Geometrie LB Hausaufgaben Blatt 8

Notiztitel 24.11.2014

affine Koord. homogene Koord.

H18 a) $h:\ xy = \frac{1}{2} \overset{\left(x=\frac{x_1}{x_0},\ y=\frac{x_2}{x_0}\right)}{\Longleftrightarrow} h:\ \frac{x_1}{x_0}\cdot\frac{x_2}{x_0} = \frac{1}{2} \quad |\cdot 2x_0^2$

$\Rightarrow h:\ x_0^2 - 2x_1x_2 = 0$ bzw. $\vec{x}^T \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A \text{ mit } A^T = A} \vec{x} = 0$

(Kegelschnittsgleichung in P^2)

b) Ferngerade $x_0 = 0 \cap h \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \wedge x_1 \neq 0 \\ \text{oder} \\ x_1 = 0 \wedge x_2 \neq 0 \end{cases}$

$(x_0, x_1, x_2) \neq (0,0,0)$

$\Rightarrow \vec{h}_1 = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{h}_2 = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} H_1(0,1,0) \\ H_2(0,0,1) \end{cases}$

bis auf $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Dies sind die Fernpunkte der x- bzw y-Achse der eukl. Ebene

c) Nach Vorlesung gilt im Fall $\det(A) \neq 0$ (hier $\det A = -1$) für die

Tgte $\underline{g_1}$ in $H_1(\vec{h}_1)$: $\vec{h}_1^T A \vec{x} = 0 \Leftrightarrow (0\ 1\ 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (0\ 1\ 0)\begin{pmatrix} x_0 \\ -x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x_2 = 0 \Leftrightarrow \underline{x_2 = 0}$

Tgte $\underline{g_2}$ in $H_2(\vec{h}_2)$: $\vec{h}_2^T A \vec{x} = 0 \Leftrightarrow (0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$

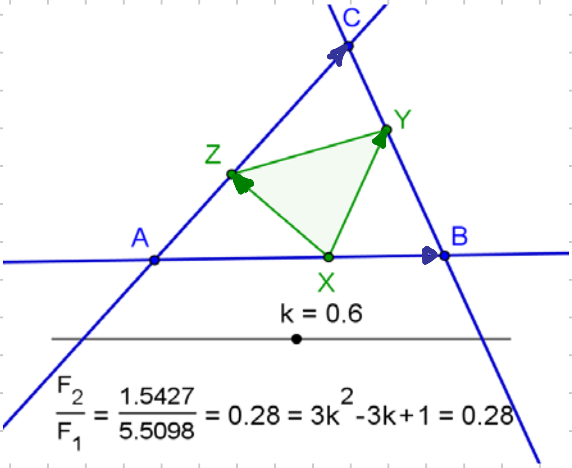
$\Leftrightarrow (0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} x_0 \\ -x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x_1 = 0 \Leftrightarrow \underline{x_1 = 0}$

Übergang zu eukl. Koordinaten $x = \frac{x_1}{x_0}$ und $y = \frac{x_2}{x_0}$ (o.E. $x_0 = 1$)

liefert $g_1:\ y = 0$ (x-Achse) und $g_2:\ x = 0$ (y-Achse)

<u>Bemerkung</u>: Allgemein gilt: Die Asymptoten einer Hyperbel sind die Tangenten der Hyperbel in den Fernpunkten der Hyperbel. Dieser Satz lässt sich unter Nutzung homogener Koordinaten ganz ohne Grenzbetrachtungen begründen, bei denen Koordinaten gegen ∞ gehen.

H19.



Betrachtung im $\mathbb{R}^3$, um Flächeninhalte einfach zu erhalten

$F_1 = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$ (1)

$F_2 = \frac{1}{2}|\vec{XY} \times \vec{XZ}|$ (2)

$\vec{AX} = k \cdot \vec{AB} \Rightarrow X$ auf Gerade AB

analog Y auf BC, Z auf CA.

Zum Vergleich von F_1 und F_2 möglichst $\vec{XY}$ und $\vec{XZ}$ durch $\vec{AB}$ und $\vec{AC}$ ausdrücken.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{XY} = \vec{XA} + \vec{AB} + \vec{BY} = -k\cdot\vec{AB} + \vec{AB} + k\cdot\vec{BC} = \\ \quad = (1-k)\vec{AB} + k\cdot(\vec{AC} - \vec{AB}) = (1-2k)\vec{AB} + k\vec{AC} \\ \vec{XZ} = \vec{XA} + \vec{AC} + \vec{CZ} = -k\cdot\vec{AB} + (1-k)\vec{AC}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\vec{XY} \times \vec{XZ} = [(1-2k)\vec{AB} + k\vec{AC}] \times [-k\vec{AB} + (1-k)\vec{AC}] =$$

$$= -(1-2k)k\underbrace{\vec{AB}\times\vec{AB}}_{=0} + (1-2k)(1-k)\vec{AB}\times\vec{AC} +$$

$$-k^2\underbrace{\vec{AC}\times\vec{AB}}_{=-\vec{AB}\times\vec{AC}} + k(1-k)\underbrace{\vec{AC}\times\vec{AC}}_{=0} =$$

$$= [1 - 3k + 2k^2 + k^2]\cdot\vec{AB}\times\vec{AC} \quad (3) \quad \Rightarrow$$

$$F_2 = \frac{1}{2}|\vec{XY}\times\vec{XZ}| = |3k^2 - 3k + 1|\cdot\frac{1}{2}\cdot|\vec{AB}\times\vec{AC}| = |3k^2-3k+1|\cdot F_1 \quad (4)$$

