

T24  $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 3 \sin t \\ t^2 \end{pmatrix}, \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -3 \sin t \\ 3 \cos t \\ 2t \end{pmatrix}, \ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -3 \cos t \\ -3 \sin t \\ 2 \end{pmatrix}, \ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 3 \sin t \\ -3 \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$

a)  $(\dot{\vec{x}}(t))^2 = 9 + 4t^2 > 0 \forall t \in (-\pi, \pi) \Rightarrow c$  ist regulär oder

$(\dot{\vec{x}}(t) = \vec{0} \Rightarrow (3. \text{Komp.}) \Rightarrow t = 0 \Rightarrow (2. \text{Komp.}) \Rightarrow 3 \cos t = 3 \neq 0 \Rightarrow$  Regularität)

$\vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2) \Rightarrow (3. \text{Komp.}) \Rightarrow t_1 = t_2 \Rightarrow$   
 1. Komp.  $3 \cos(-t_2) = 3 \cos t_2$   
 $= 3 \cos t_2$   
 2. Komp.  $3 \sin(-t_2) = 3 \sin t_2$   
 $= -3 \sin t_2$

$\Leftrightarrow 6 \sin t_2 = 0 \Leftrightarrow t_2 = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$  mit  $t_2 \in (-\pi, \pi) \Rightarrow k = 0, t_1 = t_2 = 0$

Für  $k = 1$  folgt:  $\vec{x}(-\pi) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ \pi^2 \end{pmatrix} = \vec{x}(\pi)$  (Doppelpunkt in  $[-\pi, \pi]$ )

b) zugehörige Tangentenvektoren:  $\dot{\vec{x}}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2\pi \end{pmatrix} \neq \dot{\vec{x}}(-\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2\pi \end{pmatrix}$ .

c)  $s = \int_{-\pi}^{\pi} |\dot{\vec{x}}(t)| dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{9 + 4t^2} dt = 2 \cdot \int_0^{\pi} 2 \sqrt{\frac{9}{4} + t^2} dt =$   
 Symmetrie  $\int_0^{\pi} 2 \sqrt{\frac{9}{4} + t^2} dt = \pi \sqrt{9 + 4\pi^2} + \frac{9}{2} \operatorname{arsinh} \frac{2\pi}{3} \approx 28,56$   
 Formelsammlung

d) Schmiegeebene  $\sigma: \vec{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{x}(t) + \lambda \dot{\vec{x}}(t) + \mu \ddot{\vec{x}}(t), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$   
 Punkt-Richtungsform

hat Normale  $\dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -3 \sin t \\ 3 \cos t \\ 2t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \cos t \\ -3 \sin t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cos t + 6t \sin t \\ 6 \sin t - 6t \cos t \\ 9 \end{pmatrix}$

Richtung des Binormalenvektors

$\Rightarrow \sigma: (\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}) \cdot (\vec{y} - \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow (\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}) \cdot \vec{y} = (\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}) \cdot \vec{x}$

Einsetzen liefert Koord. Gleichung

$\sigma: 6(\cos t + t \sin t) \cdot x + 6(\sin t - t \cos t) \cdot y + 9z = 18 + 9t^2$

$R(0, 0, 6) \in \sigma \Leftrightarrow 54 = 18 + 9t^2 \Leftrightarrow 9t^2 = 36 \Leftrightarrow t = \pm 2 \Rightarrow \vec{x}(\pm 2) = \begin{pmatrix} 3 \cos 2 \\ \pm 3 \sin 2 \\ 4 \end{pmatrix}$   
 Koord. Einsetzen.

