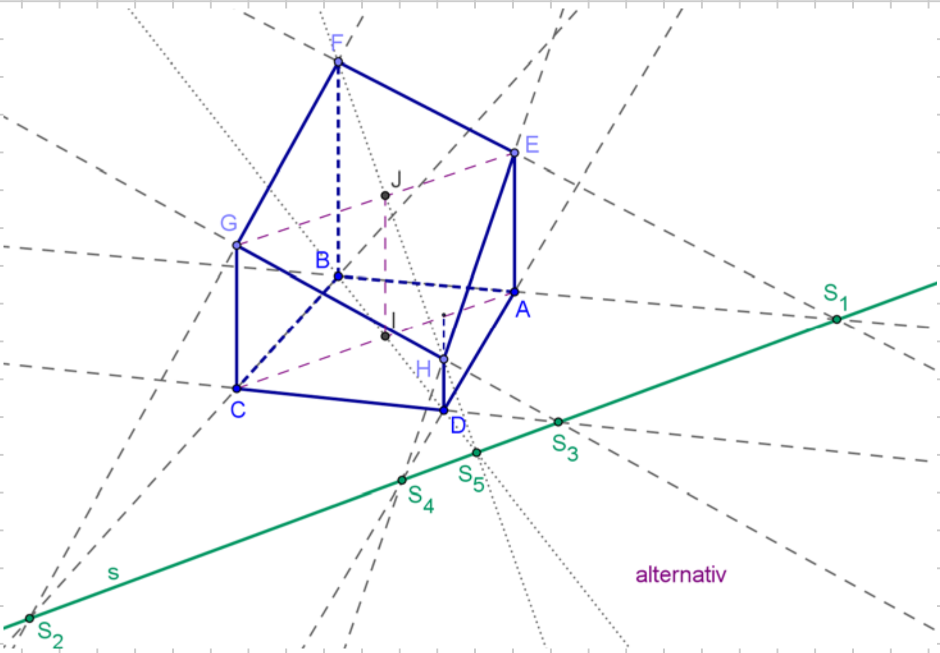
Geometrie LB   Blatt 5   Hausaufgaben

Notiztitel   08.11.2014

H10.



Inzidenzen:

unten / oben

$D \in \varepsilon_1 := ABC$

$H \in \varepsilon_2 := EFG$

hinten / links
vorne / rechts

$E \in \delta_1 := ABF$

$G \in \delta_2 := CBF$

$H \in \delta_3 := CDG$

$H \in \delta_4 := ADE$

In Ebene δ_1 gilt: $\boxed{S_1 = AB \cap EF} \in \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$, da $S_1 \in AB \subset \varepsilon_1$, $S_1 \in EF \subset \varepsilon_2$

In Ebene δ_2 gilt: $\boxed{S_2 = BC \cap FG} \in \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$, da $S_2 \in BC \subset \varepsilon_1$, $S_2 \in FG \subset \varepsilon_2$

$\Rightarrow \boxed{S_1 S_2 = \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 =: s}$

Annahme H ist bekannt, dann gilt

in Ebene δ_3 analog: $S_3 = CD \cap GH \in \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = s$ bzw.

in Ebene δ_4 analog: $S_4 = AD \cap EH \in \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = s$

