Geometrie LB  Übungen  Blatt 13

Notiztitel  16.12.2014

**T30.** $\vec{x}(u,v)=\begin{pmatrix}u\cos v\\ u\sin v\\ u\end{pmatrix}$, $(u,v)\in\,]0,\infty[\,\times\,]-\pi,\pi[$  Drehkegel $\Phi$

Flächenkurve $u(t)=\frac{1}{\cos t}$, $v(t)=\sqrt{2}\,t$, $t\in\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\ \Rightarrow$

$\vec{y}(t)=\vec{x}(u(t),v(t))$ ist Geodätische von $\Phi \Leftrightarrow |\dot{\vec{y}}\ \ddot{\vec{y}}\ \vec{x}_u\times\vec{x}_v|=0\ \forall t$

$$\vec{x}_u=\begin{pmatrix}\cos v\\ \sin v\\ 1\end{pmatrix},\ \vec{x}_v=u\cdot\begin{pmatrix}-\sin v\\ \cos v\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow \vec{x}_u\times\vec{x}_v=u\cdot\begin{pmatrix}-\cos v\\ -\sin v\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\vec{y}(t)=\vec{x}(u(t),v(t))\ \underset{\text{Kettenregel}}{\Rightarrow}\ \dot{\vec{y}}(t)=\vec{x}_u\dot{u}+\vec{x}_v\dot{v}$$

Es ist hier zweckmäßig, nicht $\vec{y}(t)$ direkt abzuleiten!

$$\underset{\text{Kettenregel}}{\Rightarrow}\ \ddot{\vec{y}}(t)=(\vec{x}_{uu}\dot{u}+\vec{x}_{uv}\dot{v})\dot{u}+\vec{x}_u\ddot{u}+(\vec{x}_{vu}\dot{u}+\vec{x}_{vv}\dot{v})\dot{v}+\vec{x}_v\ddot{v}=$$
$$=\vec{x}_{uu}\dot{u}^2+2\cdot\vec{x}_{uv}\dot{u}\dot{v}+\vec{x}_u\ddot{u}+\vec{x}_{vv}\dot{v}^2+\vec{x}_v\ddot{v}$$

mit $\vec{x}_{uu}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{x}_{uv}=\vec{x}_{vu}=\begin{pmatrix}-\sin v\\ \cos v\\ 0\end{pmatrix}$, $\vec{x}_{vv}=u\cdot\begin{pmatrix}-\cos v\\ -\sin v\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\left|\underbrace{\dot{u}\begin{pmatrix}\cos v\\ \sin v\\ 1\end{pmatrix}+\dot{v}u\begin{pmatrix}-\sin v\\ \cos v\\ 0\end{pmatrix}}_{=\dot{\vec{y}}(t)};\ \underbrace{2\dot{u}\dot{v}\begin{pmatrix}-\sin v\\ \cos v\\ 0\end{pmatrix}+\ddot{u}\begin{pmatrix}\cos v\\ \sin v\\ 1\end{pmatrix}-\dot{v}^2u\begin{pmatrix}\cos v\\ \sin v\\ 0\end{pmatrix}+\ddot{v}u\begin{pmatrix}-\sin v\\ \cos v\\ 0\end{pmatrix}}_{=\ddot{\vec{y}}(t)};\ \underbrace{-u\begin{pmatrix}\cos v\\ \sin v\\ -1\end{pmatrix}}_{\vec{x}_u\times\vec{x}_v}\right|$$

mit $u=u(t)=\frac{1}{\cos t}$  und $v=v(t)=\sqrt{2}\,t$

Addition des $\dot{u}$-fachen bzw. des $\ddot{u}$-fachen der letzten Spalte

$$=-u\left|2\dot{u}\begin{pmatrix}\cos v\\ \sin v\\ 0\end{pmatrix}+\dot{v}u\begin{pmatrix}-\sin v\\ \cos v\\ 0\end{pmatrix};\ (2\ddot{u}-\dot{v}^2u)\begin{pmatrix}\cos v\\ \sin v\\ 0\end{pmatrix}+(2\dot{u}\dot{v}+\ddot{v}u)\begin{pmatrix}-\sin v\\ \cos v\\ 0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}\cos v\\ \sin v\\ -1\end{pmatrix}\right|$$