(2. Weg über Punkt-Richtungsform unumständlicher?)

e) Krümmung  $\kappa(t) = \frac{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}{|\dot{\vec{x}}|^3}$  (allgem. Param.), Torsion  $\tau(t) = \frac{\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}})}{(\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}})^2}$  (allgem. Param.)

$$(\dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t))^2 = 36 + 36t^2 + 81 = 117 + 36t^2 \Rightarrow \kappa(t) = \frac{\sqrt{117+36t^2}}{(9+4t^2)^3}$$

$$\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}) = \det(\dot{\vec{x}} + \ddot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}) = \det \begin{pmatrix} 0 & -3\cos t & 3\sin t \\ 0 & -3\sin t & -3\cos t \\ 2t & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2t \cdot 9 = 18t$$

Determinantenumformungen  
Spatprodukt

2. Weg:  $\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}) = (\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}) \cdot \ddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 6\cos t + 6t\sin t \\ 6\sin t - 6t\cos t \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3\sin t \\ -3\cos t \\ 0 \end{pmatrix} = 18t$

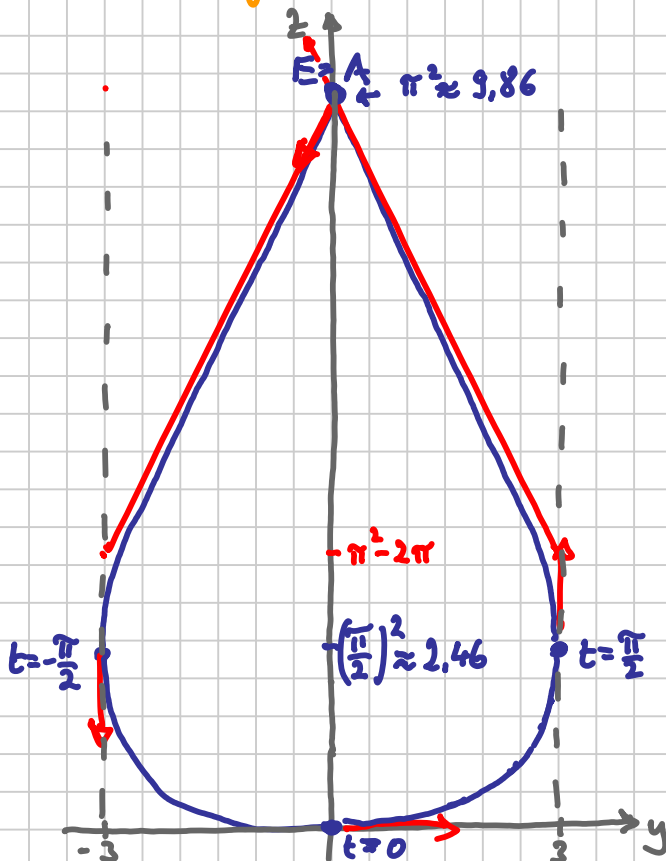
$$\Rightarrow \tau(t) = \frac{18t}{117+36t^2} = \frac{2t}{13+4t^2}$$

$$\kappa(t) \text{ extremal} \Leftrightarrow (\kappa(t))^2 = \frac{117+36t^2}{(9+4t^2)^3} =: f(t) \text{ extremal}$$

$$\Leftrightarrow \dot{f}(t) = \frac{df}{dt} = \frac{72t(9+4t^2)^2 - (117+36t^2) \cdot 3 \cdot (9+4t^2)^2 \cdot 8t}{(9+4t^2)^6} = 0 \quad \begin{matrix} \text{Zähler } 0 \\ \downarrow \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow 24t [3 \cdot (9+4t^2) - (117+36t^2)] = 0 \Leftrightarrow t [-90 - 24t^2] = 0 \Leftrightarrow \underline{t=0} \quad \begin{matrix} < 0 \neq t? \\ \downarrow \end{matrix}$$

f) Normalprojektion  $C^*$ :  $\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sin t \\ t^2 \end{pmatrix}, t \in [-\pi, \pi]$   
(durch Weglängen  $\text{um}(x(t))$ )



$$\begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 2t \end{pmatrix}$$

Betrachte Punkte und Tangentenrichtungen für  $t=0, t=\pm\frac{\pi}{2}, t=\pm\pi$

Zusatz:  $C$  liegt auf dem Drehzylinder  $\Delta: x^2+y^2=9$  mit  $z$ -Achse als Drehachse

(klar durch Einsetzen!)