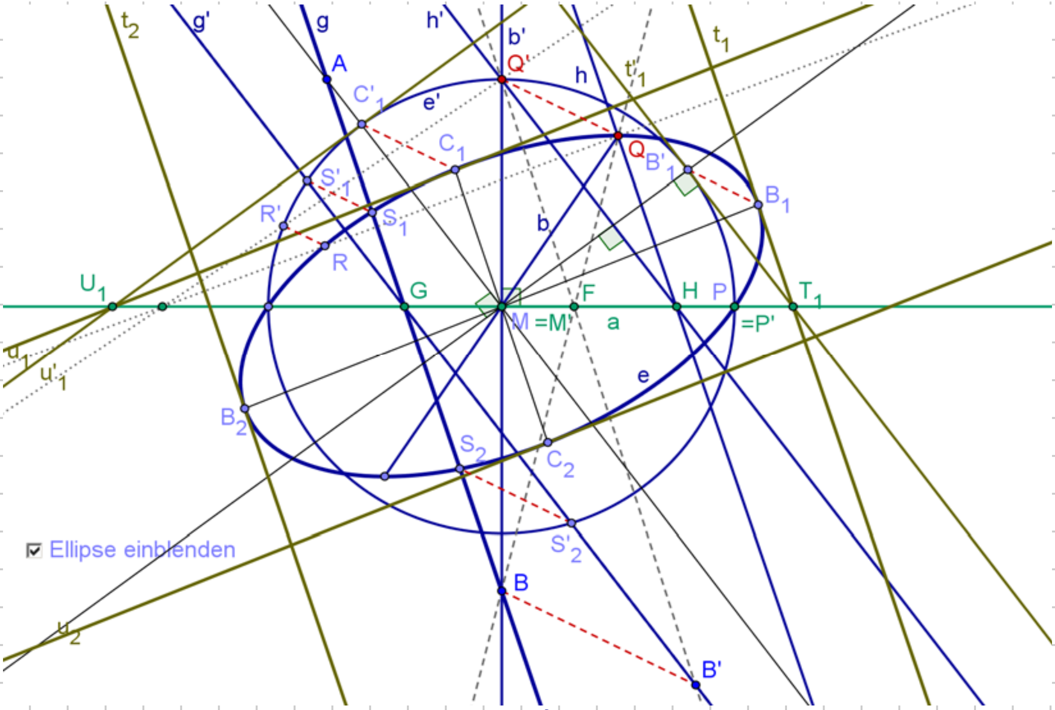
d.h. $\boxed{S_3 = CD \cap s}$ bzw. $\boxed{S_4 = AD \cap s}$

Mit Parallelen l zu AE durch D erhält man

$\boxed{H = l \cap GS_3}$ bzw. $\boxed{H = l \cap ES_4}$ (zur Zeichenkontrolle)

Alternativ kann man obige Konstruktion als perspektive Affinität deuten mit Affinitätsachse a und Punkt-Bildpunktpaar (A, E) und damit das Bild J der Diag.schnittpunkt I bestimmen.

H11.



1) Wähle $P'=P$, $M'=M$, $e'=k(M';P')$, b' mit $M'\in b'\perp a$ und $Q'\in b'\cap e'$.

Unter der Affinität φ mit Affinitätsachse $a = MP = M'P'$

und Punkt-Bildpunktpaar (Q,Q') ist e dann affines

Kreisbild von $e'=\varphi(e)$, d.h. $e=\varphi^{-1}(e')$.

a) • Bestimme Gerade $g'=\varphi(g)$ durch $G'=G=g\cap a$

z.B. mit B' ($F=BQ\cap a \Rightarrow B'Q'=Q'F$ und $BB'\parallel QQ'$ durch B)

oder mit Hilfe der Parallelen h zu g durch Q

$\Rightarrow$ $h'=\varphi(h)=Q'H'$ mit $H'=H=h\cap a$

$\Rightarrow$ $g'=$ Parallele zu h' durch G'

↑ Bilder paralleler Geraden sind parallele Geraden!

• Konstruiere $\{S'_1, S'_2\}=g'\cap e'$

• Bestimme Urbilder $\{S_1, S_2\}\in g$ mit Hilfe der Affinitätsstrahlen $\parallel QQ'$ durch S'_1 bzw S'_2.

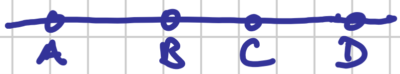
b) • t_1, t_2 sind Urbilder der Kreistangenten $t'_1, t'_2 \parallel g' \parallel h'$

$\Rightarrow B'_{1,2}$ auf Lot zu h' bzw. g'.

