Geometrie LB Übungen Blatt 6

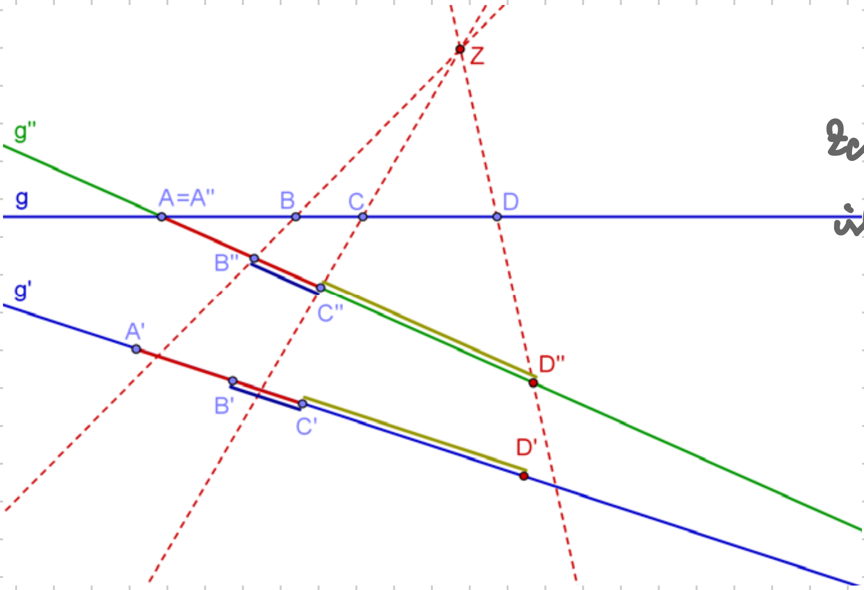
T14: <u>Konstruktive DV-Übertragung</u> (vgl. GeoGebra-Figuren zu T14)

Gegeben: 4 verschiedene Punkte $A, B, C, D \in g$ Gerade
und 3 verschiedene Punkte $A', B', C' \in g'$ Gerade

Gesucht: $D' \in g'$ so, dass $DV(A',B',C',D') = DV(A,B,C,D)$

$DV(A,B,C,D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \varepsilon$ mit $\varepsilon = \pm 1$ A,B trennt C,D oder nicht

$D \to$ Fernpunkt $\Rightarrow DV \to TV(A,B,C) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$



Zentralprojektion ist DV-treu!

Konstruktionsbeschreibung

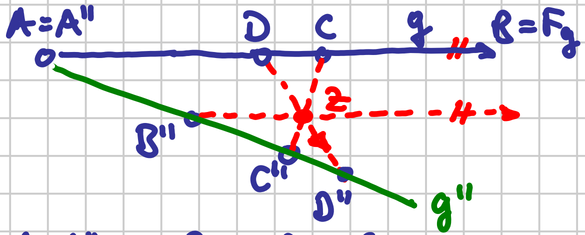
1) Wähle $g'' \neq g$ durch A und übertrage die (gerichteten) Strecken $\overrightarrow{A'C'}$ und $\overrightarrow{B'C'}$ von $A'' = A$ aus auf g''.
2) Ermittle $Z = B''B \cap C''C$ und $D'' = ZD \cap g''$, dann gilt: $DV(A'',B'',C'',D'') = DV(A,B,C,D)$, da A'', B'', C'', D'' nach Konstruktion Bilder von A,B,C,D unter der Zentralprojektion $\kappa_Z : g \to g'' = \kappa_Z(g)$ $Z \notin g, g''$ sind
3) Übertrage die (gerichtete) Strecke $\overrightarrow{C''D''}$ von C' aus auf g' $\Rightarrow D'$ mit $DV(A',B',C',D') = DV(A,B,C,D)$.

