7 Flächen

7.1 Flächenbegriff

7.1.1 Beispiel: Kugel

Kugel im Raum:

$x^2+y^2+z^2=r^2$ . . . **implizite Darstellung**

Tafelskizze zur Parameterdarstellung: Viertelkugel mit $x, y, z \geq 0$

$x = r \cos u \cos v$
$y = r \cos u \sin v$
$z = r \sin u$

Bei "Erdkugel":
u . . . "geographische Breite"
v . . . "geographische Länge"

7.1.2 Def.: Fläche

Eine (C^r-)**Fläche** Φ in $\mathbb{E}^3$ ist gegeben durch
eine C^r-Abb. $\vec{x}$ eines Gebiets $G \subset \mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^3$ $(r \geq 1)$:

$$\vec{x} : G \to \mathbb{R}^3,$$

$$\vec{x} : (u,v) \mapsto \vec{x}(u,v).$$

$\vec{x}$ ... **Parameterdarstellung**, kurz: **PD**
G ... **Parametergebiet**

Tafelskizze dazu

Schreibweisen u.a.: $\Phi : \vec{x}(u,v),\ (u,v) \in G$,

$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(u,v) \\ x_2(u,v) \\ x_3(u,v) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1(u_1,u_2) \\ x_2(u_1,u_2) \\ x_3(u_1,u_2) \end{pmatrix}$$

7.1.3 Def.: Flächenkurve

Tafelskizze dazu

Seien $\Phi : \vec{x}(u,v),\ (u,v) \in G$ eine C^r-Fläche in $\mathbb{E}^3$ und
$\bar{c} : \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix},\ t \in I$, eine c^r-Kurve in G.
Dann heißt $c : \vec{x}(u(t),v(t)),\ t \in I$, eine C^r-Flächenkurve von Φ.

7.1.4 Parameterlinien

Tafelskizze von G

Flächenkurven der Gestalt
$\vec{x}(u,v_0),\ u \in I$ heißen u-**Linien** oder **1-Linien**,
$\vec{x}(u_0,v),\ v \in J$ heißen v-**Linien** oder **2-Linien**.

Zu jeder Parameterstelle (u_0,v_0) gibt es genau eine
u-Linie $\vec{x}(u,v_0),\ u \in I$ und genau eine
v-Linie $\vec{x}(u_0,v),\ v \in J$.

7.1.5 Tangentenvektoren

Tafelskizze

Ist $\Phi : \vec{x}(u,v),\ (u,v) \in G$ eine C^1-Fläche und $c : \vec{x}(u(t),v(t)),\ t \in I$, eine C^1-Flächenkurve von Φ, so sind:
$\vec{x}_1 := \vec{x}_u := \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}$ ein Tangentenvektor an eine u-Linie,
$\vec{x}_2 := \vec{x}_v := \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}$ ein Tangentenvektor an eine v-Linie,
und nach der Kettenregel
$\dot{\vec{x}} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} = \vec{x}_u \dot{u} + \vec{x}_v \dot{v}$ ein Tangentenvektor an c.

7.1.6 Regularität

Tafelskizze mit Gegenbeispiel

Ist $\Phi : \vec{x}(u,v),\ (u,v) \in G$, eine C^1-Fläche, so heißt $(u_0,v_0) \in G$ eine **reguläre Parameterstelle** von Φ, wenn gilt: $\{\vec{x}_u(u_0,v_0), \vec{x}_v(u_0,v_0)\}$ l.u.

Andernfalls heißt (u_0,v_0) **singulär**.

Tafelskizze mit Beispiel

Satz: Sei $\Phi : \vec{x}(u,v),\ (u,v) \in G$, eine C^1-Fläche. Dann ist $(u_0,v_0) \in G$ eine reguläre Parameterstelle von Φ

$$\Leftrightarrow \vec{x}_u \times \vec{x}_v|_{(u_0,v_0)} \neq \vec{o}.$$

Sind alle $(u,v) \in G$ regulär, so heißt Φ eine **reguläre Fläche**.

