Geometrie LB Übungen Blatt 12

Notiztitel 16.12.2014

T28. $\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ v-u \end{pmatrix}, \ (u,v) \in \mathbb{R}^2$

a) u-Linie $(v=v_0=\text{const})$: $\vec{x}(u,v_0) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 \end{pmatrix}}_{\text{Aufpunkt}} + u \underbrace{\begin{pmatrix} \cos v_0 \\ \sin v_0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{Richtung}}$ Gerade durch $(0,0,v_0)$ auf der z-Achse

v-Linie $(u=u_0=\text{const})$: $\vec{x}(u_0,v) = \begin{pmatrix} u_0\cos v \\ u_0\sin v \\ v \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -u_0 \end{pmatrix}}_{\text{Verschiebung}}$ Schraublinie um z-Achse Schraubradius u_0 Ganghöhe $h=2\pi$.

$\Rightarrow \Phi$ ist Schraubfläche mit geradlinigen Erzeugenden.

b) $\vec{x}(u,v)$ regulär $\Leftrightarrow$ $\vec{x}_u(u,v)$ und $\vec{x}_v(u,v)$ sind linear unabhängig

$\Leftrightarrow \vec{x}_u \times \vec{x}_v \neq \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{x}_u \times \vec{x}_v)^2 \neq 0$.

$\vec{x}_u = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_v = \begin{pmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_u \times \vec{x}_v = \begin{pmatrix} \sin v + u\cos v \\ -\cos v + u\sin v \\ u \end{pmatrix}$

spannen Tgtebene auf Richtung der Normalen.

1. Weg: $\lambda \vec{x}_u + \mu \vec{x}_v = \vec{0} \xRightarrow{3.\text{Komp.}} \mu = \lambda \wedge \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ u\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \mu = 0$ ✓

1. und 2. Komp. $\det(\cdot\cdot) = 1 \neq 0$

2. Weg: $\vec{x}_u \times \vec{x}_v \neq \vec{0}$, da 3. Komp. $=0 \Leftrightarrow u=0$ aber $\sin v$ und $\cos v$ keine gemeinsamen Nullstellen haben! ✓

3. Weg: $(\vec{x}_u \times \vec{x}_v)^2 = \vec{x}_u^2 \cdot \vec{x}_v^2 - (\vec{x}_u \cdot \vec{x}_v)^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \det\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$

Lagrange Identität.

metrische Fundamentalgrößen

$\left.\begin{aligned} g_{11} &= \vec{x}_u^2 = 2 \\ g_{12} &= \vec{x}_u \vec{x}_v = -1 \\ g_{22} &= \vec{x}_v^2 = u^2+1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ $= 2(u^2+1) - 1 = 2u^2+1 \neq 0$ ✓

$\Rightarrow \vec{n}(u,v) = \dfrac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{|\vec{x}_u \times \vec{x}_v|} = \dfrac{1}{\sqrt{2u^2+1}} \begin{pmatrix} \sin v + u\cos v \\ -\cos v + u\sin v \\ u \end{pmatrix}$ Normaleneinheitsvektor.

c) $\begin{aligned} \vec{a} &= a^1 \vec{x}_u + a^2 \vec{x}_v \\ \vec{b} &= b^1 \vec{x}_u + b^2 \vec{x}_v \end{aligned} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = (a^1 a^2) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix} = (a^1 a^2) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & u^2+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}$

regelt Metrik in der Tangentenebene

d) $\vec{x}_u$ und $\vec{x}_v$ sind Tgtvektoren an Parameterlinien im Punkt $\vec{x}(u_0,v_0)$

$$\Rightarrow \cos\sphericalangle(\vec{x}_u,\vec{x}_v) = \frac{\vec{x}_u\cdot\vec{x}_v}{|\vec{x}_u|\cdot|\vec{x}_v|} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}} = \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{1+u_0^2}} \overset{!}{=} \frac{-1}{\sqrt{2}} = \cos 135^\circ$$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{u_0=0}} \Leftrightarrow \vec{x}(0,v) = \begin{pmatrix}0\\0\\v\end{pmatrix}$ schneidet alle u-Linien unter 135°