Diese Konstruktion ist in der projektiv abgeschlossenen euklidischen Ebene allgemeingültig. Wir betrachten einige Sonderfälle

1) $A \neq F_g$ (Fernpunkt von g)

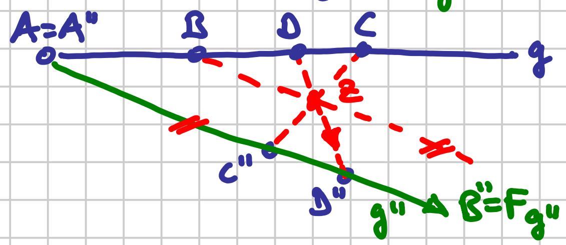
1.1) $B = F_g$ (oder $C = F_g$)

$\Rightarrow CC'' \parallel g \Rightarrow Z = B''B \cap C''C \ldots$ kein Fernpkt

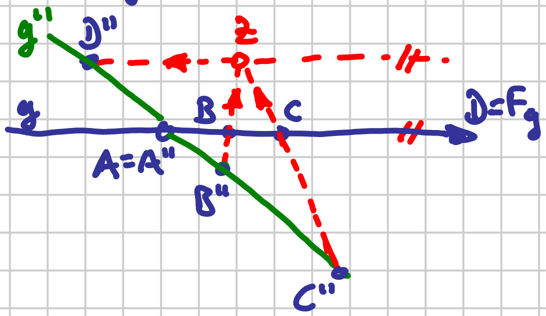


1.2) $B'' = F_{g''}$ (oder $C'' = F_{g''}$)

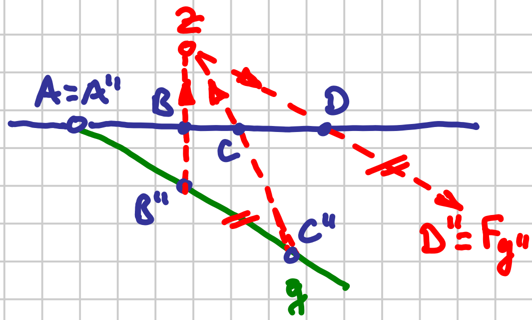
$\Rightarrow CC'' \parallel g'' \Rightarrow Z = B''B \cap C''C \ldots$ kein Fernpkt



1.3) $D = F_g$, Z kein Fernpkt

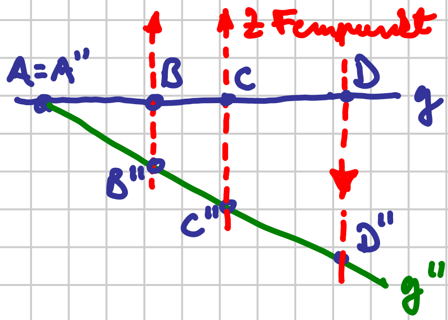


1.4) Z kein Fernpkt, $D'' = F_{g''}$



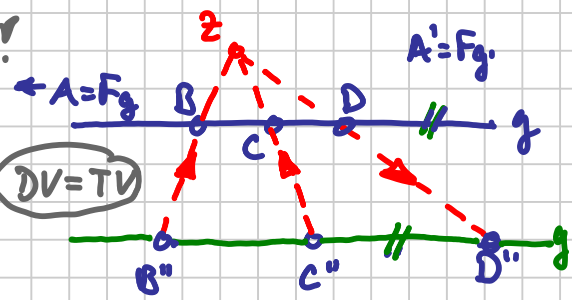
1.5) Ist Z ein Fernpunkt, dann ist κ_Z eine Parallelprojektion (DV-Übertrag ≙ zentr. Streck. aus A)

Ist $D = F_g \Rightarrow D'' = F_{g''} \Rightarrow D' = F_{g'}$



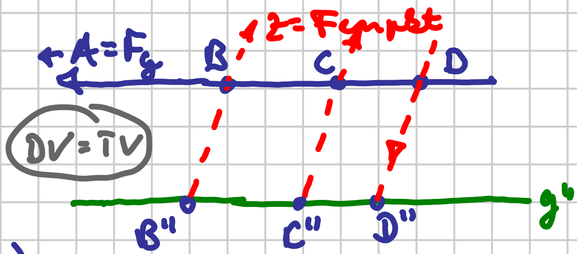
2) Ist $A = F_g$, so übertrage $DV(B,A,D,C) = DV(A,B,C,D)$ mit g'' durch $B = B''$ wie oben!