Urbild t_1 von t'_1 mit Hilfe Fixpunkt $T_1=T'_1=t'_1\cap a$

Urbild B_1 von B'_1 auf t_1 mit Hilfe des Affinitätsstrahls durch B_1'. t_2 und B_2 über Punktspiegelung an M!

c) $M'C_1' \perp M'B_1'$ mit $C_1' \in e'$ $\Rightarrow$ C_1 z.B. mit Hilfe der Tangente u_1' in C_1' an e' und deren Urbild u_1 vgl. Konstr. von t_1.

H12. 

$$DV(A,B,C,D) := \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \varepsilon$$

mit $\varepsilon = \left\{ \begin{matrix} +1 \\ -1 \end{matrix} \right\}$, wenn das Paar (A,B) das Paar (C,D) $\left\{ \begin{matrix} \text{nicht} \\ - \end{matrix} \right\}$ trennt

nach Vorlesung bzw. Angabe

Sei $\delta := DV(A,B,C,D) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1)\ DV(A,B,D,C) = \frac{1}{\delta} \\ (2)\ DV(A,C,B,D) = 1-\delta \\ (3)\ DV(B,A,C,D) = \frac{1}{\delta} \\ (4)\ DV(B,A,D,C) = \delta \end{array} \right\} \Rightarrow$

4!=24 Möglichkeiten

lexikographisch

(1) $DV(B,A,D,C) \overset{(4)}{=} DV(A,B,C,D) = \delta$

(2) $DV(B,A,C,D) \overset{(4)}{=} DV(A,B,D,C) \overset{(1)}{=} \frac{1}{\delta}$

(3) $DV(C,A,D,B) \overset{(4)}{=} DV(A,C,B,D) \overset{(2)}{=} 1-\delta$

(4) $DV(C,A,B,D) \overset{(4)}{=} DV(A,C,D,B) \overset{(1)}{=} \frac{1}{DV(A,C,B,D)} \overset{(3)}{=} \frac{1}{1-\delta}$

(5) $DV(D,A,B,C) \overset{(4)}{=} DV(A,D,C,B) \overset{(2)}{=} 1 - DV(A,C,D,B) \overset{(4)}{=} 1 - \frac{1}{1-\delta} = \frac{\delta}{\delta-1}$

(6) $DV(D,A,C,B) \overset{(4)}{=} DV(A,D,B,C) \overset{(1)}{=} \frac{1}{DV(A,D,C,B)} \overset{(5)}{=} \frac{\delta-1}{\delta} = 1 - \frac{1}{\delta}$

Es fehlen noch

(7) $DV(C,B,D,A) \overset{(4)}{=} DV(B,C,A,D) \overset{(2)}{=} 1 - DV(B,A,C,D) \overset{(2)}{=} 1 - \frac{1}{\delta}$ vgl. (6)

(8) $DV(C,B,A,D) \overset{(4)}{=} DV(B,C,D,A) \overset{(1)}{=} \frac{1}{DV(B,C,A,D)} \overset{(7)}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{\delta}} = \frac{\delta}{\delta-1}$ vgl. (5)

(9) $DV(D,B,C,A) \overset{(4)}{=} DV(B,D,A,C) \overset{(2)}{=} 1 - DV(B,A,D,C) \overset{(1)}{=} 1-\delta$ vgl. (3)

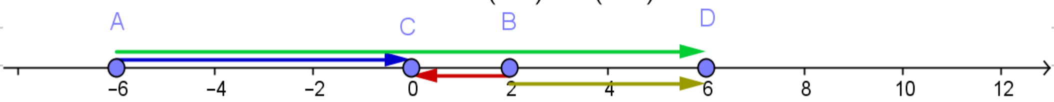
(10) $DV(D,B,A,C) \overset{(4)}{=} DV(B,D,C,A) \overset{(1)}{=} \frac{1}{DV(B,D,A,C)} \overset{(9)}{=} \frac{1}{1-\delta}$ vgl. (4)

(11) $DV(D,C,B,A) \overset{(4)}{=} DV(C,D,A,B) \overset{(2)}{=} 1 - DV(C,A,D,B) \overset{(3)}{=} 1-(1-\delta) = \delta$ vgl. (1)