Schraubachse! geradlinige Erzeugende

e) Flächenkurve $\vec{y}(t) := \vec{x}(u(t),v(t)) \Rightarrow \dot{\vec{y}}(t) = \vec{x}_u\cdot\dot{u} + \vec{x}_v\cdot\dot{v}$

Kettenregel Tgte an Flächenkurve

Tgte an u-Linie ist $\vec{x}_u \Rightarrow \sphericalangle(\dot{\vec{y}}(t),\vec{x}_u) = 90^\circ$ im Punkt $(u(t),v(t))$

$\Leftrightarrow 0 = \dot{\vec{y}}(t)\cdot\vec{x}_u = (\vec{x}_u\cdot\dot{u}+\vec{x}_v\cdot\dot{v})\cdot\vec{x}_u = g_{11}\dot{u} + g_{12}\dot{v} = 2\dot{u}-\dot{v}$

$\Leftrightarrow u(t) = t+c_1$ und $v(t) = 2t+c_2$ mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \underline{\vec{y}(t) = \vec{x}(t+c_1, 2t+c_2)}$ (Orthogonaltrajektorie der geradlinigen Erzeugenden)

f) $\vec{x}(u,v)$ mit $(u,v)\in\mathcal{U} =]0,2[\times]0,\pi[$ ist einfach $\Leftrightarrow \vec{x}(u,v)$ injektiv

Quadratsumme der 1. und 2. Komp.

$$\vec{x}(u_1,v_1) = \vec{x}(u_2,v_2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}u_1\cos v_1\\u_1\sin v_1\\v_1-u_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_2\cos v_2\\u_2\sin v_2\\v_2-u_2\end{pmatrix} \Rightarrow u_1^2 = u_2^2 \overset{\mathcal{U}}{\Rightarrow} u_1 = u_2 \Rightarrow v_1 = v_2 \quad \text{qed.}$$

$$A(\Phi) = \iint_{\mathcal{U}} |\vec{x}_u\times\vec{x}_v|\,du\,dv = \iint_{\mathcal{U}} \sqrt{\det(g_{ij})}\,du\,dv = \int_{v=0}^{\pi}\left(\int_{u=0}^{2}\sqrt{1+2u^2}\,du\right)dv =$$

Rechtecksbereich!

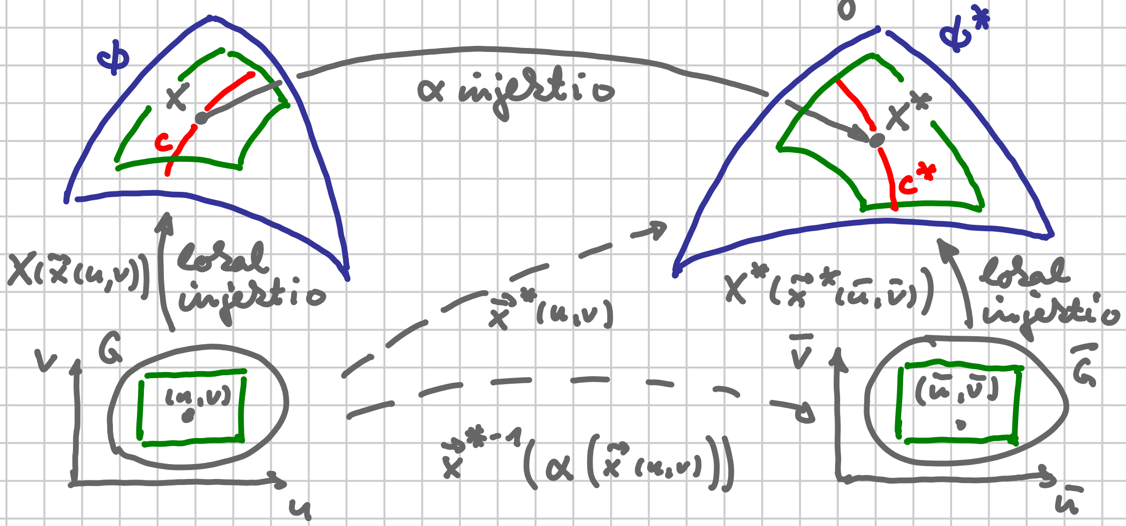
$$= \int_{u=0}^{2}\left(\int_{v=0}^{\pi}\sqrt{1+2u^2}\,dv\right)du = \int_0^2 \pi\cdot\sqrt{1+2u^2}\,du =$$

