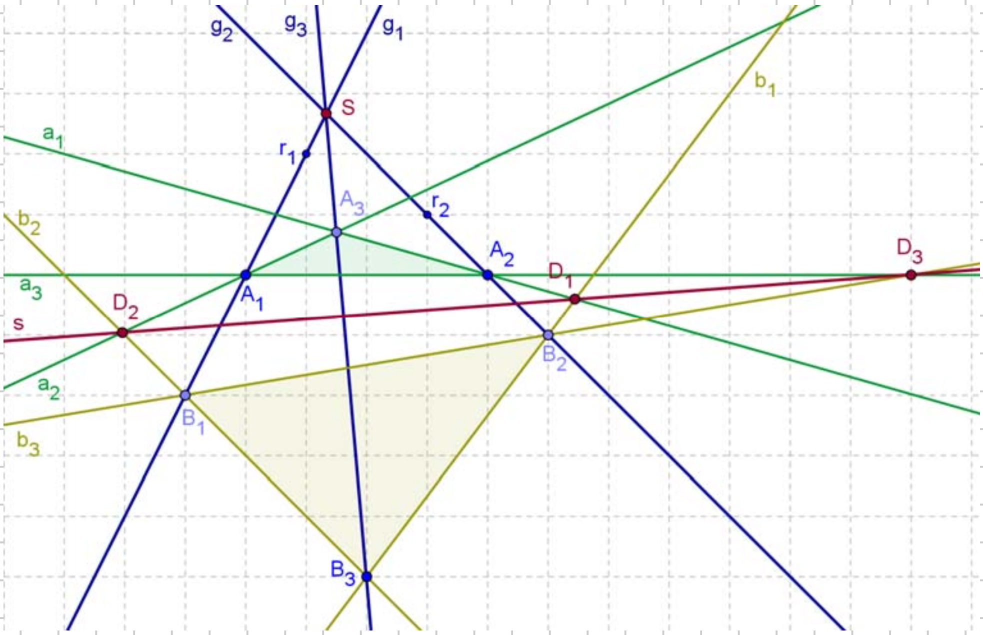
Geometrie LB Blatt 4 Hausaufgaben

Notiztitel 27.10.2014

H8.



Die Figur zeigt die Kanten und Linien eines 3-eckigen Prismas ohne Berücksichtigung der Sichtbarkeit.

a) Es gilt:

in der Ebene $SA_1A_2 = g_1g_2$: $D_3 = A_1A_2 \cap B_1B_2$ ①

in der Ebene $SA_1A_3 = g_1g_3$: $D_2 = A_1A_3 \cap B_1B_3$ ②

in der Ebene $SA_2A_3 = g_2g_3$: $D_1 = A_2A_3 \cap B_2B_3$ ③

b) Betrachtet man die Ebenen $\alpha = A_1A_2A_3$ und $\beta = B_1B_2B_3$, so gilt andererseits wegen:

$$\left.\begin{array}{l} ①\ D_3 \in A_1A_2 \subset \alpha \text{ und } D_3 \in B_1B_2 \subset \beta \\ ②\ D_2 \in A_1A_3 \subset \alpha \text{ und } D_2 \in B_1B_3 \subset \beta \\ ③\ D_1 \in A_2A_3 \subset \alpha \text{ und } D_1 \in B_2B_3 \subset \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} D_i \in \alpha \\ \text{und} \quad i=1,2,3 \\ D_i \in \beta \end{array}$$

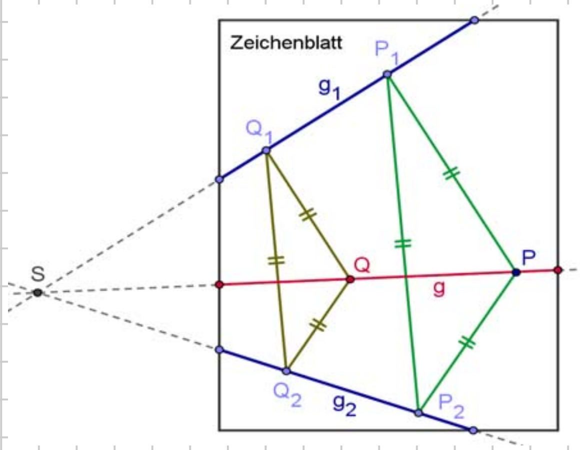
$\Rightarrow D_i \in \alpha \cap \beta$, $i = 1,2,3$ in Worten:

D_1, D_2, D_3 liegen auf der Schnittgeraden von α und β.

Beachte: Das Axiom von DESARGUES ergibt sich im Fall $\alpha \parallel \beta$. Dann liegen D_1, D_2, D_3 auf der Ferngeraden von α und β

Die Aussage gilt auch im Fall, dass S ein Fernpunkt ist, d.h. bei einem 3eckigen Prisma $\boxed{\text{vgl. Papiermodell.}}$

H9.



gegeben: $g_1 \nparallel g_2$, P

gesucht: $g = PS$

mit $S = g_1 \cap g_2$

ohne Zuhilfenahme des Punktes S außerhalb des Zeichenblattes (Rahmen)

Wähle $P_1, Q_1 \in g_1$ und $P_2, Q_2 \in g_2$ mit $P_1P_2 \parallel Q_1Q_2$.
Konstruiere Schnittpunkt Q der Parallelen zu PP_1 durch Q_1 und zu PP_2 durch Q_2. Dann gilt: $g = PQ$.

Begründung mit der Umkehrung des (nicht verlangt!)
(SD) Satz von Desargues mit $g_3 := g$, $P_3 := P$, $Q_3 := Q$

Sind g_1, g_2, g_3 drei verschiedene Geraden durch einen Punkt S und $P_k, Q_k \in g_k \setminus \{Z\}$ mit $P_k \neq Q_k$ für $k \in \{1,2,3\}$ so gilt: Aus $P_1P_2 \parallel Q_1Q_2$ und $P_2P_3 \parallel Q_2Q_3$ folgt $P_1P_3 \parallel Q_1Q_3$

Umgekehrt gilt:

Liegen $P_1P_2 \parallel Q_1Q_2$, $P_2P_3 \parallel Q_2Q_3$ und $P_1P_3 \parallel Q_1Q_3$, so gilt: P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 schneiden einander in einem Punkt S.
(ggf. Fernpunkt)

Beweis durch Widerspruch

gegeben: $P_1P_2 \parallel Q_1Q_2$; $P_2P_3 \parallel Q_2Q_3$; $P_1P_3 \parallel Q_1Q_3$

Annahme: o.E. $S = P_1Q_1 \cap P_2Q_2 \notin P_3Q_3$

Sei $Q = Q_1Q_3 \cap SP_3 \overset{(SD)}{\Rightarrow}$

$Q_1Q_2 \parallel P_1P_2 \wedge Q_1Q \parallel P_1P_3 \Rightarrow Q_2Q \parallel P_2P_3$

Parallelenaxiom $\Rightarrow$ $Q \in Q_1Q_3$, Paral. zu P_2P_3 durch Q_2
$Q_1Q = Q_1Q_3$ und $Q_2Q = Q_2Q_3$

$\Rightarrow Q_3 = Q_1Q_3 \cap Q_2Q_3 = Q_1Q \cap Q_2Q = Q \in SP_3$

$\Rightarrow S \in P_3Q_3$ ↯ zur Voraus.