6 Kurventheorie

6.1 Kurven

6.1.1 Beispiele

Kreis in der Ebene:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Das ist eine implizite Gleichung: **implizite Darstellung**.

Mittelpunkt (0,0)

Radius $r > 0$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Das ist eine **Parameterdarstellung**, kurz: eine **PD**.

Parameter $t \in \mathbb{R}$ oder $t \in [0, 2\pi[$ oder $t \in]-\pi, \pi]$, je nachdem.

Skizze: xy-Koordinatensystem, Kreis um Ursprung (0,0) mit Radius r, Punkt auf Kreislinie mit den Koordinaten $r \cdot \cos t$ und $r \cdot \sin t$, Winkel t

Kreis mit Mittelpunkt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$?

PD:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

implizit:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Beachte die Minuszeichen!

6.1.2 Zum Kurvenbegriff

Eine (C^r-)**Kurve** c ($r \geq 0$) im Sinn der Differentialgeometrie ist im $\mathbb{R}^n$
(z.B. $n = 2$ oder $n = 3$)
gegeben durch eine C^r-Abbildung
$\vec{x} : I \to \mathbb{R}^n$, $\vec{x} : t \mapsto \vec{x}(t)$ eines Intervalls
$I \subset \mathbb{R}$ in den R^n.

t ... ein **Parameter** von c
$\vec{x}$ ... eine **Parameterdarstellung** von c
I ... **Parameterintervall**

t ... tempus, temps, time

Schreibweise: $c: \ \vec{x}(t), \ t \in I$

6.1.3 Bsp.: Gerade

$\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}, \ t \in \mathbb{R}$
Dabei: $\vec{v} \neq \vec{o}$

6.1.4 Bsp.: Strecke

$\vec{x} = \vec{a} + t \cdot (\vec{b} - \vec{a}), \ t \in [0, 1]$
Dabei: $\vec{b} \neq \vec{a}$

6.1.5 Bsp.: Ein Halbkreis

Skizze: xy-Koordinatensystem, obere Hälfte eines Kreises um den Ursprung mit Radius r

a) $x = t$
$y = \sqrt{r^2 - t^2}, \quad -r \leq t \leq r$

b) $x = r \cos u$
$y = r \sin u, \quad 0 \leq u \leq \pi$

6.1.6 Geschlossene Kurven

Eine Kurve $c : \vec{x}(t), t \in [a, b]$, mit $\vec{x}(a) = \vec{x}(b)$ heißt eine **geschlossene Kurve**.

6.1.7 Reguläre Kurven

Sei $c : \ \vec{x}(t),\ t \in I$, eine C^1-Kurve. Ein $t_0 \in I$ mit $\dot{\vec{x}}(t) \neq \vec{o}$ heißt eine **reguläre Stelle** von c.

Skizze: Warum nicht regulärer Punkt?

Sind alle $t \in I$ reguläre Stellen von c, so heißt c **regulär**, die PD heißt **zulässig**.

6.1.8 Einfache Kurven

Ist $c : \ \vec{x}(t),\ t \in I$, regulär, $v \in I$, und $\vec{x}(u) \neq \vec{x}(v)$ für alle $u \neq v$, so heißt $\vec{x}(v)$ ein **einfacher (Kurven-)Punkt** von c. Sind alle Punkte von c einfach, so heißt c eine **einfache Kurve**.

Vorsicht: "einfach" in der Literatur nicht einheitlich!

Ist $\vec{x}(u) = \vec{x}(v)$ mit $u \neq v$, so hei"st $\vec{x}(u)$ ein **Doppelpunkt** von c.

6.1.9 Lokale Einfachheit regulärer Kurven

Sei $c: \ \vec{x}(t), t \in I$, eine C^1-Kurve und $t_0 \in I$ eine reguläre Selle von c. Dann gibt es ein offenes Intervall $J \subset I$ mit $t_0 \in J$, so dass gilt: $c: \ \vec{x}(t), t \in J$, ist einfach.

Bew.: t_0 regulär $\Rightarrow \ \dot{\vec{x}}(t_0) \neq \vec{o} \Rightarrow$ Für ein k gilt: $\dot{x}_k(t_0) \neq 0 \ =$ (Stetigkeit von $\dot{x}_k$) $\Rightarrow$ Es gibt ein Intervall $J \subset I$ mit $t_0 \in J: \ \dot{x}_k(t) \neq 0 \ \forall \ t \in J$. Damit ist c regulär auf J.

Wegen der Stetigkeit von $\dot{x}_k$ gilt:
Entweder $\dot{x}_k(t) > 0 \ \forall \ t \in J$
oder $\dot{x}_k(t) < 0 \ \forall \ t \in J \quad \Rightarrow$
x_k ist streng monoton $\left\{ \begin{array}{c} \text{steigend} \\ \text{fallend} \end{array} \right\}$ auf J
$\Rightarrow x_k(u) \neq x_k(v) \ \forall \ u, v \in J$ mit $u \neq v$
$\Rightarrow \vec{x}(u) \neq \vec{x}(v) \ \forall \ u, v \in J$ mit $u \neq v$

6.1.10 Wechsel der Parametrisierung

Sei $c : \vec{x}(t),\ t \in I$, eine C^r-Kurve ($r \geq 0$) und $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall sowie $f : J \to I$ eine bijektive C^r-Funktion. Dann ist $\vec{y}(u) := \vec{x}(f(u)),\ u \in J$, eine PD derselben C^r-Kurve c. (Das ist eine Vereinbarung!) Die Abb. f heißt eine C^r-**Parametertransformation** (**PT**).
Ist $r \geq 1$ und $\dot{f}(u) \neq 0\ \forall\ u \in J$, so heißt f C^r-**zulässig**.
Ist f zulässig, so ist entweder $\dot{f}(u) > 0\ \forall\ u \in J$, und f heißt **gleichsinnig**, oder es ist $\dot{f}(u) < 0\ \forall\ u \in J$, und f heißt **gegensinnig**.

In der Differentialgeometrie (**DG**) ist es sinnvoll und üblich, bei verschiedenen PD derselben Kurve die Parameter durch verschiedene Buchstaben zu bezeichnen.

6.1.11 Satz: Sei $c: \ \vec{x}(t),\ t \in I$, eine reguläre C^r-Kurve, $f: J \to I,\ f(u) = t$ eine C^r-zulässige PT. Dann ist $\vec{y}(u) := \vec{x}(f(u)),\ u \in J$, eine zulässige C^r-PD einer Kurve.

Bew.: Aus Analysis: $\vec{x} \circ f$ ist eine C^r-Funktion.
$\dot{\vec{y}}(u) = $ (Kettenregel) $= \dot{\vec{x}}(f(u)) \cdot \dot{f}(u)$.
$\dot{\vec{x}}(f(u)) \neq \vec{o}$ und $\dot{f}(u) \neq 0 \Rightarrow \ \dot{\vec{y}}(u) \neq \vec{o}$.
Insgesamt: $\vec{y}$ ist zulässig.

6.1.12 Vereinbarung: Zwei zulässige C^r-PDen beschreiben **dieselbe Kurve**, wenn eine aus der anderen hervorgeht durch eine C^r-zulässige PT.