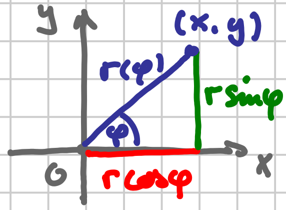
Geometrie LB   Blatt 11   Hausaufgaben

Notiztitel 16.12.2014

H25. Polarkoord. $r(\varphi)=a e^{b\varphi}$, $a,b>0$



$$\Rightarrow \vec{x}(\varphi)=\begin{pmatrix}x(\varphi)\\ y(\varphi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r(\varphi)\cos\varphi\\ r(\varphi)\sin\varphi\end{pmatrix}=a e^{b\varphi}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$$

a) $$\Rightarrow \dot{\vec{x}}(\varphi)=ab e^{b\varphi}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}+a e^{b\varphi}\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}=a e^{b\varphi}\begin{pmatrix}b\cos\varphi-\sin\varphi\\ b\sin\varphi+\cos\varphi\end{pmatrix}$$

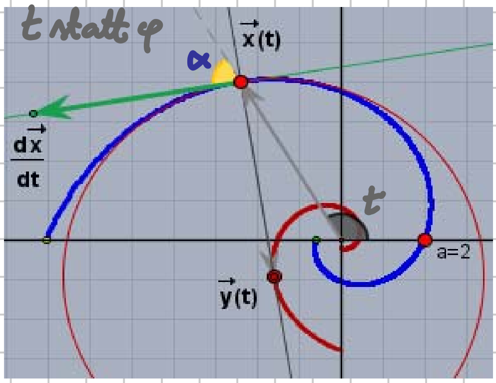
$$(\dot{\vec{x}}(\varphi))^2=a^2 e^{2b\varphi}\cdot(b^2+1)\Rightarrow$$

$$s(\varphi)=\int_0^{\varphi}|\dot{\vec{x}}(u)|\,du=\int_0^{\varphi}a e^{bu}\sqrt{b^2+1}\,du$$

$$=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+1}\,(e^{b\varphi}-1),\ \varphi\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{\varphi\to-\infty}s(\varphi)=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+1}\lim_{\varphi\to-\infty}(e^{b\varphi}-1)=$$

$$=-\frac{a}{b}\sqrt{b^2+1}\quad \text{(endlich!)}$$



b) Gerade durch 0 und $\vec{x}(\varphi)$: $\vec{y}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{\dot{\vec{x}}(\varphi)}{|\dot{\vec{x}}(\varphi)|}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{b^2+1}}\cdot\begin{pmatrix}b\cos\varphi-\sin\varphi\\ b\sin\varphi+\cos\varphi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}=\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}=\underline{\text{const}}$$

c) $$\ddot{\vec{x}}(\varphi)=ab e^{b\varphi}\begin{pmatrix}b\cos\varphi-\sin\varphi\\ b\sin\varphi+\cos\varphi\end{pmatrix}+a e^{b\varphi}\begin{pmatrix}-b\sin\varphi-\cos\varphi\\ b\cos\varphi-\sin\varphi\end{pmatrix}=$$

$$=a e^{b\varphi}\begin{pmatrix}(b^2-1)\cos\varphi-2b\sin\varphi\\ (b^2-1)\sin\varphi+2b\cos\varphi\end{pmatrix}$$

im Kopf!

$$\det(\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}})=a^2e^{2b\varphi}\det\begin{pmatrix}b\cos\varphi-\sin\varphi & (b^2-1)\cos\varphi-2b\sin\varphi\\ b\sin\varphi+\cos\varphi & (b^2-1)\sin\varphi+2b\cos\varphi\end{pmatrix}=\ldots=$$

