Geometrie LB Übungen Blatt 11

Notiztitel 16.12.2014

T26. $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t + t\sin t \\ \sin t - t\cos t \end{pmatrix},\ t>0 \Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \end{pmatrix},\ \ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ \sin t + t\cos t \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow |\dot{\vec{x}}(t)| = t = \frac{ds}{dt} \Rightarrow \vec{t}(t) = \frac{\dot{\vec{x}}(t)}{|\dot{\vec{x}}(t)|} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \vec{n}(t)$$

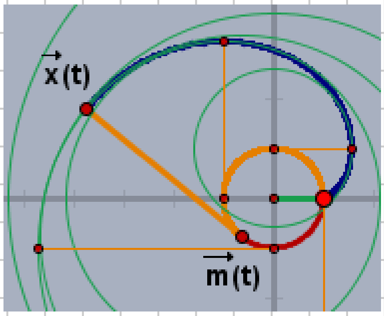
Frenet 2 Bein $\vec{t} \perp \vec{n}$ mit $\det(\vec{t},\vec{n}) = 1$ rechts ONB!

$$\det(\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}}) = \det\underbrace{\begin{pmatrix} t\cos t & \cancel{\cos t} - t\sin t \\ t\sin t & \cancel{\sin t} + t\cos t \end{pmatrix}}_{\frac{1}{t}\text{-faches abziehen}} \underset{t\cdot t \text{ ausklammern}}{=} t^2 \underbrace{\det\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}}_{=1} = t^2$$

$$\Rightarrow \kappa(t) = \frac{\det(\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}})}{|\dot{\vec{x}}|^3} = \frac{t^2}{t^3} = \frac{1}{t} \Rightarrow \text{Krümmungskreismittelpunkt}$$

$$\vec{m}(t) = \vec{x}(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\cdot\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \cancel{t\sin t} \\ \sin t - \cancel{t\cos t} \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} \cancel{-\sin t} \\ \cancel{\cos t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},\ t>0$$

Evolute von c ist ein Kreis K um O mit Radius 1. Umgekehrt ist c eine Kreisevolvente (t = Bogenlänge von K)



$$\vec{x}(t) = \vec{m}(t) + (t_0 - t)\cdot\dot{\vec{m}}(t)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + (t_0 - t)\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \underset{\text{o.E. } t_0 = 0}{=} \begin{pmatrix} \cos t + t\sin t \\ \sin t - t\cos t \end{pmatrix},\ t>0 \checkmark$$

Alternative Berechnung der Krümmung $\kappa(t)$ mit Hilfe der Frenet-Ableitungsgleichungen $\vec{t}\,'(s) = \kappa(s)\cdot\vec{n}(s)$, $\vec{n}\,'(s) = -\kappa(s)\,\vec{t}(s)$ mit Bogenlänge s?

Betrachte $\vec{y}(s) = \vec{x}(t(s)) \Rightarrow \vec{y}\,'(s) = \frac{d\vec{x}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} \underset{|\vec{y}\,'(s)| = 1\ \forall s}{=} \frac{\dot{\vec{x}}(t)}{|\dot{\vec{x}}(t)|} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \vec{t}(t(s))$

$$\Rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\dot{\vec{x}}(t)|} = \frac{1}{t} \quad \text{und}$$

$$\vec{t}\,'(s) = \frac{d\vec{t}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{=\vec{n}(t(s))}\cdot\frac{dt}{ds} = \kappa(t(s))\cdot\vec{n}(t(s)) \Rightarrow \kappa(t) = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{t}$$

T27. $\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ \sqrt{2}u \end{pmatrix}, \quad (u,v)\in\mathbb{R}^2$

a) u-Linien $(v=v_0=\text{const})$ $\vec{x}(u,v_0) = u\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}\cos v_0\\ \sin v_0\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}}_{=\vec{r}}$ Geraden durch Ursprung O mit Richtung $\vec{r}$

v-Linien $(u=u_0=\text{const})$ $\vec{x}(u_0,v) = \begin{pmatrix}0\\0\\\sqrt{2}u_0\end{pmatrix} + u_0\begin{pmatrix}\cos v\\ \sin v\\ 0\end{pmatrix}$ Kreis um z-Achse mit Radius u_0 in Ebene $z=\sqrt{2}u_0$

