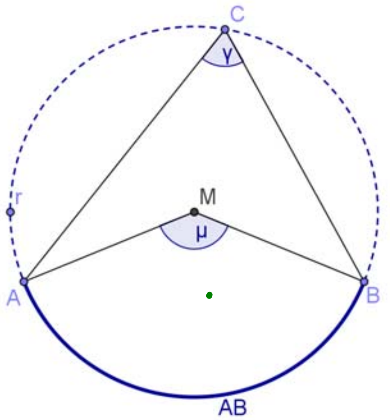
Geometrie LB Übungen Blatt 3

Notiztitel 19.10.2014

T7

a)



Gegeben:

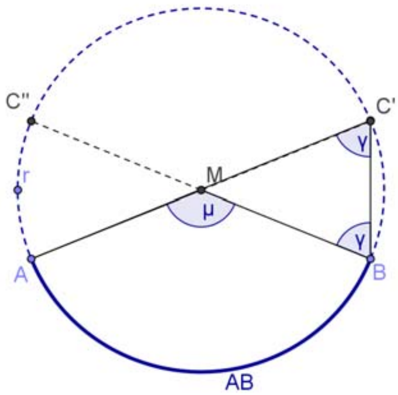
Mittelpunktswinkel μ des Bogens AB

(Winkel um den A um M nach B gedreht werden muss)

Peripheriewinkel γ von $C \in$ Bogen BA

(Peripheriekreisbogen BA gestrichelt)

Behauptung: $\mu = 2\gamma$

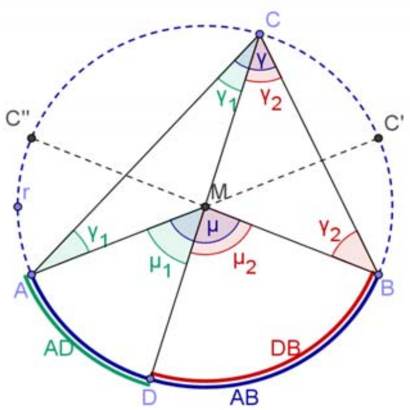


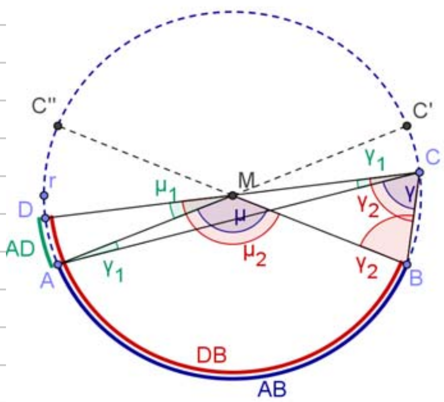
Betrachte Spezialfälle: Kreisdurchmesser (Geraden) AC' bzw BC'' durch M

Die Behauptung gilt dann, da im gleichschenkligen Dreieck MBC' (MAC'') beide Basiswinkel gleich γ sind und damit

$\mu = \sphericalangle AMB = 2\gamma$ (Außenwinkel ist Summe der nicht anliegenden Innenwinkel)

Betrachte daher im allgem. Fall den Kreisdurchmesser CD durch M





Dann gilt nach obigem über den Kreisbögen

AD: $\mu_1 = 2 \cdot \gamma_1$

DB: $\mu_2 = 2 \cdot \gamma_2$

$\Rightarrow$

Kreisbogen

$\mu = \mu_1 + \mu_2 = 2(\gamma_1 + \gamma_2) = 2\gamma$ falls $C \in C'C''$

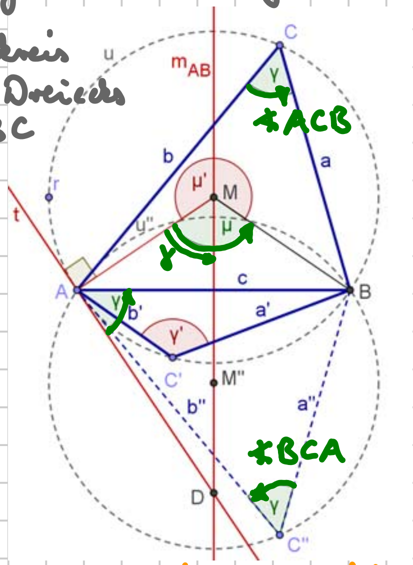
$\mu = \mu_2 - \mu_1 = 2(\gamma_2 - \gamma_1) = 2\gamma$ falls $C \in BC'$

$\mu = \mu_1 - \mu_2 = 2(\gamma_1 - \gamma_2) = 2\gamma$ falls $C \in C''A$ □

b) Da der Mittelpunktswinkel μ fest bleibt, gilt nach a) dass für alle $C \in$ Bogen BA (Peripheriekreisbogen): $\underline{\gamma = \frac{\mu}{2} = \text{const}}$ ✓

<u>Beachte:</u> Ersetzt man „Bogen AB" durch „Strecke AB", so muss man unterscheiden, ob M und C auf derselben Seite der Geraden AB liegen oder nicht. Satz des Thales als Spezialfall!