$$=a^2e^{2b\varphi}(2b^2-(b^2-1))=a^2e^{2b\varphi}(b^2+1)$$

$$\Rightarrow \kappa(\varphi)=\frac{\det(\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}})}{|\dot{\vec{x}}|^3}=\frac{a^2e^{2b\varphi}(b^2+1)}{a^3e^{3b\varphi}(b^2+1)^{3/2}}=\frac{1}{a e^{b\varphi}\sqrt{b^2+1}}=\frac{1}{|\dot{\vec{x}}(\varphi)|}\quad(*)$$

$$\Rightarrow \text{Evolute } \vec{y}(\varphi)=\vec{x}(\varphi)+\frac{1}{\kappa(\varphi)}\vec{n}(\varphi)\quad \text{mit } \vec{n}(\varphi)\perp\vec{t}(\varphi)=\frac{\dot{\vec{x}}(\varphi)}{|\dot{\vec{x}}(\varphi)|}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

$$\vec{n}(\varphi)=\begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\end{pmatrix}\quad (\vec{t},\vec{n}\text{ rechts ONB})$$

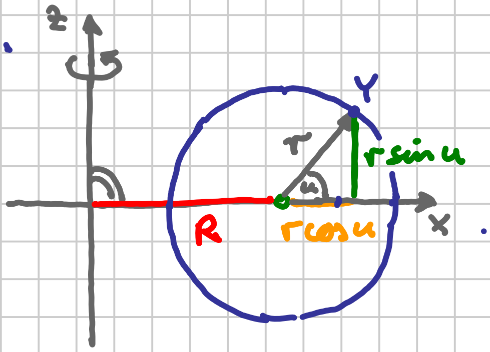
$$\Rightarrow \vec{y}(\varphi) = ae^{b\varphi}\begin{pmatrix}\cancel{\cos\varphi}\\ \cancel{\sin\varphi}\end{pmatrix} + \underbrace{\frac{1}{\kappa(\varphi)}\cdot\frac{1}{|\dot{\vec{x}}(\varphi)|}}_{=1 \text{ nach } (*)}\cdot ae^{b\varphi}\begin{pmatrix}-b\sin\varphi-\cancel{\cos\varphi}\\ b\cos\varphi-\cancel{\sin\varphi}\end{pmatrix} =$$

$$= abe^{b\varphi}\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix} = bae^{b\varphi}\begin{pmatrix}\cos(\varphi+\frac{\pi}{2})\\ \sin(\varphi+\frac{\pi}{2})\end{pmatrix} = b\cdot\vec{x}(\varphi+\tfrac{\pi}{2})$$

$\Rightarrow$ Die Evolute ist die um $\frac{\pi}{2}$ gedrehte und mit dem Faktor b aus $O=(0,0)$ zentrisch gestreckte Kurve c!

Anmerkung: Für $b \approx 0.27441$ fällt die Evolute von c mit c sogar zusammen

H26.



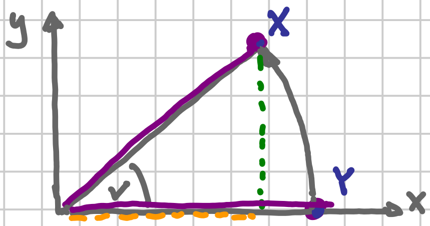
a) o.E. Kreis um $M=(R,0,0)$ in xz-Ebene mit Radius r

Achse a = z-Achse (Meridian)

$$\vec{y}(u) = \begin{pmatrix}R+r\cos u\\ 0\\ r\sin u\end{pmatrix},\quad u\in[-\pi,\pi[$$

Drehung um z-Achse mit Winkel v

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}\cos v & -\sin v & 0\\ \sin v & \cos v & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\vec{y} \Rightarrow$$



$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix}\cos v & -\sin v & 0\\ \sin v & \cos v & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R+r\cos u\\ 0\\ r\sin u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(R+r\cos u)\cdot\cos v\\ (R+r\cos u)\cdot\sin v\\ r\sin u\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}u\in[-\pi,\pi[\\ v\in[-\pi,\pi[\end{matrix}$$

