T20 gegeben $\underline{Q}$: $x^2+2y^2+3z^2=12$, $z\geq 0$ (halbes Ellipsoid)

in kart. Koord. $\leftarrow$ (TR: $x=\frac{x_1}{x_0}$, $y=\frac{x_2}{x_0}$, $z=\frac{x_3}{x_0}$) $\rightarrow$ homo. Koord.

$$\underline{Q}:\ 12x_0^2-x_1^2-2x_2^2-3x_3^2=\vec{x}^T\underbrace{\begin{pmatrix}12&&&0\\&-1&&\\&&-2&\\0&&&-3\end{pmatrix}}_{\text{o.E. } =:M=M^T,\ \det M\neq 0}\vec{x}=0$$

Vorlesung

$P(\vec{p})$ und $R(\vec{r})$ zueinander polar bzgl. $\underline{Q}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{p}^TM\vec{r}=0$

$X(\vec{x})\in$ Polarebene zu $P(\vec{p})$ $\Leftrightarrow$ $\vec{p}^TM\vec{x}=0$. Es gilt:

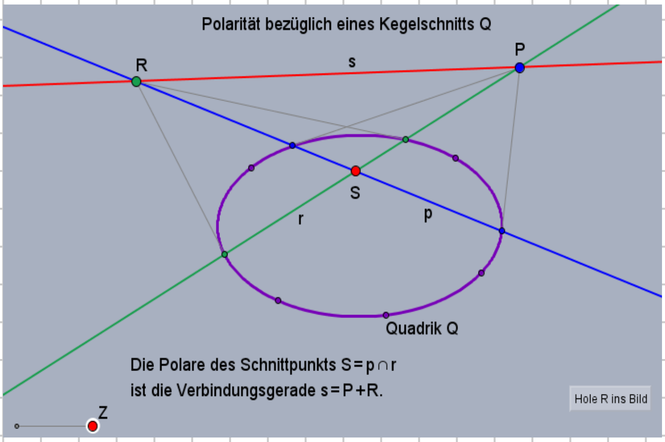
$R(\vec{r})\in$ Polarebene zu $P(\vec{p})$ $\Leftrightarrow$ $P(\vec{p})\in$ Polarebene zu $R(\vec{r})$

$$0=\vec{p}^TM\vec{r}=(\vec{p}^TM\vec{r})^T=\vec{r}^TM^T\vec{p}=\vec{r}^TM\vec{p}$$

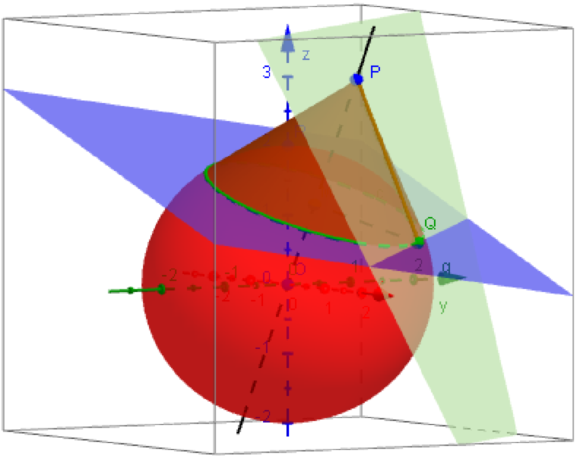
Für $R(\vec{r})\in\underline{Q}$ ist das die Tangentenebene von $\underline{Q}$ in R

$\Rightarrow$ $\underline{Q}\cap\vec{p}^TM\vec{x}=0$ ist Berührlinie des Tangentenkegels von P an $\underline{Q}$. Eigenschattengrenze

$\Rightarrow$ $X\in\underline{Q}$ ist von P aus beleuchtet $\Leftrightarrow$ X und P liegen auf derselben Seite der Polarebene von P bzgl. $\underline{Q}$.



vgl. T20-Pol-Polare.cdy



vgl. T20-3D-Polare zu Kugel.ggb

Polarebene zu $P(\vec{p})$ bzgl. $\underline{Q}$: in homog. Koord.

$$\vec{p}^TM\vec{x}=(1\ 3\ 2\ 7)\begin{pmatrix}12&&&0\\&-1&&\\&&-2&\\0&&&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=12x_0-3x_1-4x_2-21x_3=0$$

Rücktransf. $\Rightarrow$ $3x+4y+21z-12=0$ ⊙ in kart. Koord.

