

7.2 Messen auf Flächen

Kann man Informationen zu einer Fläche so angeben, dass es möglich ist, aus Flächenparametern und Flächenkoordinaten von Flächenvektoren — ohne Rückgriff auf den umgebenden Raum — zu berechnen:

- Längen von Flächenkurven?
- Winkel schneidender Flächenkurven?
- Oberflächen von Flächenstücken?

7.2.1 Die erste Grundform der Flächentheorie

Sei $\Phi : \vec{x}(u, v), (u, v) \in G$, eine reguläre C^1 -Fläche. Dann heißen

$$g_{11}(u, v) := \vec{x}_u(u, v) \cdot \vec{x}_u(u, v) =: E(u, v),$$

$$g_{12} := \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v =: g_{21} =: F, \quad g_{22} := \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v =: G$$

die **Fundamentalgrößen 1. Art** oder die **metrischen Fundamentalgrößen** oder die **Koeffizienten der 1. Grundform** von Φ .

Die Bezeichnungen E , F , G stammen noch von Gauß aus den "Disquisitiones generales circa superficies curvas" (1828).

Determinante der 1. Grundform:

$$\det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 =: g$$

Normalenvektor von Φ :

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v$$

Länge des Normalenvektors:

$$\begin{aligned} (\vec{x}_u \times \vec{x}_v)^2 &= \vec{x}_u^2 \vec{x}_v^2 - (\vec{x}_u \vec{x}_v)^2 = \\ &= g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = g \end{aligned}$$

Normaleneinheitsvektor von Φ :

$$\vec{n} := \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\sqrt{g}}$$

7.2.2 Länge einer Flächenkurve

$c : \vec{x}(u(t), v(t)), t \in I$ reguläre C^1 -
Flächenkurve einer regulären C^1 -Fläche
 $\Phi : \vec{x}(u, v), (u, v) \in G$.

Dann ist die Länge eines Kurvenstücks von
 c :

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{x}}(u(t), v(t))| dt$$

mit

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(u(t), v(t))^2 &= (\vec{x}_u \dot{u} + \vec{x}_v \dot{v})^2 = \\ &= \vec{x}_u^2 \dot{u}^2 + \vec{x}_u \vec{x}_v \dot{u} \dot{v} + \vec{x}_v \vec{x}_u \dot{v} \dot{u} + \vec{x}_v^2 \dot{v}^2 = \\ &= g_{11} \dot{u}^2 + 2g_{12} \dot{u} \dot{v} + g_{22} \dot{v}^2. \end{aligned}$$

Satz: Ist eine reguläre C^1 -Flächen-
kurve c einer regulären C^1 -Fläche
 $\Phi : \vec{x}(u, v), (u, v) \in G$, gegeben
durch $(u(t), v(t)), t \in [t_1, t_2]$, so gilt für
die Länge s von c :

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{11} \dot{u}^2 + 2g_{12} \dot{u} \dot{v} + g_{22} \dot{v}^2} dt.$$

Die quadratische Form

$$I(a_1, a_2) := g_{11}a_1^2 + 2g_{12}a_1a_2 + g_{22}a_2^2$$

heißt die **1. Grundform** oder **1. Fundamentalform** von Φ (an der Stelle (u, v)).

7.2.3 Skalarprodukt und 1. Grundform

Sind $\vec{a} = a_1\vec{x}_u + a_2\vec{x}_v$ und $\vec{b} = b_1\vec{x}_u + b_2\vec{x}_v$ aus dem TVR einer Fläche Φ an einer Stelle (u_0, v_0) , so ist

$$\begin{aligned}\vec{a} \vec{b} &= g_{11}a_1b_1 + g_{12}a_1b_2 + g_{21}a_2b_1 + g_{22}a_2b_2 = \\ &= g_{11}a_1b_1 + g_{12}(a_1b_2 + a_2b_1) + g_{22}a_2b_2\end{aligned}$$

das Skalarprodukt von \vec{a} und \vec{b} , die symmetrische Bilinearform, die zu der quadratischen Form $I(\dots)$ gehört.

7.2.4 Winkel zweier Flächenvektoren

Sind $\vec{o} \neq \vec{a} = a_1\vec{x}_u + a_2\vec{x}_v$ und $\vec{o} \neq \vec{b} = b_1\vec{x}_u + b_2\vec{x}_v$ zwei Flächenvektoren einer Fläche Φ an einer Stelle (u_0, v_0) , so ist

$$\begin{aligned} \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) &= \\ &= \frac{g_{11}a_1b_1 + g_{12}(a_1b_2 + a_2b_1) + g_{22}a_2b_2}{\sqrt{I(a_1, a_2)}\sqrt{I(b_1, b_2)}}. \end{aligned}$$

7.2.5 Winkel zwischen Flächenkurven

Seien c_1, c_2 zwei C^1 -Flächenkurven auf einer C^1 -Fläche $\Phi : \vec{x}(u, v), (u, v) \in G$, gegeben durch:

$$c_1 : (u_1(t), v_1(t)), t \in I,$$

$$c_2 : (u_2(w), v_2(w)), w \in J,$$

mit

$$(u_1(t_0), v_1(t_0)) = (u_2(w_0), v_2(w_0)) =: (u_0, v_0),$$

wobei

$$\left\{ \begin{array}{c} t_0 \\ w_0 \\ (u_0, v_0) \end{array} \right\} \text{ reguläre Stelle von } \left\{ \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ \Phi \end{array} \right\}.$$