$G = \{(u,v) \mid -\pi \le u < \pi,\ -\pi \le v < \pi\}$ Parameterlinien:

u-Linien ($v=v_0=\text{const}$): $\vec{x}(u,v_0) = \begin{pmatrix}(R+r\cos u)\cos v_0\\ (R+r\cos u)\sin v_0\\ r\sin u\end{pmatrix}$

mit Winkel v_0 um z-Achse gedrehter Meridiankreis

v-Linien ($u=u_0=\text{const}$): $\vec{x}(u_0,v) = \begin{pmatrix}(R+r\cos u_0)\cos v\\ (R+r\cos u_0)\sin v\\ r\sin u_0\end{pmatrix}$

Kreis in Ebene $z=r\sin u_0$ um z-Achse mit Radius $R+r\cos u_0$

b) $\vec{x}_u = \begin{pmatrix} -r\sin u\cos v \\ -r\sin u \sin v \\ r\cos u\end{pmatrix}, \quad \vec{x}_v = \begin{pmatrix} -(R+r\cos u)\sin v \\ (R+r\cos u)\cos v \\ 0\end{pmatrix}$

Tgte an u-Linie   Tgte an v-Linie durch $\vec{x}(u,v)$.

$\vec{x}(u,v)$ regulär $\Leftrightarrow$ $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ linear unabhängig

$\Leftrightarrow \vec{x}_u \times \vec{x}_v \neq \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{x}_u \times \vec{x}_v)^2 = 0$

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v = \underbrace{r}_{>0}(R+r\cos u)\underbrace{\begin{pmatrix}-\cos u\cos v\\ -\cos u\sin v\\ -\sin u\end{pmatrix}}_{\neq \vec{0} \text{ da für } \sin u = 0 \Rightarrow \cos u = \pm 1} \neq \vec{0} \Leftrightarrow R + r\underbrace{\cos u}_{\in[-1,1]} \neq 0 \ \forall u$$

gilt stets falls $\underline{R>r}$

c) $\vec{x}(u,v)$ einfach für $(u,v)\in G$ $\Leftrightarrow \left(\vec{x}(u_1,v_1) = \vec{x}(u_2,v_2) \Rightarrow (u_1,v_1) = (u_2,v_2)\right)$

o.E. $u \in [0,\pi]$ wegen Symmetrie zur xy-Ebene

Es gilt: $R + r\cos u_0 = 0 \Leftrightarrow u_0 = \arccos(-\frac{R}{r})$ falls $R \leq r$

$\Rightarrow$ In diesem Fall gilt $\vec{x}(u_0,v) = \vec{x}(u_0,0) \ \forall v$ d.h. Doppelpkt singulärer Pkt

Sei also $R + r\cos u \neq 0$ und $\vec{x}(u_1,v_1) = \vec{x}(u_2,v_2)$

3. Komponente $r\sin u_1 = r\sin u_2 \Rightarrow \begin{cases} u_2 = u_1 \\ u_2 = \pi - u_1 \end{cases}$

<u>1. Fall</u> $u_2 = u_1 \Rightarrow \cos u_2 = \cos u_1$ 1. und 2. Komponente $\overset{R+r\cos u_1 \neq 0}{\Rightarrow}$

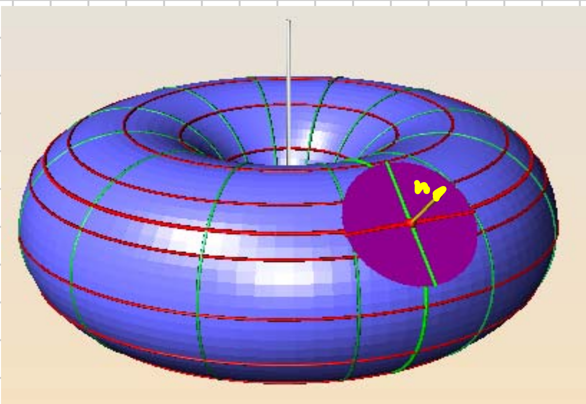
$\begin{pmatrix}\cos v_1\\ \sin v_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos v_2\\ \sin v_2\end{pmatrix} \underset{v\in[-\pi,\pi[}{\Rightarrow} v_1 = v_2$ $\Rightarrow$ keine Doppelpunkte

