7.3 Parametertransformation (PT)

7.3.1 PT: Def.:

Sei $\Phi : \quad \vec{x}(u,v), \quad (u,v) \in G$, eine C^r-Fläche, $r \geq 1$. Sei H ein Gebiet in $\mathbb{R}^2$ und $f : \quad H \to G$, $f : (\bar{u},\bar{v}) \mapsto (u,v)$, eine bijektive C^r-Abbildung. Dann ist $\Phi : \ \vec{x}(u(\bar{u},\bar{v}), v(\bar{u},\bar{v})), \ (\bar{u},\bar{v}) \in H$, eine (im allgemeinen andere) PD von Φ, und f heißt eine **PT** von Φ.

Ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} u_{\bar{u}} & u_{\bar{v}} \\ v_{\bar{u}} & v_{\bar{v}} \end{pmatrix}$$

regulär, also

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})} := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{pmatrix} \neq 0,$$

so heißt die PT **zulässig**.

7.3.2 Transformation des Tangentialraums

$$\vec{x}_{\bar{u}} = \vec{x}_u u_{\bar{u}} + \vec{x}_v v_{\bar{u}}$$

$$\vec{x}_{\bar{v}} = \vec{x}_u u_{\bar{v}} + \vec{x}_v v_{\bar{v}}$$

Sei

$$\vec{a} = a_1 \vec{x}_u + a_2 \vec{x}_v = \bar{a}_1 \vec{x}_{\bar{u}} + \bar{a}_2 \vec{x}_{\bar{v}}$$

Dann ist

$$\vec{a} = \bar{a}_1(\vec{x}_u u_{\bar{u}} + \vec{x}_v v_{\bar{u}}) + \bar{a}_2(\vec{x}_u u_{\bar{v}} + \vec{x}_v v_{\bar{v}}).$$

Koeffizientenvergleich bei den linear unabhängigen Vektoren $\vec{x}_u$ und $\vec{x}_v$ liefert:

$$a_1 = \bar{a}_1 u_{\bar{u}} + \bar{a}_2 u_{\bar{v}},$$

$$a_2 = \bar{a}_1 v_{\bar{u}} + \bar{a}_2 v_{\bar{v}}.$$

Das sind Transformationsformeln für Flächenkoordinaten bei einer PT.

Da (u, v) und $(\bar{u}, \bar{v})$ nicht voreinander ausgezeichnet sind, kann man in beiden Formelgruppen auch die gequerten und die nicht gequerten Größen vertauschen.

7.3.3 Transformation des Normalenvektors

$$\vec{x}_{\bar{u}} \times \vec{x}_{\bar{v}} = (\vec{x}_u u_{\bar{u}} + \vec{x}_v v_{\bar{u}}) \times (\vec{x}_u u_{\bar{v}} + \vec{x}_v v_{\bar{v}}) =$$

$$= \vec{x}_u \times \vec{x}_v \cdot (u_{\bar{u}} v_{\bar{v}} - v_{\bar{u}} u_{\bar{v}}) =$$

$$= \vec{x}_u \times \vec{x}_v \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}$$

Satz: Sei Φ : $\vec{x}(u,v)$, $(u,v) \in G$, eine reguläre C^r-Fläche in $\mathbb{E}^3$, $r \geq 1$,
$f: \ H \to G$,
$f: \ (\bar{u},\bar{v}) \mapsto (u,v) = (u(\bar{u},\bar{v}), v(\bar{u},\bar{v}))$
eine zulässige C^r-PT. Dann ist
$\vec{x}(u(\bar{u},\bar{v}), v(\bar{u},\bar{v}))$ eine zul. C^r-PD von Φ.

7.3.4 Transformation der 1. Grundform

$$g_{\bar{1}\bar{1}} = \vec{x}_{\bar{u}}\vec{x}_{\bar{u}} = (\vec{x}_u u_{\bar{u}} + \vec{x}_v v_{\bar{u}})(\vec{x}_u u_{\bar{u}} + \vec{x}_v v_{\bar{u}}) =$$

$$g_{11}u_{\bar{u}}^2 + g_{12}(u_{\bar{u}}v_{\bar{u}} + v_{\bar{u}}u_{\bar{u}}) + g_{22}v_{\bar{u}}^2 =$$

$$g_{11}u_{\bar{u}}^2 + 2g_{12}u_{\bar{u}}v_{\bar{u}} + g_{22}v_{\bar{u}}^2.$$

$$g_{\bar{1}\bar{2}} = \vec{x}_{\bar{u}}\vec{x}_{\bar{v}} = (\vec{x}_u u_{\bar{u}} + \vec{x}_v v_{\bar{u}})(\vec{x}_u u_{\bar{v}} + \vec{x}_v v_{\bar{v}}) =$$

$$g_{11}u_{\bar{u}}u_{\bar{v}} + g_{12}(u_{\bar{u}}v_{\bar{v}} + v_{\bar{u}}u_{\bar{v}}) + g_{22}v_{\bar{u}}v_{\bar{v}}.$$

$$g_{\bar{2}\bar{2}} = \vec{x}_{\bar{v}}\vec{x}_{\bar{v}} = (\vec{x}_u u_{\bar{v}} + \vec{x}_v v_{\bar{v}})(\vec{x}_u u_{\bar{v}} + \vec{x}_v v_{\bar{v}}) =$$

$$g_{11}u_{\bar{v}}^2 + g_{12}(u_{\bar{v}}v_{\bar{v}} + v_{\bar{v}}u_{\bar{v}}) + g_{22}v_{\bar{v}}^2 =$$

$$g_{11}u_{\bar{v}}^2 + 2g_{12}u_{\bar{v}}v_{\bar{v}} + g_{22}v_{\bar{v}}^2.$$

$$\bar{g} := \det\begin{pmatrix} g_{\bar{1}\bar{1}} & g_{\bar{1}\bar{2}} \\ g_{\bar{2}\bar{1}} & g_{\bar{2}\bar{2}} \end{pmatrix} = g \cdot (\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})})^2$$

Für die letzte Gleichung verwendet man die Transformation des Normalenvektors aus 7.3.3 und $|\vec{x}_u \times \vec{x}_v| = \sqrt{g}$.