oder: wenn auch $A' = F_{g'}$, wähle B'' beliebig auf $g'' \parallel g$



2.1) Z eigentlich $\Rightarrow \kappa_Z$ ist eine zentrische Streckung aus Z

2.2) Z ist Fernpunkt $\neq F_g \Rightarrow$ κ_Z ist Parallelprojektion (DV-Übertrag durch Parallelogramm)



Einführung homogener Koordinaten im P^2: (vgl. Geogebra-Figuren zu T15)

Vorbem.: Im $\mathbb{R}^3$ gilt $\vec{a}^T \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

- Wir betrachten zwei Geraden des P^2 in:

affinen Koord. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	Transformation	homogenen Koord. $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
$a:\ a_1 x + a_2 y = -a_0$	$x = \frac{x_1}{x_0}$ $\longrightarrow$	$a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$
$b:\ b_1 x + b_2 y = -b_0$	$y = \frac{x_2}{x_0}$	$b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0$

Mit den homog. Geraden-Koord. $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ ergeben sich die homog. Punkt-Koord. $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ des Schnittpunkts

aus $\begin{matrix} \vec{a}^T \vec{x} = 0 \\ \vec{b}^T \vec{x} = 0 \end{matrix}$ wegen $\begin{matrix} \vec{a}^T \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \det(\vec{a}, \vec{a}, \vec{b}) = 0 \\ \vec{b}^T \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \det(\vec{b}, \vec{a}, \vec{b}) = 0 \end{matrix}$ als:

$$\vec{x} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ a_2 b_0 - a_0 b_2 \\ a_0 b_1 - a_1 b_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$$

oder ein ρ-faches davon mit $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Beachte: Für $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ fallen obige Geraden zusammen!

d.h. homog. Koord. sind nur bis auf einen Faktor $\neq 0$ bestimmt

Rücktransformation liefert für $x_0 \neq 0$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_0} \\ \frac{x_2}{x_0} \end{pmatrix}$ vgl. Cramersche Regel!

Für $x_0 = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ liegen die Geraden parallel, d.h. ihr Schnittpunkt ist ein Fernpunkt auf der Ferngeraden $x_0 = 0$.

In homog. Koord. kann man im P^2 ganz normal mit Fernpunkten wie mit eigentlichen Punkten rechnen.

T15. Umgekehrt erhält man die homog. Geraden Koord. $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ der Verbindungsgeraden g zweier Punkte P, Q mit den homog. Punkt Koord. $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \vec{q} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ aus dem Ansatz $\vec{u}^T \vec{x} = 0$

aus $\begin{matrix} \vec{u}^T \vec{p} = 0 \\ \vec{u}^T \vec{q} = 0 \end{matrix}$ wegen $\begin{matrix} (\vec{p} \times \vec{q})^T \vec{p} = \det(\vec{p}, \vec{q}, \vec{p}) = 0 \\ (\vec{p} \times \vec{q})^T \vec{q} = \det(\vec{p}, \vec{q}, \vec{q}) = 0 \end{matrix}$ als $\vec{u} = \vec{p} \times \vec{q} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$

oder ein ρ-faches davon mit $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. **Beachte:** Für $\vec{q} = \lambda \vec{p} \Rightarrow Q = P$

$\Rightarrow$ $\boxed{g:\ \vec{u}^T \vec{x} = 0 \ \text{ mit } \ \vec{u} = \rho \cdot (\vec{p} \times \vec{q})}$ Koord.gleichung von g

oder $\boxed{g:\ \vec{x} = \lambda \vec{p} + \mu \vec{q} \ \text{ mit } (\lambda, \mu) \neq (0,0)}$ Parametergl. von g.