<u>2. Fall</u> $u_2 = \pi - u_1 \Rightarrow \cos u_2 = \cos(\pi - u_1) = -\cos u_1$

Quadratsumme der 1. und 2. Komponente:

$(R + r\cos u_1)^2 = (R - r\cos u_1)^2 \Leftrightarrow 4r\cos u_1 = 0 \Leftrightarrow u_1 = \frac{\pi}{2} = u_2$

siehe 1. Fall



<u>zu H25</u>

Torus mit Meridian- und Breitenkreisen, Tangentenebene in $\vec{x}(u,v)$ samt Normale $\vec{n}(u,v) = \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{|\vec{x}_u \times \vec{x}_v|}$

d) Torus ϕ: $\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} (R+r\cos u)\cos v \\ (R+r\cos u)\sin v \\ r\sin u \end{pmatrix}$, $(u,v) \in [-\pi,\pi[\times [-\pi,\pi[$

$\Rightarrow \vec{x}_u = \begin{pmatrix} -r\sin u\cos v \\ -r\sin u\sin v \\ r\cos u \end{pmatrix}, \vec{x}_v = \begin{pmatrix} -(R+r\cos u)\sin v \\ (R+r\cos u)\cos v \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} g_{11} = \vec{x}_u^{\,2} = r^2 \\ g_{12} = \vec{x}_u\vec{x}_v = 0 \\ g_{22} = \vec{x}_v^{\,2} = (R+r\cos u)^2 \end{array}$

$\Rightarrow g = \det(g_{ij}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = (\vec{x}_u \times \vec{x}_v)^2 = r^2(\underbrace{R+r\cos u}_{>0})^2 \neq 0$ für $R>r$

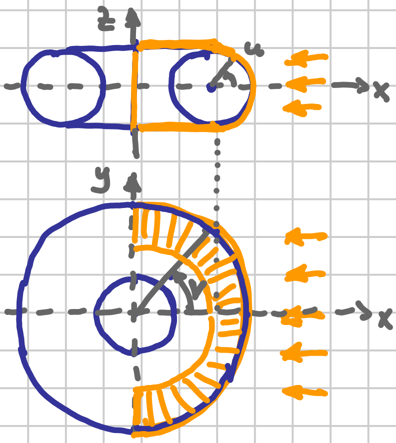
Nach b) ist ϕ für $R>r$ über $\mathcal{U} = [-\pi,\pi[\times [-\pi,\pi[$ regulär und einfach $\Rightarrow$

$$A(\phi) = \iint_{\mathcal{U}} |\vec{x}_u \times \vec{x}_v|\, du\,dv = \iint_{\mathcal{U}} \sqrt{\det(g_{ij})}\, du\,dv =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r(R+r\cos u)\,du\,dv = r\int_{-\pi}^{\pi} (Ru + r\sin u)\Big|_{u=-\pi}^{\pi} dv =$$

$$= r\int_{-\pi}^{\pi} 2R\pi\, dv = r\cdot 2R\pi v\Big|_{v=-\pi}^{\pi} = \underline{\underline{4Rr\pi^2}}$$

Bei Beleuchtung parallel zur x-Achse wird nur der Teil von ϕ mit $(u,v) \in \underbrace{[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]}_{u} \times \underbrace{[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]}_{v}$ beleuchtet.



$$\Rightarrow A(\bar{\phi}) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r(R+r\cos u)\,dv\,du =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \pi r(R+r\cos u)\,du =$$

$$= \pi r\cdot(Ru + r\sin u)\Big|_{u=-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= \pi r\cdot(R\pi + 2r) =$$

$$= \underline{\underline{rR\pi^2 + 2r^2\pi}}$$