Aus obigen Formeln (für  $\kappa(t)$  und  $\tau(t)$ ) ergeben sich im Fall dass  $t$  die Bogenlänge sind die Formeln  $\kappa(s)$  und  $\tau(s)$ , da  $t$  ist Bogenlänge  $\Leftrightarrow |\dot{\vec{x}}(t)| = 1+t$  und  $(\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}})^2 = (\dot{\vec{x}})^2 (\ddot{\vec{x}})^2 - (\dot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}})^2$

$$\text{Lagrange} = (\ddot{\vec{x}})^2 = 0$$

$$\Rightarrow \kappa = |\ddot{\vec{x}}| \text{ und } \tau = \frac{\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}})}{(\dot{\vec{x}})^2}$$

T25  $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 4-3t^2 \\ 6t^3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -6t \\ 18t^2 \end{pmatrix}, \ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 36t \end{pmatrix}, \ddot{\ddot{\vec{x}}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 36 \end{pmatrix}$

a)  $c$  regulär  $\Leftrightarrow \dot{\vec{x}}(t) \neq \vec{0} \quad \forall t \in \mathbb{R}$  klar wegen 1. Komponente

$c$  doppelpunktfrei  $\Leftrightarrow$  Aus  $\vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2)$  folgt  $t_1 = t_2$   
klar wegen 1. Komponente

$c$  W-punktfrei  $\Leftrightarrow \dot{\vec{x}}(t)$  und  $\ddot{\vec{x}}(t)$  sind für alle  $t \in \mathbb{R}$  linear unabhängig, d.h. spannen die Schmieg Ebene in  $\vec{x}(t)$  auf

( $\Leftrightarrow$  Knutz  $\lambda \dot{\vec{x}}(t) + \mu \ddot{\vec{x}}(t) = \vec{0} \Rightarrow$  1. Komp.  $\lambda = 0$  und 2. Komp.  $\mu = 0$ )

Kurve im  $\mathbb{R}^3$   $\rightarrow \Leftrightarrow \dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t) \neq \vec{0}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$

$$\dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t) = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -6t \\ 18t^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 6t \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} -18t^2 \\ -6t \\ -1 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \text{ wegen 3. Komponente}$$

b) Bogenlänge  $(\dot{\vec{x}}(t))^2 = 1 + 36t^2 + (18t^2)^2 = (1 + 18t^2)^2$

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\vec{x}}(u)| du = \int_0^t \sqrt{(\dot{\vec{x}}(u))^2} du = \int_0^t 1 + 18u^2 du = u + 6u^3 \Big|_0^t = \underline{t + 6t^3}$$

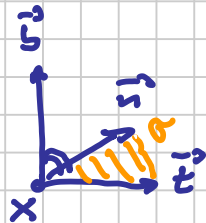
$t_0=0$  o.E.

$$\text{Krümmung } \kappa(t) = \frac{|\dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t)|}{|\dot{\vec{x}}(t)|^3} = \frac{6 \cdot (18t^2 + 1)}{(1 + 18t^2)^3} = \frac{6}{(1 + 18t^2)^2}$$

$$(\dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t))^2 = 36 \cdot [(18t^2)^2 + 36t^2 + 1] = 36 \cdot (18t^2 + 1)^2$$

$$\text{Torsion } \tau(t) = \frac{\det(\dot{\vec{x}} \ \ddot{\vec{x}} \ \ddot{\ddot{\vec{x}}})}{(\dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}})^2} = \frac{-6 \cdot 36}{36(1 + 18t^2)^2} = \frac{-6}{(1 + 18t^2)^2}$$

$$\det(\dot{\vec{x}} \ \ddot{\vec{x}} \ \ddot{\ddot{\vec{x}}}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6t & -6 & 0 \\ 18t^2 & 36t & 36 \end{pmatrix} = -6 \cdot 36$$



c) Frenet-Dreibein  $\vec{t}(t), \vec{n}(t), \vec{b}(t)$  (ONB)

$$\vec{t}(t) \text{ Tangenten(einheits)vektor } \vec{t}(t) = \frac{\dot{\vec{x}}(t)}{|\dot{\vec{x}}(t)|} = \frac{1}{1 + 18t^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -6t \\ 18t^2 \end{pmatrix}$$

$\vec{n}(t)$  (Haupt)Normalenvektor und  $\vec{b}(t)$  Binormalenvektor

$\vec{n}(t)$  spannt (in nicht-W-Punkt) zusammen mit  $\vec{t}(t)$

die Schmieg Ebene  $\sigma: \vec{y} = \vec{x}(t) + \lambda \dot{\vec{x}}(t) + \mu \ddot{\vec{x}}(t), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$  auf.

