Geometrie LB   Blatt 7   Hausaufgaben

Notiztitel   16.11.2014

H15. Gegeben Kegelschnitt $x = \frac{x_1}{x_0}$ in homogenen Koordinaten

a) $K:\ x^2 - 4xy + ay^2 + 2y = 1 \quad \longleftrightarrow \quad x_0^2 - 2x_0x_2 - x_1^2 + 4x_1x_2 - ax_2^2 = 0$

in affinen Koordinaten $y = \frac{x_2}{x_0}$

$$\vec{x}^T \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -a \end{pmatrix}}_{:= A} \vec{x} = 0 \qquad \text{o.E. mit } A^T = A$$

b) Quadratische Ergänzung:

$$\underbrace{x_0^2 - 2x_0x_2 + x_2^2}_{=(x_0-x_2)^2} - x_2^2 - (\underbrace{x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2}_{=(x_1-2x_2)^2}) + 4x_2^2 - ax_2^2 = 0$$

$$\underbrace{(x_0 - x_2)}_{=:y_0}{}^2 - (\underbrace{x_1 - 2x_2}_{=:y_1})^2 + (3-a)x_2^2 = 0$$

wähle z.B.   für $a < 3$: $y_2 := \sqrt{3-a}\, x_2$

$\Downarrow$ Transformation   für $a > 3$: $y_2 := \sqrt{a-3}\, x_2$!

Für $a<3$: $y_0^2 - y_1^2 + y_2^2 = 0$ $x' = \frac{y_1}{y_0}$ $x'^2 - y'^2 = 1$ Hyperbel (1)

Für $a=3$: $y_0^2 - y_1^2 = 0$ $\longleftrightarrow$ $x' = \pm 1$ Geradenpaar (2)

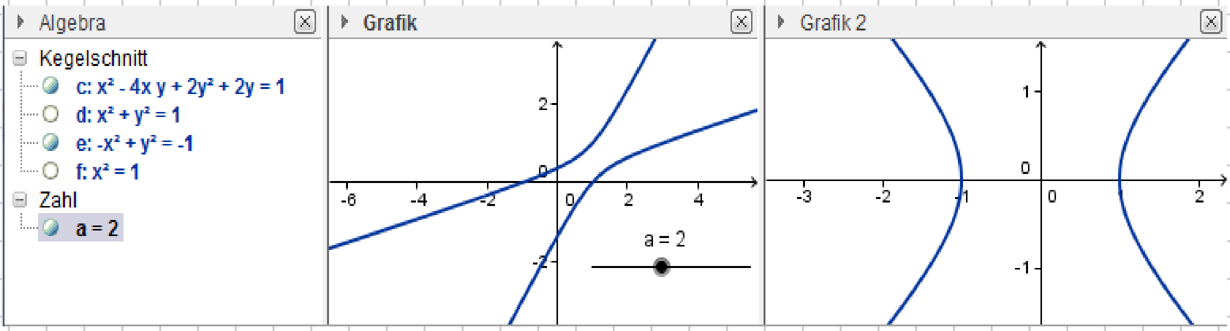
Für $a>3$: $y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 = 0$ $y' = \frac{y_2}{y_0}$ $x'^2 + y'^2 = 1$ Kreis (3)

Anmerkung: (1) und (2) haben die gleiche projektive NF: $u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 = 0$

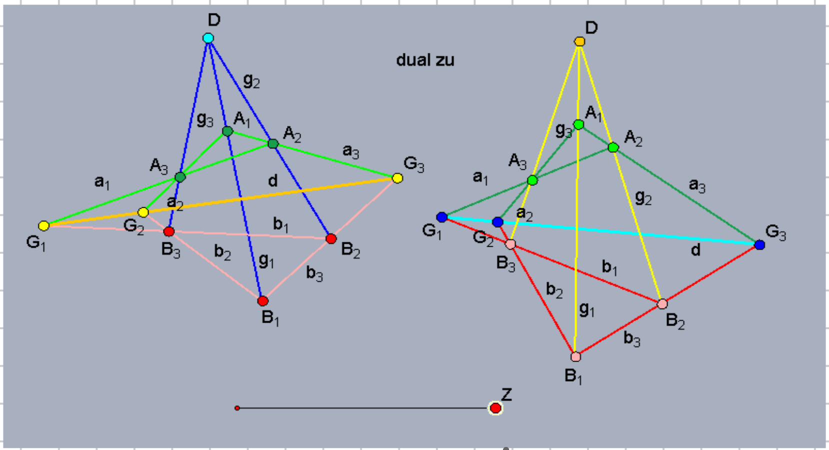
c) $a = 2$:

$$\begin{aligned} y_0 &= x_0 - x_2 \\ y_1 &= x_1 - 2x_2 \\ y_2 &= x_2 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} x_0 &= y_0 + y_2 \\ x_1 &= y_1 + 2y_2 \\ x_2 &= y_2 \end{aligned} \qquad \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:U} \vec{y}$$

$$U^TAU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



H16.