$\Rightarrow$ Φ ist Drehfläche um z-Achse mit geradlinigem Meridian. (u-Linien)

$$\vec{x}(u,v) = \underbrace{\begin{pmatrix}\cos v & -\sin v & 0\\ \sin v & \cos v & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix um z-Achse mit Winkel } v}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}u\\0\\\sqrt{2}u\end{pmatrix}}_{\text{Kurve in xz-Ebene Kurvenparameter } u} = \begin{pmatrix}u\cos v\\ u\sin v\\ \sqrt{2}u\end{pmatrix}$$

= Meridian hier: Gerade

$\Rightarrow$ Φ ist ein Drehkegel um z-Achse, Spitze O.

b) Φ regulär $\Leftrightarrow$ $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ linear unabhängig $\forall (u,v)$

$\Leftrightarrow$ $\vec{x}_u\times\vec{x}_v \neq \vec{0}$ $\forall(u,v)$ $\Leftrightarrow$ $(\vec{x}_u\times\vec{x}_v)^2\neq 0$ $\forall(u,v)$

$\underbrace{\vec{x}_u = \begin{pmatrix}\cos v\\ \sin v\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}}_{\text{Tgte an u-Linie}}, \quad \underbrace{\vec{x}_v = \begin{pmatrix}-u\sin v\\ u\cos v\\ 0\end{pmatrix}}_{\text{Tgte an v-Linie}}$ $\Rightarrow$ Für $u\neq 0$ gilt: $\lambda\vec{x}_u + \mu\vec{x}_v = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix}\lambda=0\\ \mu=0\end{matrix}$ (3. Komp.)

$\Rightarrow$ $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ sind für $u\neq 0$ lin. unabh.

2. Weg: $\vec{x}_u\times\vec{x}_v = \begin{pmatrix}-\sqrt{2}u\cos v\\ -\sqrt{2}u\sin v\\ u\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ für $u\neq 0$ (Kegelspitze O ist einziger singulärer Pkt)

$\Phi|_G$ ist nicht einfach, da für $v\in\mathbb{R}$ die Breitenkreise (v-Linien) mehrfach durchlaufen werden $\Rightarrow$ Einschränkung auf
$\tilde{G} = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid u>0,\ -\pi\leq v<\pi\}$ liefert einfache Fläche.

c) $u=e^t, v=t$ $\Rightarrow$ $\vec{y}(t) := \vec{x}(u(t),v(t)) = e^t\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\dot{\vec{y}}(t) = e^t\begin{pmatrix}\cos t - \sin t\\ \sin t + \cos t\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}\neq\vec{0}$

$\Rightarrow$ c ist regulär $\forall t\in\mathbb{R}$

2. Weg: $\dot{\vec{y}}(t) \underset{\text{Kettenregel}}{=} \vec{x}_u\cdot\dot{u} + \vec{x}_v\cdot\dot{v} \neq\vec{0}$ $\Leftrightarrow$ $\underline{(\dot{u},\dot{v})} = (e^t, 1)\neq \underline{(0,0)}$ $\forall t\in\mathbb{R}$

Φ regulär d.h. $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ sind lin. unabh.

d) $s=\int\sqrt{\dot{\vec y}(t)^2}\,dt = \int\sqrt{(\vec x_u \dot u + \vec x_v \dot v)^2}\,dt = \int\sqrt{\vec x_u^2\dot u^2 + \vec x_u\vec x_v \dot u\dot v + \vec x_v^2 \dot v^2}\,dt$

mit $\underbrace{\vec x_u^2}_{g_{11}}=3$, $\underbrace{\vec x_u\vec x_v}_{g_{12}}=0$, $\underbrace{\vec x_v^2}_{g_{22}}=u^2=e^{2t}$ und $\dot u=e^t$, $\dot v = t \Rightarrow$

metrische Fundamentalgrößen

$s=\int\sqrt{3\cdot e^{2t}+0+e^{2t}}\,dt = \int 2e^t\,dt = \underline{2e^t + \text{const}}$

<u>2. Weg:</u> direkt $\dot{\vec y}(t)^2 = e^{2t}\cdot(1+1+2) = 4e^{2t} \Rightarrow |\dot{\vec y}(t)| = 2e^t$

<u>Zu T27:</u>

Drehkegel mit Parameterlinien, Flächenkurve und deren Tangente in $\vec x(u(t),v(t))$.