Derem Normalenvektor ist (im  $\mathbb{R}^3$ ) der Binormalenvektor

$$\vec{b}(t) = \frac{\dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t)}{|\dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t)|} = \frac{-1}{1+18t^2} \begin{pmatrix} 18t^2 \\ 6t \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \vec{n}(t) &= \vec{b}(t) \times \vec{t}(t) = \frac{-1}{(1+18t^2)^2} \begin{pmatrix} 18t^2 \\ 6t \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -6t \\ 18t^2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{-1}{(1+18t^2)^2} \begin{pmatrix} 6t(18t^2+1) \\ 1-(18t^2)^2 \\ -6t(18t^2+1) \end{pmatrix} = \frac{1}{1+18t^2} \begin{pmatrix} -6t \\ 18t^2-1 \\ 6t \end{pmatrix} \\ &\quad 1-(18t^2)^2 = (1+18t^2)(1-18t^2) \end{aligned}$$

d)  $c$  ist Böschungslinie  $\Leftrightarrow \exists \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$  mit  $\cos \alpha = \frac{\dot{\vec{x}}(t) \cdot \vec{a}}{|\dot{\vec{x}}(t)| |\vec{a}|} = \frac{\dot{\vec{x}}(t) \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} = c = \text{const.} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \dot{\vec{x}}(t) \cdot \vec{a} = |\dot{\vec{x}}(t)| \cdot c \quad \forall t \in \mathbb{R}$  mit  $\tilde{c} = |\vec{a}| \cdot c = \text{const.}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -6t \\ 18t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (1+18t^2) \cdot \tilde{c} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow a_1 - 6t a_2 + 18t^2 a_3 = \tilde{c} + 18t^2 \tilde{c} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \underline{a_1 - \tilde{c}} - 6t \underline{a_2} + 18t^2 \underline{a_3 - \tilde{c}} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

*Analysis*  
 $\Leftrightarrow \underline{a_1 - \tilde{c} = 0}$  und  $\underline{a_2 = 0}$  und  $\underline{a_3 - \tilde{c} = 0} \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} \tilde{c} \\ 0 \\ \tilde{c} \end{pmatrix}$  mit  $\tilde{c} \neq 0$   
 Böschungsrichtung

Die Funktionen  $t^0, t^1, t^2, \dots, t^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  sind linear unabhängig  
 d.h. eine Linearkombination ist die Nullfunktion  $\Leftrightarrow$  alle Koeff. = 0

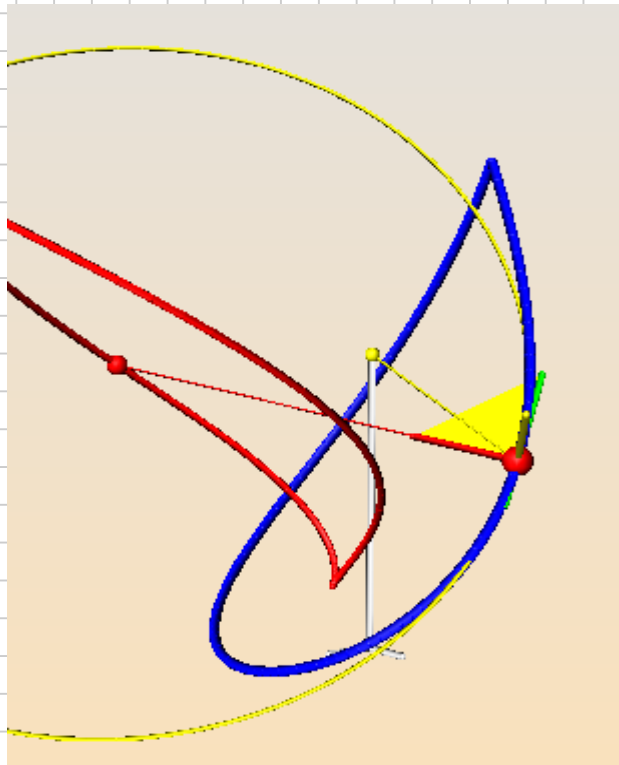
2. Begründung ohne diesen Satz: Wähle  $t=0 \Rightarrow a_1 = \tilde{c}$ , dividiere durch  $t$  und setze wieder  $t=0 \Rightarrow a_2 = 0$  (nochmals)  $\Rightarrow a_3 = \tilde{c}$