wegen $(\vec{p}\times\vec{q})^T(\lambda\vec{p}+\mu\vec{q}) = \lambda(\vec{p}\times\vec{q})^T\vec{p}+\mu(\vec{p}\times\vec{q})^T\vec{q} = \lambda\det(\vec{p}\,\vec{q}\,\vec{p})+\mu(\vec{p}\,\vec{q}\,\vec{q}) = 0$

__Anmerkung:__ Verwendet man bei eigentlichen Punkten X, P, Q o.E. normierte homog. Koord. (d.h. $x_0 = p_0 = q_0 = 1$) und eliminiert aus der Parametergleichung die 1. Zeile $1 = \lambda + \mu$ und setzt $\mu = 1-\lambda$ so erhält man die affine Punkt/Richtungsform

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix}p_x\\p_y\end{pmatrix} + (1-\lambda)\begin{pmatrix}q_x\\q_y\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}q_x\\q_y\end{pmatrix}}_{\text{Aufpunkt}} + \lambda\underbrace{\left[\begin{pmatrix}p_x\\p_y\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}q_x\\q_y\end{pmatrix}\right]}_{\text{Richtung}}$$

Ist P ein Fernpunkt ($p_0 = 0$) und X und Q eigentliche Punkte o.E. mit normierten homog. Koord. ($x_0 = q_0 = 1$) $\overset{\text{1. Zeile}}{\Rightarrow}$ $1 = \mu$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}q_x\\q_y\end{pmatrix}}_{\text{Aufpunkt}} + \lambda\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}p_x\\p_y\end{pmatrix}}_{\text{Richtung des Fernpunkts } P\,!}$$

__Anmerkung:__ Die Bestimmung von Schnittpunkten zweier Geraden oder der Verbindungsgeraden zweier Punkte reduziert sich im P^2 unter Verwendung homog. Koord. auf die __Berechnung von Vektorprodukten__ ohne Fallunterscheidung ob Geraden (fast) parallel liegen oder Punkte Fernpunkte sind. Dies wird in __DGS-Programmen__ verwendet.

__Anmerkung:__ Im P^3 liefert der Übergang zu homogenen Koordinaten Vektoren des $\mathbb{R}^4\setminus\{\vec{0}\}$ und für Ebenen

$$\begin{array}{ccc} \text{affine Koord} & \text{Transformation} & \text{homogene Koord} \\ \varepsilon:\ a_1x + a_2y + a_3z = -a_0 & \xrightarrow[x=\frac{x_1}{x_0},\ y=\frac{x_2}{x_0},\ z=\frac{x_3}{x_0}]{} & a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ & & \boxed{\varepsilon:\ \vec{a}^T\vec{x} = 0} \end{array}$$

wobei (wieder) die homog. Punktkoord $\vec{x}$ wie auch die homog. Ebenenkoord. $\vec{a}$ nur bis auf einen Faktor $\neq$ Null bestimmt sind.

Die Verb.gerade g zweier Punkte P und Q mit den homog. Koord $\vec{p}, \vec{q}$ hat die Parametergl. $\boxed{g:\ \vec{x} = \lambda\vec{p} + \mu\vec{q} \quad \text{mit } (\lambda,\mu) \neq (0,0)}$

(Für eigentl. Punkte o.E. mit normierten homog. Koord. erhält man wegen $1 = \lambda + \mu$ $\Rightarrow \mu = 1-\lambda$ die bekannte Punkt-Richtungsform $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}q_x\\q_y\\q_z\end{pmatrix} + \lambda\cdot\left[\begin{pmatrix}p_x\\p_y\\p_z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}q_x\\q_y\\q_z\end{pmatrix}\right]$)

T16: gegeben: Ebene ε : $\vec{u}^T \vec{x} = 0$, $\vec{u} \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ (vgl. T15; Nullvektor)

Punkt $Z(\vec{z}) \notin \varepsilon$, d.h. $\vec{u}^T \vec{z} \neq 0$.

gesucht: Bildpunkt $Y(\vec{y})$ zu $X(\vec{x}) \in P^3 \setminus \{Z\}$ bei Zentralprojektion aus Z auf ε, d.h. der Schnittpunkt $Y(\vec{y}) = ZX \wedge \varepsilon$.