Fubini

$$= \pi\cdot\left(\tfrac{1}{2}u\sqrt{1+2u^2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,\operatorname{arsinh}(\sqrt{2}u)\right)\Big|_{u=0}^{2} = \underline{\pi\left(3+\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,\operatorname{arsinh}(2\sqrt{2})\right)}$$

<u>Anmerkung:</u> Φ hat für $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times\mathbb{R}$ längs $u=\frac{\pi}{2}$ eine Selbstdurchdringung (scharfe Kante) $\to$ <u>Korkenzieher</u>!

Zur lokalen Flächenabbildung



$\vec{x}^{*-1}(\alpha(\vec{x}(u,v)))$ bildet lokal G injektiv auf $\bar{G}$ ab und gibt die Möglichkeit für einen Parameterwechsel für Φ^*: $\vec{x}^*(u,v) = \alpha(\vec{x}(u,v))$

Damit sind Φ und Φ^* genauer die durch die Flächenabbildung α aufeinander bezogenen Punkte X und X^* auf dieselben Parameter (u,v) bezogen.

Seien nun o.E. Φ und Φ^* auf gleiche Parameter bezogen.

$g_{11}=\vec{x}_u^{\,2},\ g_{12}=\vec{x}_u\vec{x}_v,\ g_{22}=\vec{x}_v^{\,2}$ und $g^*_{11}=\vec{x}^{*2}_u,\ g^*_{12}=\vec{x}^*_u\vec{x}^*_v,\ g^*_{22}=\vec{x}^{*2}_v$

Dann gilt:

1) $g_{ij}(u,v)=g^*_{ij}(u,v) \Leftrightarrow \left(s=\int\sqrt{g_{11}\dot u^2+2g_{12}\dot u\dot v+g_{22}\dot v^2}\,dt\right) \Rightarrow \alpha$ ist isometrisch

Bogenlänge von c und c^* gleich!

2) $g_{ij}(u,v)=\overset{\overset{0}{\neq}}{\lambda}(u,v)\,g^*_{ij}(u,v) \Leftrightarrow \left(\cos\sphericalangle(\dot{\vec{x}},\dot{\vec{y}})=\frac{g_{11}\dot u\dot{\bar u}+g_{12}\dot u\dot{\bar v}+g_{12}\dot{\bar u}\dot v+g_{22}\dot v\dot{\bar v}}{\sqrt{g_{11}\dot u^2+2g_{12}\dot u\dot v+g_{22}\dot v^2}\sqrt{g_{11}\dot{\bar u}^2+2g_{12}\dot{\bar u}\dot{\bar v}+g_{22}\dot{\bar v}^2}}\right)$

Winkel zweier Flächenkurven c und $\bar c$ bzw c^* und $\bar c^*$ gleich!
$\vec{x}(t)=\vec{x}(u(t),v(t))$
$\vec{y}(t)=\vec{y}(\bar u(t),\bar v(t))$
$\Rightarrow \alpha$ ist winkeltreu (konform)

3) $g(u,v)=g^*(u,v) \Leftrightarrow \left(O=\iint_G\sqrt{g}\,du\,dv\right) \Rightarrow \alpha$ ist flächentreu

Oberfläche von $\Phi|_G$ und $\Phi^*|_G$ gleich!

