7.4 Flächenabbildung

Tafelskizze: Flächen Φ und Φ^*, zugehörige Parametergebiete G und G^*, Flächenabbildung $\alpha: \ \Phi \to \Phi^*$, Parameterdarstellungen $\vec{x}$ und $\vec{x}^*$, Punkt P von Φ mit Bildpunkt $P^* = \alpha P$ von Φ^*

7.4.1 Beschreibung von Flächenabbildungen

Eine bijektive C^r-**Abbildung** α einer einfachen C^r-Fläche Φ: $\vec{x}(u,v)$, $(u,v) \in G$, auf eine einfache C^r-Fläche Φ^* : $\vec{x}^*(u^*,v^*)$, $(u^*,v^*) \in G^*$, wird beschrieben durch eine C^r-Abbildung $G \to G^*$, nämlich $(\vec{x}^*)^{-1} \circ \alpha \circ \vec{x}$: $G \to G^*, \ (u,v) \mapsto (u^*(u,v), v^*(u,v))$.

Das erinnert an eine PT, ist aber zunächst keine.

7.4.2 Kanonische Beschreibung von Flächenabbildungen

PT auf Φ^* : $G \to G^*$, $(u,v) \mapsto (u^*(u,v), v^*(u,v))$.

Jetzt sind Φ und Φ^* auf gleiche Parameter (u,v) bezogen, und zu $P^* = \alpha P$ gehören dieselben Parameterwerte wie zu P.

Die Flächen Φ und Φ^* sind **in kanonischer Weise** aufeinander abgebildet.

7.4.3 Def.: Eine bijektive C^r-Abbildung zweier einfacher C^1-Flächen Φ, Φ^* aufeinander heißt

a) **längentreu** (isometrisch) :$\Leftrightarrow$ Entsprechende Kurven auf Φ und Φ^* haben stets gleiche Länge.

b) **winkeltreu** (**konform**) :$\Leftrightarrow$ Entsprechende Kurvenpaare auf Φ und auf Φ^* haben stets gleiche Schnittwinkel.

c) **flächentreu** :$\Leftrightarrow$ Entsprechende Flächenstücke auf Φ und Φ^* haben stets gleiche Flächeninhalte.

7.4.4 Satz: Zwei reguläre C^1-Flächen $\Phi : \vec{x}(u,v),\ (u,v) \in G$, und $\Phi^* : \vec{x}^*(u,v),\ (u,v) \in G$, seien durch eine Flächenabbildung α in kanonischer Weise aufeinander abgebildet. Dann gilt: α ist

a) längentreu (isometrisch) $\Leftrightarrow\ g^*_{jk} = g_{jk}\ \forall\ (u,v) \in G$.

b) winkeltreu (**konform**) $\Leftrightarrow\ g^*_{12} : g^*_{11} : g^*_{22} = g_{12} : g_{11} : g_{22}\ \forall\ (u,v) \in G$.

c) flächentreu $\Leftrightarrow\ g^* = g\ \forall\ (u,v) \in G$.

Bew.: zu **a)**: Für jede u-Linie $\vec{x}(u,v_0)$ und jede Anfangsstelle (u_0,v_0) gilt:

$$\int_{u_0}^{u_1} |\vec{x}_u(u,v_0)|\ du = \int_{u_0}^{u_1} |\vec{x}^*_u(u,v_0)|\ du$$

$$\Rightarrow\ |\vec{x}_u(u_1,v_0)|^2 = |\vec{x}^*_u(u_1,v_0)|^2$$

$$\Rightarrow g_{11}(u_1,v_0) = g^*_{11}(u_1,v_0)\ \forall\ (u_1,v_0) \in G.$$

g_{22} analog mit v-Linien.

Außerdem für $\vec{x}(u_0 + t, v_0 + t)$:

$$\int_0^t \sqrt{(\vec{x}_u \cdot 1 + \vec{x}_v \cdot 1)^2}\; d\tau =$$

$$= \int_0^t \sqrt{g_{11} + 2g_{12} + g_{22}}\, d\tau = \int_0^t \sqrt{g_{11}^* + 2g_{12}^* + g_{22}^*}\, d\tau$$

$$\Rightarrow \sqrt{g_{11} + 2g_{12} + g_{22}} = \sqrt{g_{11}^* + 2g_{12}^* + g_{22}^*}$$

$$\Rightarrow g_{11} + 2g_{12} + g_{22} = g_{11}^* + 2g_{12}^* + g_{22}^*$$

$$\Rightarrow g_{12} = g_{12}^*$$

Ausführlicher:

$$\Rightarrow g_{12}(u_0 + t, v_0 + t) = g_{12}^*(u_0 + t, v_0 + t)$$

$\forall\ (u_0, v_0) \in G$ und für alle erlaubten t, z.B. auch $t = 0$.

zu **b)**: Ähnlich, sogar ohne Integral.

zu **c)**: Plausibel, aber Beweis Aufgabe der Analysis, nicht der Geometrie.

7.4.5 Korollar: Für eine bijektive C^1-Flächenabbildung $\alpha :\ \Phi \to \Phi^*$, wobei Φ, Φ^* einfache Flächen sind, gilt: α längentreu $\Leftrightarrow$ α winkeltreu und flächentreu

Bew.: Das folgt unmittelbar aus 7.4.4.