$A(0,0,2)$, $B(0,\sqrt{6},0)$, $C(2\sqrt{3},0,0)$ liegen auf $\underline{Q}$? Nachweis durch Einsetzen in $\underline{Q}$

Einsetzen der Koord. in die Gleichung ⊙ der Polarebene ⇒

$P: \; 3\cdot 3 + 4\cdot 2 + 21\cdot 7 - 12 = 152 > 0$
$A: \; 21\cdot 2 - 12 = 30 > 0$
} (*) P und A auf derselben ⇒ Seite der Polarebene ⇒ A beleuchtet

$B: \; 4\sqrt{6} - 12 \approx -2.2 < 0$
$C: \; 6\sqrt{3} - 12 \approx -1.6 < 0$
} (*) ⇒ P und B bzw. C liegen auf verschiedenen Seiten der Polarebene ⇒ B, C im Schatten.

(*) vgl. Hesse-Normalform einer Ebene $⊙/\sqrt{9+16+441} = ⊙/\sqrt{466}$
normierte Gleichung ⊙

liefert orientierten Abstand eines Punkte von der Ebene !

A, B, C auf der „Eigenschattengrenze" von $\underline{Q}$ bzgl. $\bar{P}(\vec{\bar{p}})$, wenn $\bar{P}$ im Schnittpunkt der Tangentenebenen von Q in A, B, C liegt:

in homog. Koord:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\0\\\sqrt{6}\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix}1\\2\sqrt{3}\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M = \begin{pmatrix}12 & & & 0\\ & -1 & & \\ & & -2 & \\ 0 & & & -3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a}^T M \vec{x} = 12x_0 - 6\underline{x_3} = 0 \\ \vec{b}^T M \vec{x} = 12x_0 - 2\sqrt{6}\,\underline{x_2} = 0 \\ \vec{c}^T M \vec{x} = 12x_0 - 2\sqrt{3}\,\underline{x_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{x} = x_0 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\sqrt{3}\\\sqrt{6}\\2\end{pmatrix} = \vec{\bar{p}} \Rightarrow \bar{P}(2\sqrt{3},\sqrt{6},2)$$

homo. Koord.   kart. Koord

alternativ $\bar{P}(\vec{\bar{p}})$ ist Pol der Ebene durch ABC bzgl. $\underline{Q}$

Ebenengl. von

$$ABC: \; 0 = \det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & x_0\\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} & x_1\\ 0 & \sqrt{6} & 0 & x_2\\ 2 & 0 & 0 & x_3\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}0 & 2\sqrt{3} & x_1\\ \sqrt{6} & 0 & x_2\\ 0 & 0 & x_3\end{pmatrix} - 2\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 1 & x_0\\ 0 & 2\sqrt{3} & x_1\\ \sqrt{6} & 0 & x_2\end{pmatrix} =$$

$$= -2\cdot 3\cdot\sqrt{2}\,x_3 - 2\cdot\left[2\sqrt{3}x_2 + \sqrt{6}\,x_1 - 2\cdot 3\cdot\sqrt{2}\,x_0\right] =$$

Pol $\bar{P}$

$$= \underline{12\sqrt{2}}\,x_0 \underline{-2\sqrt{6}}\,x_1 \underline{-4\sqrt{3}}\,x_2 \underline{-6\sqrt{2}}\,x_3 = \vec{\bar{p}}^T M \vec{x} = \vec{x}^T M\vec{\bar{p}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{M\vec{\bar{p}} = \begin{pmatrix}12\sqrt{2}\\-2\sqrt{6}\\-4\sqrt{3}\\-6\sqrt{2}\end{pmatrix}} \Leftrightarrow \underline{\vec{\bar{p}}} = M^{-1}\cdot\begin{pmatrix}12\sqrt{2}\\-2\sqrt{6}\\-4\sqrt{3}\\-6\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{12} & & & 0\\ & -1 & & \\ & & -\frac{1}{2} & \\ 0 & & & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12\sqrt{2}\\-2\sqrt{6}\\-4\sqrt{3}\\-6\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\2\sqrt{6}\\2\sqrt{3}\\2\sqrt{2}\end{pmatrix} = \sqrt{2}\underline{\underline{\begin{pmatrix}1\\2\sqrt{3}\\\sqrt{6}\\2\end{pmatrix}}}$$

T21 $\vec{s} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$. S schiefsym. Matrix mit $\underline{S\vec{x} = \vec{s} \times \vec{x}}$ **(0)**

erklärlich!

