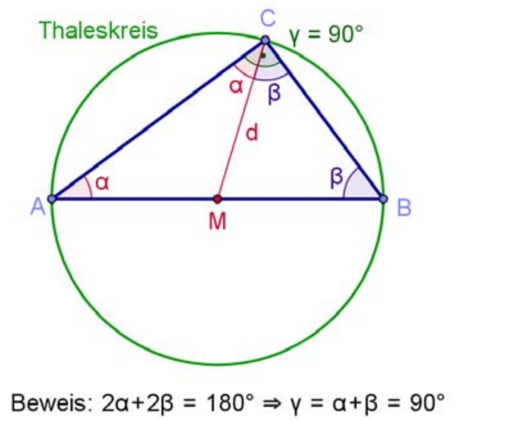
Geometrie LB Übungen Blatt 1

Notiztitel 13.10.2014

T1 Nach Vorlesung gilt (1.1.2):

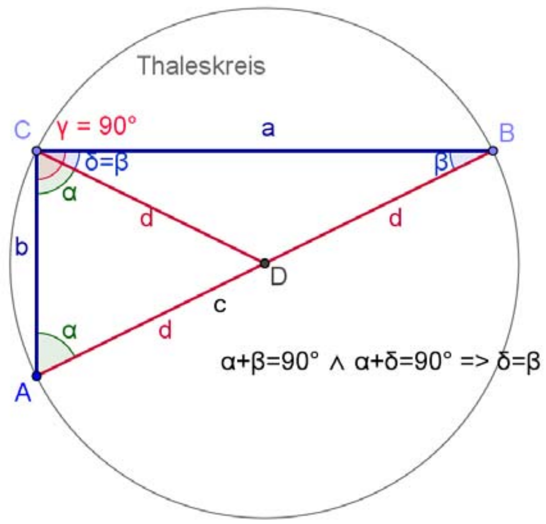
Von jedem Punkt eines Kreises aus wird jeder Durchmesser des Kreises unter einem rechten Winkel (90°) gesehen.



Gilt auch umgekehrt:

Jeder Punkt, der zwei Punkte A und B unter 90° sieht, liegt auf dem Kreis über der Strecke $\overline{AB}$.

1. Direkter Beweis:



- Wähle ein rechtwinkliges Dreieck ABC, $\gamma = \sphericalangle ACB = 90°$
- Trage den Winkel $\alpha = \sphericalangle BAC$ in C an der Geraden AC nach innen ab.
- Schneide die erhaltene Gerade mit der Seite AB und nenne den Schnittpunkt D.

Dann ist das Dreieck ADC gleichschenklig $\Rightarrow \overline{AD} = \overline{CD}$ (1)

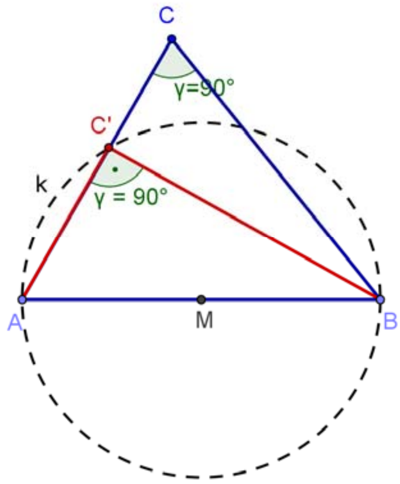
Ferner gilt: $\alpha + \beta = 90°$ wegen Winkelsumme im Dreieck

und $\alpha + \delta = 90°$ s. Figur mit $\beta = \sphericalangle CBA$, $\delta = \sphericalangle DCB$

$\Rightarrow \delta = \beta \Rightarrow$ Dreieck BCD ist gleichschenklig $\Rightarrow \overline{BD} = \overline{CD}$ (2)

(1) ∧ (2) $\Rightarrow \overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD} \Rightarrow$ C liegt auf Kreis über der Strecke $\overline{AB}$.

2. Widerspruchsbeweis (indirekter Beweis)

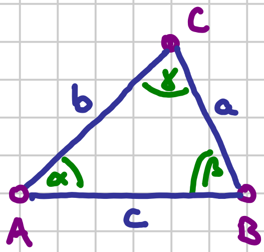


Annahme:
Es gibt ein rechtwinkliges Dreieck ABC, dessen Ecke C nicht auf dem Thaleskreis k über der Strecke AB liegt.