Dann ist der Winkel φ von c_1 und c_2 an der Stelle (u_0, v_0) gegeben durch

$$\cos \varphi = \frac{g_{11}\dot{u}_1\hat{u}_2 + g_{12}(\dot{u}_1\hat{v}_2 + \hat{u}_2\dot{v}_1) + g_{22}\dot{v}_1\hat{v}_2}{\sqrt{I(\dot{u}_1, \dot{v}_1)}\sqrt{I(\hat{u}_2, \hat{v}_2)}}.$$

Dabei bezeichnet " $\dot{}$ " die Ableitung nach t und " $\hat{}$ " die nach w .

7.2.6 Winkel mit Parameterlinien

Sei c_1 eine u -Linie einer regulären C^1 -Fläche Φ , c_2 eine beliebige Flächenkurve von Φ . Dann ist

$$\dot{u}_1 = 1, \dot{u}_2 = 0$$

und

$$\cos \varphi = \frac{g_{11}\dot{u}_2 + g_{12}\dot{v}_2}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{I(\dot{u}_2, \dot{v}_2)}}.$$

... Ableitung nach w !

Sei zusätzlich c_2 eine v -Linie, also

$$\dot{u}_2 = 0, \dot{v}_2 = 1.$$

Dann ist

$$\cos \varphi = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}.$$

Die Parameterlinien bilden ein orthogonales Netz auf $\Phi \Leftrightarrow g_{12} = 0 \forall (u, v) \in G$.

7.2.7 Oberfläche eines Flächenstücks: Motivation:

Tafelskizze: Fläche Φ mit einer Masche des Parameternetzes mit Parameterwerten (u_i, v_k) , (u_{i+1}, v_k) , (u_i, v_{k+1}) , (u_{i+1}, v_{k+1}) .

Fläche einer Masche des Gitters näherungsweise:

$$\begin{aligned} & |(\vec{x}(u_{i+1}, v_k) - \vec{x}(u_i, v_k)) \times (\vec{x}(u_i, v_{k+1}) - \vec{x}(u_i, v_k))| \\ & \approx |\vec{x}_u(u_i, v_k)(u_{i+1} - u_i) \times \vec{x}_v(u_i, v_k)(v_{k+1} - v_k)| \end{aligned}$$

Die Oberfläche von Φ wird angenähert durch

$$\begin{aligned} & \sum_i \sum_k |\vec{x}_u(u_i, v_k) \times \vec{x}_v(u_i, v_k)| \Delta u_i \Delta v_k = \\ & = \sum_i \sum_k \sqrt{g(u_i, v_k)} \Delta u_i \Delta v_k \end{aligned}$$

7.2.8 Oberfläche eines Flächenstücks:

Def.:

Sei $\Phi : \vec{x}(u, v), (u, v) \in G$, eine reguläre C^1 -Fläche. Sei $D \subset G$ ein abgeschlossenes Gebiet und Ψ das zugehörige Flächenstück von Φ . Dann heißt

$$O := \int \int_D \sqrt{g} \, du \, dv$$

die Oberfläche von Ψ .

7.2.9 Bsp.: Oberfläche einer Drehfläche

Sei

$$m : \vec{m}(v) := \begin{pmatrix} r(v) \\ 0 \\ z(v) \end{pmatrix}, \quad v \in I,$$

eine C^1 -Kurve und

$$\begin{aligned} \Phi : \vec{x}(u, v) &:= \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{m}(v) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos u \cdot r(v) \\ \sin u \cdot r(v) \\ z(v) \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in G := [0, 2\pi] \times I \end{aligned}$$

eine **Drehfläche** mit dem **Meridian** m und der z -Achse als **Drehachse**.

$$\vec{x}_u = \begin{pmatrix} -\sin u \cdot r(v) \\ \cos u \cdot r(v) \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_v = \begin{pmatrix} \cos u \cdot \dot{r}(v) \\ \sin u \cdot \dot{r}(v) \\ \dot{z}(v) \end{pmatrix}.$$

$$g_{11} = \vec{x}_u^2 = r^2, \quad g_{12} = \vec{x}_u \vec{x}_v = 0, \quad g_{22} = \vec{x}_v^2 = \dot{r}^2 + \dot{z}^2.$$

Bem.: Die Meridiane und die **Breitenkreise** bilden auf jeder regulären C^1 -Drehfläche ein orthogonales Netz.

$$\begin{aligned} O &= \int_0^{2\pi} \int_I r \sqrt{\dot{r}^2 + \dot{z}^2} \, dv \, du = \\ &= 2\pi \int_I r \sqrt{\dot{r}^2 + \dot{z}^2} \, dv. \end{aligned}$$

Bem.: In dieser Formel wird O für Drehflächen zu einem Einfach-Integral.