Sei $X(\vec{x}) \in P^3 \setminus \{Z\}$ ⇒ Parametergleichung der Geraden (vgl. T15)

$g := ZX$: $\vec{y} = s \cdot \vec{x} + t \cdot \vec{z}$ ⇒ Schnittbedingung mit ε

$0 = \vec{u}^T \vec{y} = \vec{u}^T (s \cdot \vec{x} + t \cdot \vec{z}) = s \cdot \underbrace{\vec{u}^T \vec{x}} + t \cdot \underbrace{\vec{u}^T \vec{z}}$

Wähle $(s, t) = (\vec{u}^T \vec{z}, -\vec{u}^T \vec{x})$ skalare Größen $\in \mathbb{R}$!

oder als Vielfaches $\neq 0$ davon

$$\Rightarrow \quad \vec{y} = (\vec{u}^T \vec{z}) \cdot \vec{x} - (\vec{u}^T \vec{x}) \cdot \vec{z} = (\vec{u}^T \cdot \vec{z})\,\vec{x} - \underbrace{\vec{z} \cdot (\vec{u}^T \cdot \vec{x})}$$

Alle Multiplikationen im 2. Summanden kann man als Matrizenmultiplikationen interpretieren, d.h. mit dem Assoziativgesetz gilt: $\vec{z} \cdot (\vec{u}^T \cdot \vec{x}) = (\vec{z} \cdot \vec{u}^T) \cdot \vec{x}$

$(n=4)$

$$\underbrace{(n,1)\text{-Matrix} \cdot \overbrace{(1,n)\text{-Matrix} \cdot (n,1)\text{-Matrix}}^{(1,1)\text{-Matrix}}}_{(n,n)\text{-Matrix}} = (n,1)\text{-Matrix}$$

Mit Einheitsmatrix E gilt: $\vec{x} = E \cdot \vec{x}$.

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\vec{y}}} = (\vec{u}^T \vec{z}) \cdot E \cdot \vec{x} - (\vec{z} \cdot \vec{u}^T) \cdot \vec{x} = \underline{\underline{[(\vec{u}^T \vec{z}) \cdot E - (\vec{z}\,\vec{u}^T)]\,\vec{x}}}$$

Damit ist $\underline{A = (\vec{u}^T \vec{z}) \cdot E - (\vec{z}\,\vec{u}^T)}$ und $\underline{\vec{y} = A \cdot \vec{x}}$

b) $A\vec{z} = [(\vec{u}^T \vec{z}) \cdot E - (\vec{z}\,\vec{u}^T)]\,\vec{z} = (\vec{u}^T \vec{z}) \cdot \vec{z} - \underbrace{(\vec{z}\,\vec{u}^T) \cdot \vec{z}} =$

$= (\vec{u}^T \vec{z}) \cdot \vec{z} - \vec{z}\,\underbrace{(\vec{u}^T \vec{z})} = \underline{\underline{0}}$ Matrizenprod. wie oben

⇒ Z hat kein Bild !, vgl. $X \in P^3 \setminus \{Z\}$ in a)

c) $A\vec{x} = [(\vec{u}^T \vec{z}) \cdot E - (\vec{z}\,\vec{u}^T)]\,\vec{x} = (\vec{u}^T \vec{z}) \cdot \vec{x} - \underbrace{(\vec{z}\,\vec{u}^T) \cdot \vec{x}} =$

$= (\vec{u}^T \vec{z}) \cdot \vec{x} - \underbrace{\vec{z} \cdot (\vec{u}^T \vec{x})} = \underbrace{(\vec{u}^T \vec{z})} \cdot \vec{x}$

Für $X \in \varepsilon$: $\vec{u}^T \vec{x} = 0$; $\vec{u}^T \vec{z} \neq 0$ da $Z \notin \varepsilon$.

⇒ Bild von $X \in \varepsilon$ ist X, d.h. ε ist eine Fixpunktebene