Geometrie LB    Hausaufgaben    Blatt 9

Notiztitel    24.11.2014

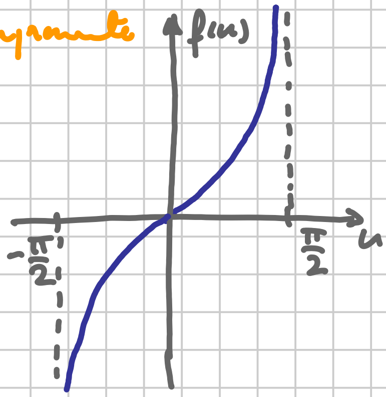
**H21.** $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t^3 \end{pmatrix}$ und $f: ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \to \mathbb{R},\ t = f(u) = \tan u$

$x \mapsto x^3$ ist injektiv!

a) $\vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3t_1^2 \\ 2t_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t_2^2 \\ 2t_2^3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow t_1^3 = t_2^3 \Leftrightarrow t_1 = t_2$ ✓

betrachte 2. Komponente

b) $f(u) = \tan u = \frac{\sin u}{\cos u}$  (Aus Graphik $\Rightarrow f$ bijektiv auf $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$)




Betrachte $f'(u) = \frac{1}{\cos^2 u}$

$\Rightarrow f'(u) \neq 0$ für alle $u \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$\Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend

$\Rightarrow f$ ist injektiv, da für $t_1 \underset{\neq}{<} t_2 \Rightarrow f(t_1) \underset{\neq}{<} f(t_2)$ ✓

$f$ ist surjektiv, da $\lim\limits_{x \to \pm\frac{\pi}{2}} f(u) = \pm\infty$ und $f$ stetig

$\overset{ZWS}{\Rightarrow}$ zu $t \in \mathbb{R}$ gibt mindestens ein $u \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: $f(u) = t$ ✓

c) Komposition $y := x \circ f : J \to \mathbb{R}^n;\ u \mapsto \vec{y}(u) = \vec{x}(f(u))$

„von rechts nach links": Zuerst wird $u \in J$ durch $f$ auf $t = f(u) \in I$ und dann $t = f(u)$ durch $x$ auf $\vec{y}(u) = \vec{x}(f(u)) \in \mathbb{R}^n$ abgebildet.

$$\underline{\dot{\vec{y}}(u)} := \frac{d}{du}\vec{y}(u) = \frac{d}{du}(\vec{x}(f(u))) = \begin{pmatrix} \frac{d}{du} x_1(f(u)) \\ \vdots \\ \frac{d}{du} x_n(f(u)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(f(u)) \cdot \dot{f}(u) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(f(u)) \cdot \dot{f}(u) \end{pmatrix} =$$

komponentenweise    Kettenregel!    „Nachdiff."

$$\frac{dx_i}{du} = \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{dt}{du} = \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{df}{du}$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{x}_1(f(u)) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(f(u)) \end{pmatrix} \cdot \dot{f}(u) = \underline{\dot{\vec{x}}(f(u)) \cdot \dot{f}(u)}$$

analog zur bekannten Kettenregel! $\frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Produktregel

$$\ddot{\vec{y}}(u) = \frac{d}{du}\dot{\vec{y}}(u) = \frac{d}{du}[\dot{\vec{x}}(f(u)) \cdot \dot{f}(u)] = \left(\frac{d}{du}\dot{\vec{x}}(f(u))\right) \cdot \dot{f}(u) + \dot{\vec{x}}(f(u)) \cdot \frac{d}{du}\dot{f}(u)$$

Kettenregel wie oben!

$$= \ddot{\vec{x}}(f(u)) \cdot (\dot{f}(u))^2 + \dot{\vec{x}}(f(u)) \cdot \ddot{f}(u)$$

$$\dddot{\vec y}(u) = \frac{d}{du}\ddot{\vec y}(u) = \frac{d}{du}\left[\ddot{\vec x}(f(u))\cdot(\dot f(u))^2 + \dot{\vec x}(f(u))\cdot \ddot f(u)\right] =$$

Produkt — Summe — Produkt

Kettenregel

$$= \dddot{\vec x}(f(u))\cdot(\dot f(u))^3 + \ddot{\vec x}(f(u))\cdot 2\cdot \dot f(u)\cdot \ddot f(u) + \ddot{\vec x}(f(u))\,\dot f(u)\cdot \ddot f(u) + \dot{\vec x}(f(u))\cdot \dddot f(u)$$

$$= \dddot{\vec x}(f(u))\cdot(\dot f(u))^3 + 3\cdot \ddot{\vec x}(f(u))\cdot \dot f(u)\,\ddot f(u) + \dot{\vec x}(f(u))\cdot \dddot f(u) \qquad (*)$$

Existieren die 3 ersten Ableitungen von $x$ und $f$ so auch von $y$?