3. Weg: Wähle  $t=0, t=1, t=-1 \Rightarrow$  LGS  $\begin{matrix} a_1 - \tilde{c} & = & 0 \\ a_1 - \tilde{c} - 6a_2 + 18(a_3 - \tilde{c}) & = & 0 \\ a_1 - \tilde{c} + 6a_2 + 18(a_3 - \tilde{c}) & = & 0 \end{matrix}$   
 $\Rightarrow a_1 = \tilde{c} = a_3$  und  $a_2 = 0$

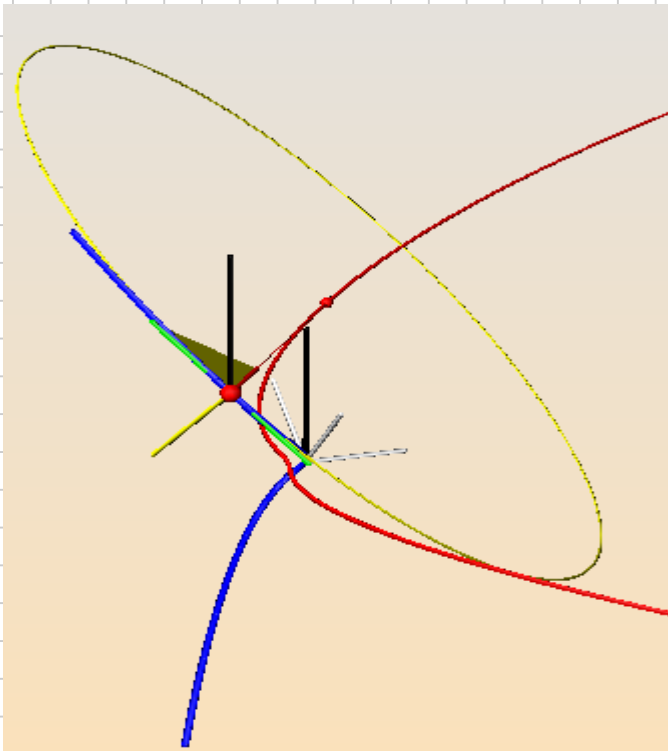
$\Rightarrow$  Böschungswinkel  $\cos \alpha = \frac{\dot{\vec{x}} \cdot \vec{a}}{|\dot{\vec{x}}| |\vec{a}|} = \frac{\tilde{c}(1+18t^2)}{(1+18t^2) \sqrt{\tilde{c}^2 + \tilde{c}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

( $c$  ist Böschungslinie zur Richtung  $\vec{a} = \tau \vec{t} + \kappa \vec{b} \Leftrightarrow \frac{\tau}{\kappa} = \cot \alpha = \text{const.}$ )

Figur zu T24.  
 mit Frenet-Dreibein  
 Schmiegeebene (gelb)  
 Krümmungskreis (gelb)  
 und Evolute (rot)



Figur zu T25 mit Bogenrichtung (schwarz)  
 Krümmungskreis (gelb) und Evolute (rot)



Kurve der Krümmung  
 Evolute: Kreismittelpunkte

$$\vec{m}(t) = \vec{x}(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \cdot \vec{n}(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} t \\ 4-3t^2 \\ 6t^3 \end{pmatrix} + \frac{(1+18t^2)^{3/2}}{6} \cdot \frac{1}{1+18t^2} \begin{pmatrix} -6t \\ 18t^2-1 \\ 6t \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -18t^3 \\ \frac{23}{6}-3t^2+54t^4 \\ t+24t^3 \end{pmatrix}}}$$

Param. darst.  
 der Evolute.