Punkt D auf Gerade g_i
dual $\Updownarrow$ zu
Gerade d durch Punkt G_i

Schnittpunkt $G_i = a_i \cap b_i$
dual $\Updownarrow$ zu
Verbindungsgerade $g_i := A_i + B_i$

Desargues in P^2 (projektiv):

Seien g_1, g_2, g_3 drei Geraden durch einen Punkt D (paarw. versch.)
Seien weiter A_i, B_i Punkte auf der Geraden g_i $(i = 1,2,3)$
Dann liegen die Schnittpunkte $a_j \cap b_j$ entsprechender Verbindungsgeraden $a_j = A_i + A_k$, $b_j = B_i + B_k$ $(i \neq j \neq k \neq i)$ auf einer Geraden d.

duale Aussage:

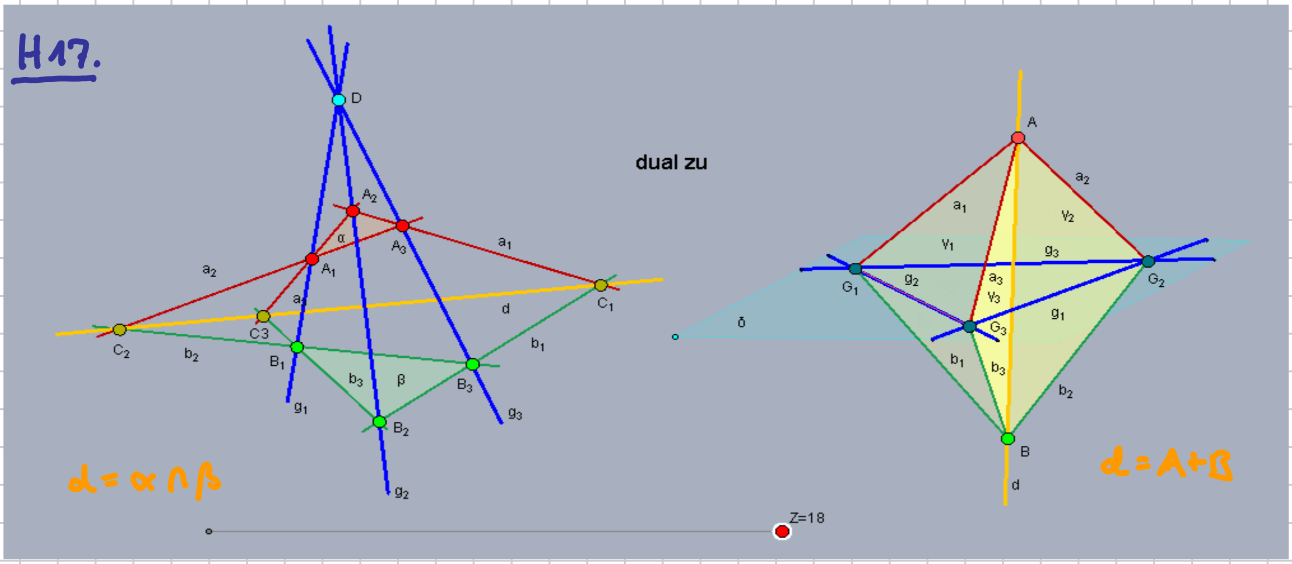
Seien G_1, G_2, G_3 drei Punkte auf einer Geraden d (paarw. versch.)
Seien weiter a_i, b_i Geraden durch den Punkt G_i $(i = 1,2,3)$
Dann gehen die Verbindungsgeraden $A_j + B_j$ entsprechender Schnittpunkte $A_j := a_i \cap a_k$, $B_j = b_i \cap b_k$ $(i \neq j \neq k \neq i)$ durch einen Punkt D.

b) Man erhält wieder die Figur zum Satz von Desargues aber in umgekehrter Reihenfolge! D.h. die duale Aussage ist eine Art Umkehrung.

c) Seien g_1, g_2, g_3 drei paarweise verschiedene Geraden in P^2, $A_i \neq B_i$ Punkte auf g_i und $A_i + A_k =: a_j$, $B_i + B_k =: b_k$ sowie $G_j = a_j \cap b_j$ $(1 \leq i,j,k \leq 3,\ i \neq j \neq k \neq i)$

Dann gilt:

Die Geraden g_1, g_2, g_3 gehen durch einen Punkt D genau dann, wenn die Punkte G_1, G_2, G_3 auf einer Geraden d liegen.



Punkt D $\leftrightarrow$ Ebene δ

Gerade g_i durch D $\leftrightarrow$ Gerade $g_i \subset \delta$

Punkt $A_i \in g_i$ $\leftrightarrow$ Ebene α_i durch g_i

Verbind. Ebene $\gamma_3 = g_1 + g_2$ $\leftrightarrow$ Schnitt-Punkt $G_3 = g_1 \cap g_2$

Verbind. Gerade $a_3 = A_1 + A_2$ $\leftrightarrow$ Schnitt-Gerade $a_3 = \alpha_1 \cap \alpha_2$

$\alpha = A_1 + A_2 + A_3,\ \beta = B_1 + B_2 + B_3$ $\leftrightarrow$ $A = \alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3,\ B = \beta_1 \cap \beta_2 \cap \beta_3$

Desargues in P^3

Seien g_1, g_2, g_3 drei paarweise verschiedene Geraden durch einen Punkt D, die nicht in einer Ebene liegen. (nicht komplanar)

A_i, B_i seien Punkte auf g_i $(i = 1, 2, 3)$. Dann liegen die drei Schnittpunkte

$$D_k = \underbrace{(A_i + A_j)}_{= a_k} \cap \underbrace{(B_i + B_j)}_{= b_k}$$

$(1 \le i, j, k \le 3,\ i, j, k$ paarweise verschieden$)$

entsprechender Verbindungsgeraden auf einer Geraden d.

Duale Aussage in P^3

Seien g_1, g_2, g_3 drei paarweise verschiedene Geraden, die in einer Ebene δ liegen, aber einander nicht schneiden (nicht kopunktal)

α_i, β_i seien Ebenen durch g_i $(i = 1, 2, 3)$. Dann schneiden sich die drei Verbindungsebenen

$$\delta_k = \underbrace{(\alpha_i \cap \alpha_j)}_{= a_k} + \underbrace{(\beta_i \cap \beta_j)}_{= b_k}$$

$(1 \le i, j, k \le 3,\ i, j, k$ paarweise verschieden$)$

entsprechender Verbindungsebenen in einer Geraden d