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix},\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{s} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} s_2x_3 - s_3x_2 \\ s_3x_1 - s_1x_3 \\ s_1x_2 - s_2x_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:S} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$S^T = \begin{pmatrix} 0 & s_3 & -s_2 \\ -s_3 & 0 & s_1 \\ s_2 & -s_1 & 0 \end{pmatrix} = \underline{-S} \Rightarrow S \text{ ist schiefsymmetrisch.}$$

a) Zeige $E-S$ ist regulär:

Bew 1: (algebraisch rechnerisch) $E-S$ regulär $\Leftrightarrow \det(E-S) \neq 0$

$$\underline{\det(E-S)} = \det\begin{pmatrix} 1 & s_3 & -s_2 \\ -s_3 & 1 & s_1 \\ s_2 & -s_1 & 1 \end{pmatrix} = 1 + s_1\cancel{s_2}s_3 - s_1\cancel{s_2}s_3 + s_2^2 + s_1^2 + s_3^2 =$$

$$= \underline{1 + |\vec{s}|^2} \geq 1 > 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Bew 2: (vektoriell) $E-S$ regulär $\Leftrightarrow [(E-S)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = 0]$

Sei $\vec{0} = (E-S)\vec{x} = E\vec{x} - S\vec{x} \overset{(0)}{=} \vec{x} - \vec{s} \times \vec{x} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{s} \times \vec{x}$ $(*)$

Andererseits gilt $\vec{x} \perp \vec{s} \times \vec{x} \overset{(*)}{\Longrightarrow} \vec{x} \perp \vec{x} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$ ✓

Bew 3: Variante zu Bew 2:

Sei $\vec{0} = (E-S)\vec{x} = E\vec{x} - S\vec{x} \overset{(0)}{=} \vec{x} - \vec{s} \times \vec{x} \quad | \circ \vec{x}$ (Skalarprod)

$$\Rightarrow 0 = \vec{x} \circ \vec{x} - \underbrace{(\vec{s} \times \vec{x}) \circ \vec{x}}_{=0} \Leftrightarrow \vec{x} \circ \vec{x} = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0} \ ✓$$

b) Zeige $U := (E-S)^{-1}(E+S)$ ist Drehmatrix, d.h. $UU^T = E$ ①, $\det U = 1$ ②

① $UU^T = (E-S)^{-1}(E+S)[(E-S)^{-1}(E+S)]^T =$ $\qquad (A \cdot B)^T = B^T A^T$

$$= (E-S)^{-1}(E+S)\underbrace{(E+S)^T}_{\shortparallel}\underbrace{((E-S)^{-1})^T}_{\shortparallel} \qquad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

NR

$$= (E-S)^{-1}(E+S)(E-S)(E+S)^{-1}$$

NR

$$= \underbrace{(E-S)^{-1}(E-S)}_{E} \cdot \underbrace{(E+S)(E+S)^{-1}}_{E} = E \cdot E = E \ ✓$$

NR: $(E+S)^T = \underset{E}{E^T} + \underset{-S}{S^T} = E - S$ und $(E-S)^T = \underset{E}{E^T} - \underset{-S}{S^T} = E + S$

NR: $(E+S)(E-S) = E \cdot E + \underbrace{S \cdot E}_{=E \cdot S} - \underbrace{E \cdot S}_{=S \cdot E} - S \cdot S = (E-S)(E+S)$

Determinantenmultiplikationssatz

(2) $\det(U) = \det[(E-S)^{-1}(E+S)] = \det[(E-S)^{-1}]\cdot\det(E+S)$

$$= \frac{1}{\det(E-S)}\cdot\det(E+S) \overset{\text{NR}}{\underset{\text{s.o.}}{=}} \frac{\det[(E-S)^T]}{\det(E-S)} = \frac{\det(E-S)}{\det(E-S)} = 1 \checkmark$$

$\det(A^T) = \det(A)$

alternativ mit (1)

$\det(E-S) = 1 + |\vec{s}|^2$ und $\det(E+S) = \det(E-(-S)) = 1+|-\vec{s}|^2 = 1+|\vec{s}|^2$

c) Drehachse ? gesucht $\vec{x} \in \mathbb{R}\setminus\{\vec{0}\}$ mit $U\vec{x} = \vec{x}$