Ist (u_0,v_0) eine reguläre Parameterstelle von Φ und gilt: $\vec{x}(u,v) = \vec{x}(u_0,v_0) \Rightarrow (u,v) = (u_0,v_0)$, so heißt $\vec{x}(u_0,v_0)$ auch ein **regulärer Punkt** von Φ.

Tafelskizze

Ist Φ eine reguläre Fläche, so sagt man: Die Parameterlinien von Φ bilden ein **Gitter** oder ein **Netz** auf Φ.

Eine PD $\vec{x}(u,v)$, $(u,v) \in G$, einer Fläche Φ heißt C^r-**zulässig** oder eine **zulässige** C^r-**PD** von Φ, wenn gilt:

(1) $\vec{x}$ ist C^r-PD von Φ mit $r \geq 1$.

(2) Jedes $(u,v) \in G$ ist eine reguläre Parameterstelle von Φ.

7.1.7 Einfachheit

Sei $\Phi : \vec{x}(u,v)$, $(u,v) \in G$, eine reguläre C^1-Fläche. Ein Punkt $\vec{x}(u_0,v_0)$ heißt **einfacher Punkt** von Φ, wenn gilt: $\vec{x}(u,v) = \vec{x}(u_0,v_0) \Rightarrow (u,v) = (u_0,v_0)$.

Die Fläche Φ heißt **einfache Fläche**, wenn alle Punkte von Φ einfach sind.

7.1.8 Tangential-VR, Tangentialebene

Sei Φ : $\vec{x}(u,v)$, $(u,v) \in G$, eine C^1-Fläche; sei $(u_0,v_0) \in G$ eine reguläre Stelle von Φ. Dann heißt der VR mit der Basis $\{x_u(u_0,v_0), x_v(u_0,v_0)\}$ der **Tangential-VR** (kurz: **TVR**) von Φ an der Stelle (u_0,v_0). Die Ebene durch $\vec{x}(u_0,v_0)$, die parallel ist zu $x_u(u_0,v_0)$ und $x_v(u_0,v_0)$, heißt die **Tangentialebene** (kurz: **TE**) oder **Tangentenebene** von Φ an der Stelle (u_0,v_0).

7.1.9 Flächenvektoren, Flächentangenten

Sei Φ : $\vec{x}(u,v)$, $(u,v) \in G$, eine C^1-Fläche; sei $(u_0,v_0) \in G$ eine reguläre Stelle von Φ.

a) Ist $\bar{c}$: $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$, $t \in I$, eine C^1-Kurve mit der regulären Stelle t_0 und $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0,v_0)$, und ist c : $\vec{x}(u(t),v(t))$, $t \in I$, die zugehörige Flächenkurve, so liegt der Tangentenvektor $\dot{\vec{x}} = \vec{x}_u\dot{u} + \vec{x}_v\dot{v}$ von c an der Stelle t_0 im TVR von Φ an der Stelle (u_0,v_0).

b) Zu jedem Vektor

$$a\vec{x}_u(u_0, v_0) + b\vec{x}_v(u_0, v_0)$$

im TVR von Φ an der Stelle (u_0, v_0) gibt es eine Flächenkurve c von Φ durch $\vec{x}(u_0, v_0)$, so dass gilt: Der Tangentialvektor von c an der Stelle $t = 0$ mit $(u(0), v(0)) = (u_0, v_0)$ ist der vorgegebene Vektor $a\vec{x}_u(u_0, v_0) + b\vec{x}_v(u_0, v_0)$.

Bew. von b): Wir setzen

$$\bar{c} : \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 + ta \\ v_0 + tb \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\dot{\vec{x}}(u(t), v(t)) = \vec{x}_u \dot{u} + \vec{x}_v \dot{v} = \vec{x}_u a + \vec{x}_v b$$

längs c, und speziell für $t = 0$: $\dot{\vec{x}}(u(0), v(0)) = \vec{x}_u(u_0, v_0)a + \vec{x}_v(u_0, v_0)b$.

Bezeichnung: a, b heißen die **Flächenkoordinaten** des **Flächenvektors** $a\vec{x}_u + b\vec{x}_v$.