Wegen $3k^2 - 3k + 1 = 0 \Leftrightarrow k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-12}}{6} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

ist $3k^2 - 3k + 1 > 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}. \Rightarrow \underline{\frac{F_2}{F_1} = 3k^2 - 3k + 1}$

F_2/F_1 ist minimal für $k = \frac{1}{2}$ d.h. für das Seitenmittendreieck

H20. $\mathcal{U} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{U}\cdot\mathcal{U}^T = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{E}}$

$\det\mathcal{U} = \frac{1}{27}\cdot(8 + 8 - 1 + 4 + 4 + 4) = \underline{\underline{1}} \Rightarrow$ $\underline{\mathcal{U} \text{ ist Drehmatrix}}$

Drehachse $\vec{r}$: gesucht $\vec{x} \in \mathbb{R}\setminus\{\vec{0}\}$ mit $\mathcal{U}\vec{x} = \vec{x}$

$$\begin{aligned} 2x+2y+z&=3x \\ \Leftrightarrow\quad x-2y+2z&=3y \\ 2x-y-2z&=3z\end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} -x+2y+z&=0 \quad (1)\\ x-5y+2z&=0 \quad (2)\\ 2x-y-5z&=0 \quad (3)\end{aligned}$$

(o.E $z=1$)

$$(1)+(2) \Rightarrow -3y+3z=0 \Rightarrow y=z \overset{(1)}{\Rightarrow} x=3y=3z$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{11}}$$ ist Richtung der Drehachse

U besitzt sicher einen EV zum EW $\lambda=1$ $\Rightarrow$ (3) ist Lk von (1) ∧ (2)

Damit ist $\vec{r}$ normiert und durch die Wahl von $+\vec{r}$ orientiert

Drehwinkel δ?

1. Weg: Wähle $\vec{s} \perp \vec{r}$ z.B. $\vec{s} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$ o.E auf 1 normiert $\Downarrow$ $|\vec{s}\,'| = 1$

$$\Rightarrow \vec{s}\,' = U\vec{s} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2&2&1\\1&-2&2\\2&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$$

$$\cos\delta = \frac{\vec{s}\circ\vec{s}\,'}{|\vec{s}||\vec{s}\,'|} = \vec{s}^{\,T}\vec{s}\,' = \frac{1}{6}\cdot(0\ 1\ -1)\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix} = \frac{-5}{6}$$ bis auf Orientierung

2. Weg: $$\cos\delta = \frac{\operatorname{spur} U - 1}{2} = \frac{\frac{1}{3}(2-2-2)-1}{2} = \frac{-5}{6}$$

Vorzeichen von δ? $-\pi < \delta < \pi$

Ist $\{\vec{s}, \vec{s}\,', \vec{r}\}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem $\Rightarrow \delta > 0$

$$\det(\vec{s}, \vec{s}\,', \vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{11}}\det\begin{pmatrix}0&1&3\\1&-4&1\\-1&1&1\end{pmatrix} =$$ Faktoren ausklammern

$$= \frac{1}{6\sqrt{11}}\cdot(-1+3-12-1) = \frac{-11}{6\sqrt{11}} < 0 \Rightarrow \delta = -\underbrace{\arccos\left(-\tfrac{5}{6}\right)}_{\in[0,\pi]}$$

Ersetzt man $\vec{r}$ durch $-\vec{r}$, d.h. orientiert man die Drehachse um, so wird auch δ umorientiert, d.h. $\delta \to -\delta$

Grafik 2

$U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&1\\1&-2&2\\2&-1&-2\end{pmatrix}$ ist Drehmatrix denn

$U\cdot U^T = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ und $\det(U)=1$

mit Achse a in Richtung $\vec{r}$ mit $U\vec{r}=\vec{r}$

Bestimmung des Eigenvektors von U aus $(U-E)\,\vec{r} = 0$

Schnitt der Mittellotebenen zweier Punktepaare $(P, P' = UP)$ und $(Q, Q' = UQ)$

Achse $a: \vec{x} = \lambda\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$ und Drehwinkel φ

mit $\cos(\varphi) = \frac{\operatorname{spur}(U)-1}{2} = -0.83$

$\Rightarrow \varphi = 146.44°$

3D Grafik