$\Leftrightarrow (E-S)^{-1}(E+S)\vec{x} = \vec{x} \Leftrightarrow (E+S)\vec{x} = (E-S)\vec{x}$

$\Leftrightarrow S\vec{x} = -S\vec{x} \Leftrightarrow 2S\vec{x} = \vec{0} \overset{(0)}{\Leftrightarrow} \vec{s}\times\vec{x} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{x} = \lambda\vec{s}$ d.h. $\vec{s}$ ist (nichtorient.) Richtung der Drehachse!

Drehwinkel φ:

Da die Abbildung geometrisch definiert ist, also unabhängig vom Koord.system, dürfen wir das Koord.system so wählen, dass die z-Achse in Richtung von $\vec{s}$ zeigt, d.h. $\vec{s} = \begin{pmatrix}0\\0\\s\end{pmatrix}$, $s>0$

$$\Rightarrow E+S = \begin{pmatrix}1 & -s & 0\\ s & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad E-S = \begin{pmatrix}1 & s & 0\\ -s & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (E-S)^{-1} = \frac{1}{1+s^2}\begin{pmatrix}1 & -s & 0\\ s & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1+s^2\end{pmatrix}$$

Beachte: $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}\begin{pmatrix}\delta & -\beta\\ -\gamma & \alpha\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow U = (E-S)^{-1}(E+S) = \frac{1}{1+s^2}\begin{pmatrix}1 & -s & 0\\ s & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1+s^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -s & 0\\ s & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1+s^2}\begin{pmatrix}1-s^2 & -2s & 0\\ 2s & 1-s^2 & 0\\ 0 & 0 & 1+s^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\cos\varphi = \frac{1-s^2}{1+s^2}},\quad \underline{\sin\varphi = \frac{2s}{1+s^2}} \quad (*)$$

Drehmatrix um z-Achse

d.h. Der Betrag s von $\vec{s}$ liefert mit (*) den Drehwinkel φ!

(Unabhängig vom Koordinatensystem!)

alternativ $\cos\delta = \frac{\operatorname{spur} U - 1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3-s^2}{1+s^2} - 1\right) = \frac{1-s^2}{1+s^2}$

Zusatz: Man kann zeigen, dass $\tan\frac{\varphi}{2} = |\vec{s}|$ gilt:

Betrachte $\varphi = 2\tau$, so gilt

$\cos^2\tau + \sin^2\tau = 1$

$$\cos\varphi = \cos 2\tau = \cos^2\tau - \sin^2\tau = 2\cos^2\tau - 1 \overset{(*)}{=} \frac{1-s^2}{1+s^2}$$

$$\Rightarrow \cos^2\tau = \frac{1}{2}\left(\frac{1-s^2}{1+s^2} + 1\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1+s^2} = \frac{1}{1+s^2} \qquad (1)$$

$$\sin\varphi = \sin 2\tau = 2\sin\tau\cos\tau \overset{(*)}{=} \frac{2s}{1+s^2} \Rightarrow \sin\tau\cos\tau = \frac{s}{1+s^2} \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \tan\tau = \frac{\sin\tau}{\cos\tau} = \frac{\sin\tau\cos\tau}{\cos^2\tau} = s \quad \text{(Länge des Vektors } \vec{s}\text{)}$$

Grafik 2

$$\vec{s} = d\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \Rightarrow S = d\begin{pmatrix}0 & -3 & 2\\ 3 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

mit $S\vec{x} = \vec{s}\times\vec{x}$

$$U = (S-E)^{-1}(S+E) = \begin{pmatrix}-0.73 & -0.13 & 0.67\\ 0.67 & -0.33 & 0.67\\ 0.13 & 0.93 & 0.33\end{pmatrix}$$

U ist Drehmatrix

Probe: $U\cdot U^T = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ und $\det(U) = 1$

mit Drehachse a in Richtung $\vec{s}$ und Drehwinkel φ

$$\text{mit } \cos(\varphi) = \frac{1-(\vec{s})^2}{1+(\vec{s})^2} = \frac{1-14d^2}{1+14d^2} = -0.87$$

d = 1

$\varphi = 150.07°$

setze Winkel 60°

setze Winkel 90°

setze Winkel 120°