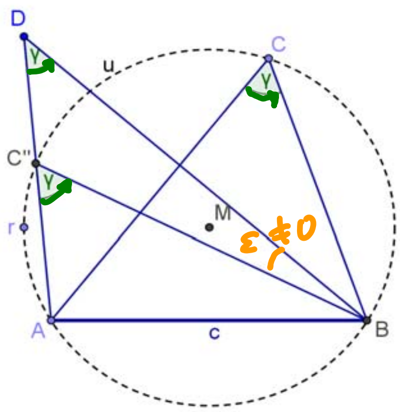
Umkreis des Dreiecks ABC



Betrachtet man die Tangente in A an u, und ihren Schnittpunkt D mit dem Mittellot m_{AB} von A und B, so gilt im rechtwinkligen Dreieck AMD: $\sphericalangle AMD = \sphericalangle DAB = \gamma$.

Damit erhält man „umgekehrt" u bei gegebener Strecke AB und Winkel γ, zunächst als Kreispaar symmetrisch zu AB, und <u>eindeutig</u> bei Verwendung <u>orientierter</u> Winkel $\sphericalangle ACB \begin{Bmatrix} >0 & \text{gegen} \\ <0 & \text{im} \end{Bmatrix}$ Uhrzeigersinn, vgl. T10-Umkreis2.ggb

c)



Gegeben sei <u>ein</u> Dreieck ABC mit gegebener Strecke $c = AB$ und $\sphericalangle ACB = \gamma$. Dann gilt nach b) für alle Punkte $C' \in u$ (Umkreis des Dreiecks ABC) auf derselben Seite von AB wie C: $\sphericalangle AC'B = \gamma$.

Sei D ein Punkt auf derselben Seite von AB wie C mit $\sphericalangle ADB = \gamma$ aber $D \notin u$. Dann schneidet die Gerade AD (oder BD) den Umkreisbogen u in einem Punkt $C'' \neq A$ (bzw. $C'' \neq B$) mit $\sphericalangle AC''B = \gamma$.

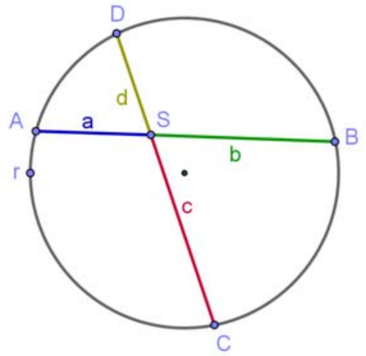
Mit $\varepsilon = \sphericalangle DBC'' \neq 0$ gilt für den Außenwinkel des Dreiecks BDC'':

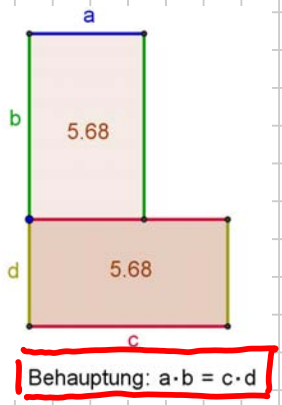
$\gamma = \sphericalangle AC''B = \gamma + \varepsilon \neq \gamma$ ↯

(bzw. $\sphericalangle ADC'' \neq 0 \Rightarrow \gamma = \sphericalangle BC''A = \gamma + \varepsilon \neq \gamma$ ↯)

Vgl. auch T10-Um.ggb

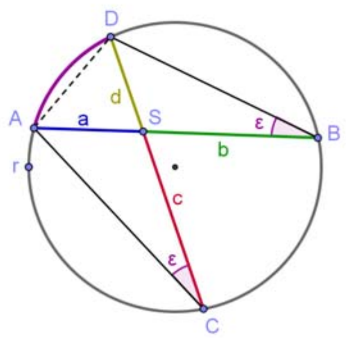
T8:





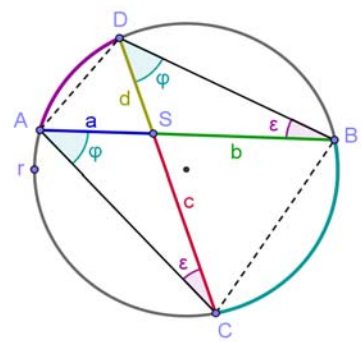
Gegeben: Kreis mit 2 Sehnen AB und CD, die einander schneiden $S = AB \cap CD$ (S innerhalb des Kreises)

Mit Hilfe des Peripheriewinkelsatzes gilt:



Über dem Bogen AD: $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD = \varepsilon$

Über dem Bogen BC: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC = \varphi$

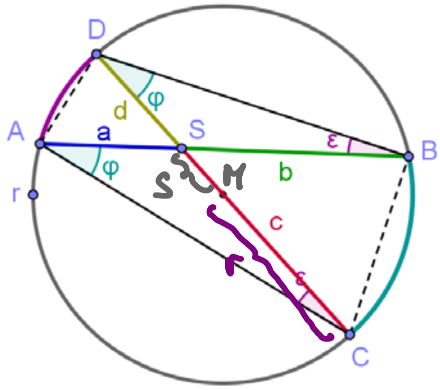


Mit den Scheitelwinkeln $\sphericalangle ASC = \sphericalangle DSB$ sind die Dreiecke ASC und DSB winkelgleich (zueinander ähnlich)

d.h. $a : c = d : b \Rightarrow a \cdot b = c \cdot d$ qed

Bemerkungen: 1) Offenbar ist für jede Sehne durch S das Produkt der Sehnenabschnitte gleich (Verschiebe C)

2) Ist CD ein Kreisdurchmesser, so gilt mit $r = \overline{MC} = \overline{MD}$ und $s = \overline{SM}$:
$c \cdot d = (r+s)\cdot(r-s) = r^2 - s^2 = \text{const}$



3) Der Satz gilt auch, falls sich die Geraden AB und CD außerhalb des Kreises schneiden. (vgl. Sekanten/Tangentensatz)