def.: (**mangelhaft!**)

Φ regul. C^1-Fläche, c regul. C^1-Flächenkurve von Φ. Dann heißt c **geodätische Linie** von Φ, kurz: **Geodätische** von Φ, wenn gilt: Für je zwei Punkte $\vec{x}$, $\vec{y}$ von c, die nicht zu weit auseinander liegen, liegt die kürzeste Verbindung von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ auf c.

Mangel: Was heißt "nicht zu weit auseinander"? Korrekte Definition mit Differentialgleichungen.

7.5.2 Beispiele

Tafelskizze: Sphäre Φ mit Großkreis c, der durch zwei nicht diametrale Punkte $\vec{x}$ und $\vec{y}$ in zwei Bögen c_1 und c_2 zerlegt wird, c_1 kürzer als c_2.

c_1 und c_2 sind Geodätische, die $\vec{x}$ und $\vec{y}$ verbinden. Davon ist c_1 die kürzeste Verbindung von x und y auf Φ.

Tafelskizze: Drehzylinder Φ mit darauf liegender Schraublinie c, auf der $\vec{x}$ und $\vec{y}$ liegen, die zugleich auf einer gemeinsamen Erzeugenden von Φ liegen.

Die Schraublinie c ist nicht kürzeste Verbindung von $\vec{x}$ und $\vec{y}$.

Gegenpunkte auf der Sphäre werden durch unendlich viele Kürzeste verbunden, andere Punkte auf der Sphäre durch genau eine.

7.5.3 Satz: Sei Φ eine reguläre C^3-Fläche in $\mathbb{E}^3$. Dann gilt:

a) Jedes geradlinige Kurvenstück in Φ ist eine Geodätische von Φ.

b) Zu je zwei Punkten von Φ, die nicht zu weit voneinander entfernt sind, gibt es (in einer nicht zu großen Umgebung) genau eine verbindende Geodätische.

c) Zu jedem Punkt $\vec{x}$ auf Φ und zu jeder Tangente t von Φ in $\vec{x}$ gibt es genau eine Geodätische von Φ durch $\vec{x}$ mit der Tangente t.

d) c reguläre C^2-Flächenkurve von Φ ohne W-Punkte. Dann gilt: c Geodätische von Φ $\Leftrightarrow$ In allen Punkten von c ist die Schmiegebene von c senkrecht zu Φ.

Bew.: zu **a)** klar

zu **b)** nach Präzisierung: mit Variationsrechnung

zu **c)** mit Differentialgleichungen

zu **d)** kein Bew., aber Plausibilitätsüberlegung: Spannt man einen Faden zwischen zwei Punkten einer Fläche, so rutscht er in jedem Punkt längs Φ und in Richtung der Schmiegebene des Fadens, bis das nicht mehr geht.