Die Umkehrung dieser Aussagen gelten ebenfalls!
Zum Beweis sind jedoch weitere Überlegungen nötig!

T29. Raumkurve $c: \vec{y}(s)$, $s \in I$ (s Bogenlänge von c, d.h. $|\vec{y}'(s)|=1$

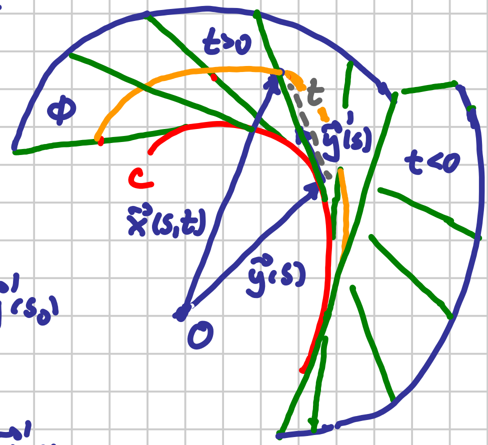
Tangentenfläche Φ: $\vec{x}(s,t) = \vec{y}(s) + t\,\vec{y}'(s)$, $s \in I$, $t \in J \subset \mathbb{R}$

a) Φ regulär $\Leftrightarrow \{\vec{x}_s, \vec{x}_t\}$ lin. unabhängig $\Leftrightarrow \vec{x}_s \times \vec{x}_t \neq \vec{0}$

$\vec{x}_s = \vec{y}' + t\vec{y}''$, $\vec{x}_t = \vec{y}'$ $\Rightarrow$ $\vec{x}_s \times \vec{x}_t = t\cdot(\vec{y}'' \times \vec{y}') = \vec{0} \Leftrightarrow t=0$

(Voraussetzung c W-punktfrei $\Rightarrow \{\vec{y}', \vec{y}''\}$ lin. unabh. $\Rightarrow \vec{y}' \times \vec{y}'' \neq \vec{0}$)

$\Rightarrow$ Φ regulär für $J \subset \mathbb{R}^+$ oder $J \subset \mathbb{R}^-$



Für $t=0$ (d.h. die Punkte von c) ist die Tangentenebene von Φ nicht erklärt. c heißt Gradlinie von Φ

b) t-Linien ($s=$ const) $\vec{x}(s_0,t) = \vec{y}(s_0) + t\,\vec{y}'(s_0)$

Tangenten von c, Erzeugende von Φ

s-Linien ($t=$ const) $\vec{x}(s,t_0) = \vec{y}(s) + t_0\,\vec{y}'(s)$

Wegen $|\vec{y}'(s)| = 1$ $\forall s$ sind s-Linien Linien konstanten, auf den Tangenten von c abgetragenen Abstands.

c) (nicht normierter) Normalenvektor von Φ: $\vec{n}(s,t) = \vec{x}_s \times \vec{x}_t = t\cdot(\vec{y}'' \times \vec{y}')$

$\Rightarrow$ längs der Erzeugenden $s=s_0=$ const von Φ ändert sich die Richtung des Normalenvektors $\vec{n}$ nicht, nur die Länge von $\vec{n}$.

Außerdem enthält jede Tangentenebene von Φ längs der Erzeugenden $s=s_0=$ const diese Erzeugende $\vec{x}(s_0,t)$ $\Rightarrow$ Behauptung.

d) $g_{11} = \vec{x}_s^{\,2} = (\vec{y}' + t\vec{y}'')^2 = \underbrace{\vec{y}'^2}_{=1} + 2t\underbrace{\vec{y}'\vec{y}''}_{=0} + t^2\vec{y}''^2 = 1 + t^2\vec{y}''^2 = 1 + t^2\kappa^2(s)$

$(\vec{y}'(s))^2 = 1$ $\forall s$ $\overset{d/ds}{\Longrightarrow}$ $2\vec{y}'(s)\vec{y}''(s) = 0$ $\forall s$ $\qquad \kappa(s) = |\vec{y}''(s)|$

