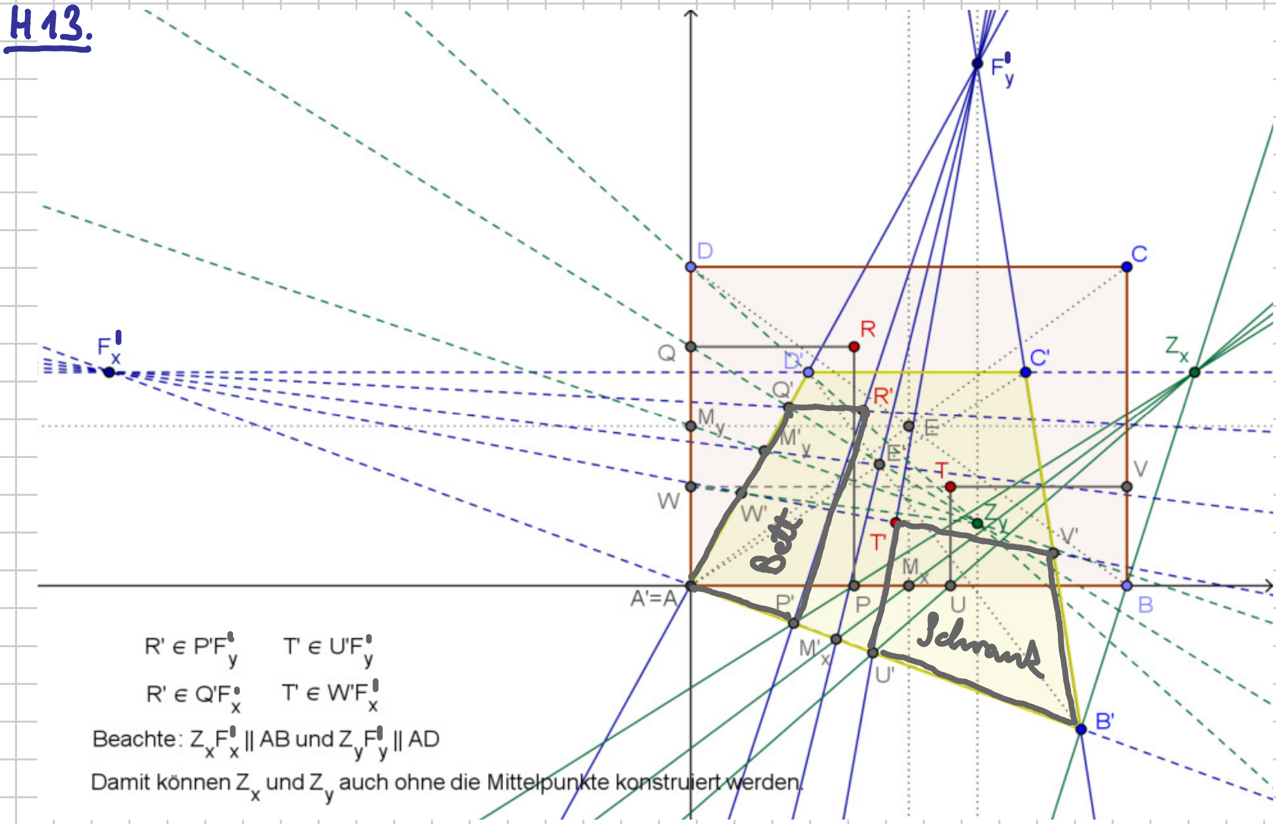
# Geometrie LB  Blatt 6  Hausaufgaben
Notiztitel 08.11.2014

**H13.**




a) Konstruktionsbeschreibung:

1) Bilder der zur y-Achse parallelen Geraden schneiden einander in $F_y' = A'D' \cap B'C'$, (Fluchtpkt der Geraden $\parallel$ y-Achse)
Bilder der zur x-Achse parallelen Geraden schneiden einander in $F_x = A'B' \cap C'D'$. (Fluchtpkt der Geraden $\parallel$ x-Achse)

2) Das Bild des Diagonalenschnittpunkt $E = AC \cap BD$ des Rechtecks ABCD ist der Diagonalenschnittpunkt $E' = A'B' \cap B'D'$ des Bildvierecks $A'B'C'D'$

3) Die Seitenmitten $M_x, M_y$ liegen auf den Seiten $AB$, $AD$ und es gilt $M_xE \parallel$ y-Achse, $M_yE \parallel$ x-Achse
$\Rightarrow M_x' = F_y'E' \cap A'B'$ und $M_y' = F_x'E' \cap C'D'$.

b) Konstruktionsbeschreibung:

1) $Z_x = BB' \cap M_x M_x'$ ist das Zentrum für die DV-Übertragung $\kappa_{Z_x}$ von $AB$ auf $A'B'$ mit $A = A'$

$$\Rightarrow \begin{cases} P' = Z_x P \cap A'B' \text{ und } R' \in F_y' P' \ (1), \text{ da } RP \parallel y\text{-Achse} \\ U' = Z_x U \cap A'B' \text{ und } T' \in F_y' U' \ (2), \text{ da } TU \parallel y\text{-Achse} \end{cases}$$

analog:

2) $Z_y = DD' \cap M_y M_y'$ ist das Zentrum für die DV-Übertragung $\kappa_{Z_y}$ von $AD$ auf $A'D'$ mit $A = A'$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q' = Z_y Q \cap A'D' \text{ und } R' \in F_x' Q' \ (3), \text{ da } QR \parallel x\text{-Achse} \\ \text{mit } W = TV \cap AD \\ W' = Z_y W \cap A'D' \text{ und } T' \in F_x' W' \ (4), \text{ da } TV \parallel x\text{-Achse} \end{cases}$$