(12) $DV(D,C,A,B) \overset{(4)}{=} DV(C,D,B,A) \overset{(1)}{=} \frac{1}{DV(C,D,A,B)} \overset{(11)}{=} \frac{1}{\delta}$ vgl. (2)

Anmerkung: Je 4 DV der 24 sind gleich $\delta, \frac{1}{\delta}, 1-\delta, \frac{1}{1-\delta}, 1-\frac{1}{\delta}, \frac{\delta}{1-\delta}$

Doppelverhältnis $\quad DV(A,B,C,D) = \dfrac{d(\overrightarrow{AC})}{d(\overrightarrow{BC})} : \dfrac{d(\overrightarrow{AD})}{d(\overrightarrow{BD})} = \dfrac{6}{-2} : \dfrac{12}{4} = -1$



unter Verwendung gerichteter Strecken

$$1) \quad DV(A,B,D,C) = \frac{d(\overrightarrow{AD})}{d(\overrightarrow{BD})} : \frac{d(\overrightarrow{AC})}{d(\overrightarrow{BC})} = \frac{12}{4} : \frac{6}{-2} = -1 = \frac{1}{DV(A,B,C,D)}$$

$$2) \quad DV(A,C,B,D) = \frac{d(\overrightarrow{AB})}{d(\overrightarrow{CB})} : \frac{d(\overrightarrow{AD})}{d(\overrightarrow{CD})} = \frac{8}{2} : \frac{12}{6} = 2 = 1 - DV(A,B,C,D)$$

$$3) \quad DV(B,A,C,D) = \frac{d(\overrightarrow{BC})}{d(\overrightarrow{AC})} : \frac{d(\overrightarrow{BD})}{d(\overrightarrow{AD})} = \frac{-2}{6} : \frac{4}{12} = -1 = \frac{1}{DV(A,B,C,D)}$$

$$4) \quad DV(B,A,D,C) = \frac{d(\overrightarrow{BD})}{d(\overrightarrow{AD})} : \frac{d(\overrightarrow{BC})}{d(\overrightarrow{AC})} = \frac{4}{12} : \frac{-2}{6} = -1 = DV(A,B,C,D)$$

Nachweis von 1), 3) und 4) einfach durch Bruchrechnen.

Nachweis von 2)

Zu zeigen: $DV(A,C,B,D) = 1 - DV(A,B,C,D)$

$$\Leftrightarrow \frac{d(\overrightarrow{AB})}{d(\overrightarrow{CB})} : \frac{d(\overrightarrow{AD})}{d(\overrightarrow{CD})} = 1 - \frac{d(\overrightarrow{AC})}{d(\overrightarrow{BC})} : \frac{d(\overrightarrow{AD})}{d(\overrightarrow{BD})}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{d(\overrightarrow{AB}) \cdot d(\overrightarrow{CD})}{d(\overrightarrow{BC}) \cdot d(\overrightarrow{AD})} = 1 - \frac{d(\overrightarrow{AC}) \cdot d(\overrightarrow{BD})}{d(\overrightarrow{BC}) \cdot d(\overrightarrow{AD})}$$

$$\Leftrightarrow d(\overrightarrow{AC}) \cdot d(\overrightarrow{BD}) - d(\overrightarrow{AB}) \cdot d(\overrightarrow{CD}) = d(\overrightarrow{BC}) \cdot d(\overrightarrow{AD})$$

$$\Leftrightarrow d(\overrightarrow{AC}) \cdot [d(\overrightarrow{AD}) - d(\overrightarrow{AB})] - d(\overrightarrow{AB}) \cdot [d(\overrightarrow{AD}) - d(\overrightarrow{AC})] = d(\overrightarrow{BC}) \cdot d(\overrightarrow{AD})$$

$$\Leftrightarrow [d(\overrightarrow{AC}) - d(\overrightarrow{AB})] \cdot d(\overrightarrow{AD}) = d(\overrightarrow{BC}) \cdot d(\overrightarrow{AD}) \quad \text{qed, da} \quad d(\overrightarrow{AC}) - d(\overrightarrow{AB}) = d(\overrightarrow{BC})$$