$g_{12} = \vec{x}_s\vec{x}_t = (\vec{y}' + t\vec{y}'')\vec{y}' = \underbrace{\vec{y}'^2}_{=1} + t\underbrace{\vec{y}''\vec{y}'}_{=0} = 1$

$\kappa(s)>0$ bei Raumkurven

$g_{22} = \vec{x}_t^{\,2} = \vec{y}'^2 = 1$ $\quad$ ($\Rightarrow g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = t^2\kappa^2(s) \neq 0$ für $t \neq 0$)

e) Nach Vorlesung ist die Abbildung zweier Flächen aufeinander (mittels Zuordnung durch gleiche Parameter) isometrisch, wenn in zugeordneten Punkten die metrischen Fundamentalgrößen übereinstimmen.

Aus d folgt: Zwei Tangentenflächen Φ_1, Φ_2, deren Gratlinien $c_1: \vec{y}_1(s)$ und $c_2: \vec{y}_2(s)$ (jeweils auf ihre Bogenlänge s bezogen) in zugeordneten Punkten die selbe Krümmung haben, sind zueinander isometrisch.

Nach dem Hauptsatz der Kurventheorie gibt es bis auf Bewegungen genau eine <u>ebene</u> Kurve $\tilde{c}$ mit der Krümmung $\kappa(s)$ von c. Die <u>ebene</u> Tangentenfläche $\tilde{\Phi}$ von $\tilde{c}$ ist (nach d) isometrisch zur Tangentenfläche Φ von c.

Zusatz!

Parameterdarstellung von $\tilde{c}$ in der xy-Ebene:

$$\tilde{c}: \vec{\tilde{y}}(s) = \left(\int_0^s \cos\left(\int_0^v \kappa(u)\,du\right)dv,\ \int_0^s \sin\left(\int_0^v \kappa(u)\,du\right)dv,\ 0\right)^T,\quad s \in I$$

<u>Beweis durch Nachrechnen</u>:

Beachtet man $\frac{d}{ds}\int_0^s f(v)\,dv = f(s)$, so erhält man

$$\vec{\tilde{y}}'(s) = \frac{d}{ds}\vec{\tilde{y}}(s) = \left(\cos\left(\int_0^s \kappa(u)\,du\right), \sin\left(\int_0^s \kappa(u)\,du\right), 0\right)^T \text{ und } |\vec{\tilde{y}}'(s)| = 1$$

$\Rightarrow$ Bogenlänge s von c ist auch Bogenlänge von $\tilde{c}$!

$$\vec{\tilde{y}}''(s) = \left(-\kappa(s)\sin\left(\int_0^s \kappa(u)\,du\right), \kappa(s)\cos\left(\int_0^s \kappa(u)\,du\right), 0\right)^T \Rightarrow \tilde{\kappa}(s) = |\vec{\tilde{y}}''(s)| = \kappa(s)$$

<u>Beispiel:</u> Die Tangentenflächen der Schraublinien c_a:

$$\vec{y}_a(s) = \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{a^2}\cos(as) \\ \frac{\kappa}{a^2}\sin(as) \\ \frac{\sqrt{a^2-\kappa^2}}{a}s \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{y}_a{}'(s) = \begin{pmatrix} -\frac{\kappa}{a}\sin(as) \\ \frac{\kappa}{a}\cos(as) \\ \frac{\sqrt{a^2-\kappa^2}}{a} \end{pmatrix},\ \vec{y}_a{}''(s) = \begin{pmatrix} -\kappa\cos(as) \\ -\kappa\sin(as) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow |\vec{y}_a{}''| = \kappa = \text{const}$, sind für alle $a \geq \kappa$ zueinander isometrisch bzw. alle isometrisch zur <u>ebenen</u> Tangentenfläche des Kreises c_κ mit Radius $\frac{1}{\kappa}$, vgl. Figur TangentenFlaeche.cdy !