$(1) \wedge (3) \Rightarrow R' = F_y'P' \cap F_x'Q'$ und $(2) \wedge (4) \Rightarrow T' = F_y'U' \cap F_x'W'$

<u>Anmerkung:</u>

$\kappa_{Z_x}$ bildet Fernpunkt $F_{AB}$ der geraden $AB$ auf

$F_x' = \underbrace{Z_x F_{AB}}_{\parallel AB \text{ durch } Z_x} \cap A'B'$ ab $\Rightarrow Z_x F_x' \parallel AB = x\text{-Achse}$

<u>hier:</u> $Z_x F_x' = C'D'$ da $C'D' \parallel x$-Achse

$\Rightarrow Z_x \in C'D'$ ?! vorgegeben ?

$\Rightarrow$ alternative Konstruktion von $Z_x$ (ohne $M_x$ und $M_x'$ ?!)

$Z_x = BB' \cap h_{F_x}$ mit Parallelen $h_{F_x}$ zur x-Achse durch $F_x'$.

<u>analog:</u>

$\kappa_{Z_y}$ bildet Fernpunkt $F_{AD}$ der Geraden $AD$ auf

$F_y' = Z_y F_{AD} \cap A'D'$ ab $\Rightarrow Z_y F_y' \parallel AD = y$-Achse

$\Rightarrow$ alternative Konstruktion von $Z_y$ (ohne $M_y$ und $M_y'$ ?!)

$Z_y = DD' \cap h_{F_y}$ mit Parallelen $h_{F_y}$ zur y-Achse durch $F_y'$.

**H14.** $\vec a = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec b = \begin{pmatrix}\underline{0}\\1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec c = \begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec z = \begin{pmatrix}\underline{0}\\1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\vec x = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

Punkte $A(\vec a)$, $C(\vec c)$, $X(\vec x)$ eigentlich; $B(\vec b)$, $Z(\vec z)$ Fernpunkte

a) $\varepsilon = ABC: \ \vec u^T \vec x = 0 \Leftrightarrow \vec x^T \vec u = 0$ mit $\vec u \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$

$$\left.\begin{array}{l} A \in \varepsilon \Leftrightarrow \vec a^T \vec u = 0 \\ B \in \varepsilon \Leftrightarrow \vec b^T \vec u = 0 \\ C \in \varepsilon \Leftrightarrow \vec c^T \vec u = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&1\\1&0&2&1\end{pmatrix} \vec u = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&1\\0&-2&2&0\end{pmatrix} \vec u = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&1\\0&0&6&2\end{pmatrix} \vec u = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{\vec u = \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-3\end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}}$$

homogenisierender Faktor

wähle z.B. $u_2 = \lambda$

**alternativ:** $\varepsilon = ABC: \ \vec x = \lambda \vec a + \mu \vec b + \nu \cdot \vec c$, $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$, $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 \neq 0$

d.h. $\vec x \neq \vec 0$ !

$\Rightarrow$ Gleichung von $\varepsilon$: $\det(\vec a, \vec b, \vec c, \vec x) = 0$

$$\det\begin{pmatrix}1&0&1&x_0\\2&1&0&x_1\\0&2&2&x_2\\1&1&1&x_3\end{pmatrix} = 1 \cdot \det\begin{pmatrix}1&0&x_1\\2&2&x_2\\1&1&x_3\end{pmatrix} + 1 \cdot \det\begin{pmatrix}2&1&x_1\\0&2&x_2\\1&1&x_3\end{pmatrix} + (-1) \cdot x_0 \cdot \det\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&2\\1&1&1\end{pmatrix}$$

Entwicklung nach 1. Zeile

$$= 2x_3 + \cancel{2x_1} - \cancel{2x_1} - \cancel{x_2} + 4x_3 + \cancel{x_2} - 2x_1 - 2x_2 - x_0 \cdot (4 + 2 - 4) =$$

$$= -2x_0 - 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0 \ |:-2 \Leftrightarrow x_0 + x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$$ vgl. oben

homog. Faktor

b) $Z \notin \varepsilon \Leftrightarrow \vec u^T \vec z \neq 0 \Leftrightarrow (1\ 1\ 1\ -3)\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix} = 3 \neq 0$

c) Nach T16: $\vec y = M\vec x$ mit:

$$M = (\underbrace{\vec u^T \vec z}_{\text{aus b)}}) \cdot E - (\vec z\, \vec u^T) = 3 \cdot \begin{pmatrix}1&&&0\\&1&&\\&&1&\\0&&&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix}(1\ 1\ 1\ -3)$$

$$= \begin{pmatrix}3&&&0\\&3&&\\&&3&\\0&&&3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&1&-3\\2&2&2&-6\\0&0&0&0\end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}3&0&0&0\\-1&2&-1&3\\-2&-2&1&6\\0&0&0&3\end{pmatrix}}$$

d) $\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}}$

<u>Probe:</u> $\vec{u}^T \vec{y} = (1\ 1\ 1\ {-3}) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 3+2+4-9 = 0 \Rightarrow Y(\vec{y}) \in \mathcal{E}$

$\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \vec{x} + 2 \cdot \vec{z} \Rightarrow Y \in XZ$

$\Rightarrow Y = XZ \cap \mathcal{E}$

Faktoren geeignet gewählt!

<u>Probe:</u> $M\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Bild von A ist A!

homogenisierender Faktor

Z = Fernpunkt $\Rightarrow$ Zentralproj. ist Parallelproj. in Richtung $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$