d) Anwendung von c) Berechne Ableitungen von $\vec y(f(u))$ mit Hilfe der Ableitungen von $f$ und $\vec x(t)$ und Formel $(*)$:

$$f(u) = \tan u = \frac{\sin u}{\cos u} \Rightarrow \dot f(u) = \frac{1}{\cos^2 u} \Rightarrow \ddot f(u) = +2\frac{\sin u}{\cos^3 u} \Rightarrow$$

$$\dddot f(u) = \frac{2\cos^4 u + 6\sin u\cdot\cos^2 u\cdot \sin u}{\cos^6 u} = \frac{2\cos^2 u + 6\sin^2 u}{\cos^4 u} = \frac{2+4\sin^2 u}{\cos^4 u}$$

$$u = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,\ \dot f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2,\ \ddot f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4,\ \dddot f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 16$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt 2}$$

$$\vec x(t) = \begin{pmatrix}3t^2\\2t^3\end{pmatrix},\ \dot{\vec x}(t) = \begin{pmatrix}6t\\6t^2\end{pmatrix},\ \ddot{\vec x}(t) = \begin{pmatrix}6\\12t\end{pmatrix},\ \dddot{\vec x}(t) = \begin{pmatrix}0\\12\end{pmatrix}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \vec x(1) = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix},\ \dot{\vec x}(1) = \begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix},\ \ddot{\vec x}(1) = \begin{pmatrix}6\\12\end{pmatrix},\ \dddot{\vec x}(1) = \begin{pmatrix}0\\12\end{pmatrix}$$

$$(*) \Rightarrow \dddot{\vec y}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \dddot{\vec x}(1)\left(\dot f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^3 + 3\,\ddot{\vec x}(1)\cdot \dot f\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot \ddot f\left(\frac{\pi}{4}\right) + \dot{\vec x}(1)\cdot \dddot f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}0\\12\end{pmatrix}\cdot 8 + 3\cdot\begin{pmatrix}6\\12\end{pmatrix}\cdot 2\cdot 4 + \begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}\cdot 16 =$$

$$= 8\cdot\left[\begin{pmatrix}0\\12\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}18\\36\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}\right] = 8\cdot\begin{pmatrix}30\\60\end{pmatrix} = \underline{240\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}$$

Wer mag, darf als Hausaufgabe $\vec y(u) = \begin{pmatrix}3\tan^2 u\\2\tan^3 u\end{pmatrix}$ direkt 3 mal nach $u$ ableiten und dann $u = \frac{\pi}{4}$ einsetzen

$y$ ist als Komposition injektiver Abbildungen auch injektiv

$$\vec y(u_1) = \vec y(u_2) \Leftrightarrow \vec x(f(u_1)) = \vec x(f(u_2)) \underset{x\text{ ist injektiv}}{\Leftrightarrow} f(u_1) = f(u_2) \underset{f\text{ ist injektiv}}{\Leftrightarrow} u_1 = u_2$$

$\Rightarrow y = x\circ f$ ist injektiv.

**H22.** c: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cosh t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh t \end{pmatrix} \neq 0$ d.h. c ist regulär

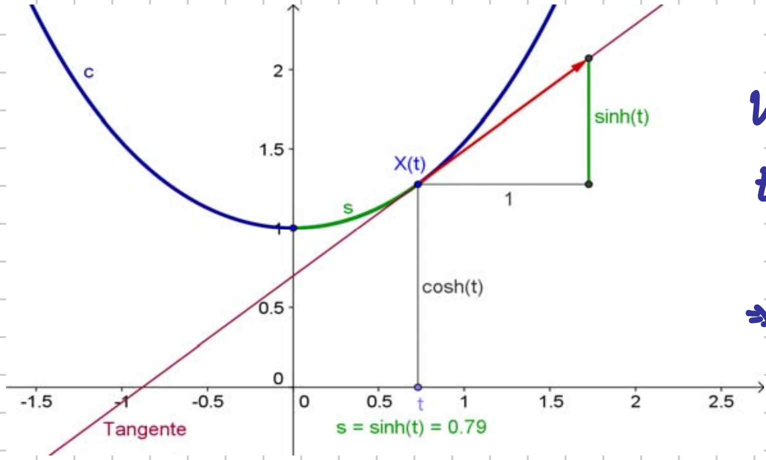
Hinweis!

$(\dot{\vec{x}}(t))^2 = 1 + \sinh^2 t = \cosh^2 t$ (*)

F.S. bzw. $\cosh^2 t - \sinh^2 t = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 = \frac{1}{4} \cdot 4 e^x e^{-x} = \underline{1}$

$\Rightarrow s = s(t) := \int_0^t \sqrt{(\dot{\vec{x}}(\tau))^2}\, d\tau = \int_0^t \cosh \tau \, d\tau = \sinh \tau \Big|_0^t = \underline{\underline{\sinh t}}$

vgl. Tangentensteigung!




Umkehrfunktion liefert

$t = t(s) = \operatorname{arsinh} s = \ln(s + \sqrt{s^2+1})$ F.S.

$\Rightarrow \vec{y}(s) = \vec{x}(t(s)) = \begin{pmatrix} \operatorname{arsinh} s \\ \cosh(\operatorname{arsinh} s) \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \underline{\underline{\begin{pmatrix} \operatorname{arsinh} s \\ \sqrt{1+s^2} \end{pmatrix}}}$ Bogenlängenparam.

---

**Zusatz:** Beispiel einer $C^\infty$-Funktion f, die an einer Stelle $x_0$ nicht $C^\omega$ (analytisch) ist, d.h. dort nicht in eine Potenzreihe (Taylorreihe) entwickelt werden kann, die in einer Umgebung von $x_0$ gegen die Funktion konvergiert.

$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow f^{(k)}(0) = 0$, $k \in \mathbb{N}_0$

$\lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$ , $\frac{1}{x^2} \to \infty$

$\Rightarrow$ Taylorreihe wäre: $T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = 0$ Nullfunktion $\neq f(x)$ in Umgebung von 0