$$\underset{\substack{\text{Entwicklung}\\ \text{nach letzter}\\ \text{Zeile!}}}{+u}\left|\underset{\text{Matrixprodukt}}{\begin{pmatrix}\cos v & -\sin v\\ \sin v & \cos v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\dot{u} & 2\ddot{u}-\dot{v}^2u\\ \dot{v}u & 2\dot{u}\dot{v}+\ddot{v}u\end{pmatrix}}\right|\underset{\text{Det. Mult Satz}}{=}u\cdot\begin{vmatrix}\cos v & -\sin v\\ \sin v & \cos v\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}2\dot{u} & 2\ddot{u}-\dot{v}^2u\\ \dot{v}u & 2\dot{u}\dot{v}+\ddot{v}u\end{vmatrix}=$$

$$=u\cdot\underbrace{(\cos^2v+\sin^2v)}_{=1}[4\dot{u}^2\dot{v}+2u\dot{u}\ddot{v}-2u\dot{v}\ddot{u}+\dot{v}^3u^2]\overset{!}{=}0$$

DGL der Geodätischen des Kegels o.E. mit $v=c\cdot t=\sqrt{2}\,t$  $\overset{\dot{v}=\sqrt{2}}{\underset{\ddot{v}=0}{\Longleftrightarrow}}$  $\boxed{2\dot{u}^2-u(\ddot{u}-u)=0}$  DGL für $u(t)$

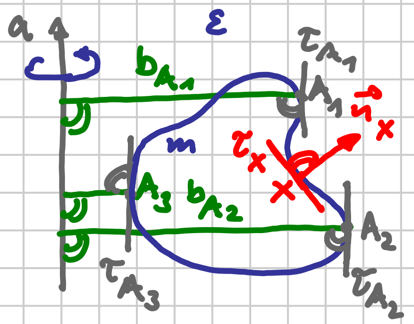
$$u(t)=\frac{1}{\cos t}\Rightarrow\dot{u}(t)=\frac{\sin t}{\cos^2t},\quad \ddot{u}(t)=\frac{\cos^3t+2\sin^2t\cos t}{\cos^4t}=\frac{1}{\cos t}+\frac{2\sin^2t}{\cos^3t}$$

$\Rightarrow 2\dot{u}^2 - u(\ddot{u} - u) = 2\cdot\frac{\sin^2 t}{\cos^4 t} - \frac{1}{\cos t}\left(\cancel{\frac{1}{\cos t}} + 2\frac{\sin^2 t}{\cos^3 t} - \cancel{\frac{1}{\cos t}}\right) = \underline{\underline{0}}$ ✓

Zusatz: Allgemeine Geodätische $v = v_0 = \text{const}$ (Meridiane) oder $u(t) = \frac{c}{\cos t}$, $v(t) = \sqrt{2}\,t + b$ mit $c > 0$, $b \in \,]-\pi, \pi]$.

**T31.** Kennzeichnend für eine Geodätische $c$ einer Fläche $\Phi$ ist, dass die Schmiegebene der Flächenkurve $c$ in jedem (regulären) Punkt $X \in c$ senkrecht zur Tangentialebene von $\Phi$ in $X$ steht, d.h. Für die Flächenkurve $\vec{y}(t) := \vec{x}(u(t), v(t))$ gilt: $\dot{\vec{y}}, \ddot{\vec{y}}$ und $\vec{x}_u \times \vec{x}_v$ sind für alle $X \in c$ linear abhängig.

Drehfläche $\Phi$ mit Meridian $m$ in Ebene $\varepsilon$ um Achse $a \subset \varepsilon$.




- In allen Punkten $X \in m$ ist $\varepsilon$ die Schmiegebene von $m$ und es gilt: $\varepsilon \perp \tau_X$, da $\vec{n}_X$ von $\Phi$ in $\varepsilon$ liegt.
- Genau die Breitenkreise $b_{A_i}$ durch die Punkte $A_1, A_2 \ldots$ von $m$, in denen die Tangenten von $m$ parallel zu $a$ liegen, sind Geodätische von $\Phi$, da die Schmiegebenen von $b_{A_i}$ die Kreisebenen von $b_{A_i}$ sind und diese in allen Punkten von $b_{A_i}$ senkrecht zur Tangentialebene an $\Phi$ stehen.