Dann schneidet AC (oder BC) den Thaleskreis k in einem Punkt C', sodass das Dreieck ABC' rechtwinklig ist.
Damit hat das Dreieck BCC' aber zwei rechte Winkel im Widerspruch zur Winkelsumme im Dreieck.

Beachte die nötige Fallunterscheidung falls die Strecke $\overline{AC}$ den Kreis k nur in A schneidet!

T2



Bezeichnungen: Punkte A, B, C, ...
Linien a, b, c, ...
Winkel α, β, γ,

- Das Dreieck ABC ist gleichschenklig ⟺ Zwei Seiten sind gleich lang ⟺ Zwei Winkel sind gleich groß
- Das Dreieck ABC ist rechtwinklig ⟺ Ein Winkel hat 90°.
- Das Dreieck ABC ist spitzwinklig ⟺ alle Winkel ≤ 90°.

Frage: Wie zeichnet man ein spitzwinkliges Dreieck so, dass es weder als rechtwinklig noch als gleichschenklig erscheint.

Ziel: Die Winkel α, β, γ (o.E. $\alpha \leq \beta \leq \gamma$) sollen sich voneinander und vom rechten Winkel möglichst gut unterscheiden, d.h. die Differenzen

$90° - \gamma =: \varepsilon_1$ (1) sollen „möglichst groß" sein.

$\gamma - \beta =: \varepsilon_2$ (2) Untersuchen wir zunächst, für welche

$\beta - \alpha =: \varepsilon_3$ (3) Dreiecke diese Differenzen gleich sind, also:

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$ (4)

Winkelsumme im Dreieck:

$$\alpha+\beta+\gamma \overset{(3)(2)}{=} (\beta-\varepsilon_3)+\beta+(\beta+\varepsilon_2) \overset{(4)}{=} 3\beta \overset{!}{=} 180^\circ \Rightarrow \underline{\beta=60^\circ}$$

Aus (1) + (2) folgt mit (4): $90^\circ-\beta=\varepsilon_1+\varepsilon_2=2\varepsilon \Rightarrow \underline{\varepsilon=15^\circ}$

damit $\underline{\alpha} \overset{(3)}{=} \beta-\varepsilon = \underline{45^\circ}$ und $\underline{\gamma} \overset{(1)}{=} 90^\circ-\varepsilon = \underline{75^\circ}$

Sind für diese Winkel die Differenzen maximal?

Annahme: Alle Differenzen sind größer als 15°

(1) $90^\circ-\gamma = 15^\circ+\delta_1$ mit $\delta_1\geq 0 \Rightarrow \gamma = 75^\circ-\delta_1$

(2) $\gamma-\beta = 15^\circ+\delta_2$ mit $\delta_2\geq 0 \Rightarrow \beta = \gamma-15^\circ-\delta_2 = 60^\circ-\delta_1-\delta_2$

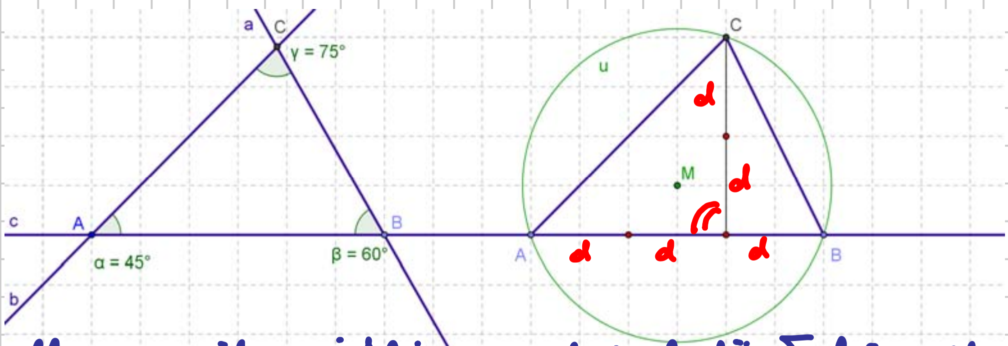
(3) $\beta-\alpha = 15^\circ+\delta_3$ mit $\delta_3\geq 0 \Rightarrow \alpha = \beta-15^\circ-\delta_3 = 45^\circ-\delta_1-\delta_2-\delta_3$

Winkelsumme im Dreieck liefert:

$$\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ-3\cdot\delta_1-2\cdot\delta_2-\delta_3 \overset{!}{=} 180 \Leftrightarrow 0^\circ=-3\delta_1-2\delta_2-\delta_3 \leq 0$$

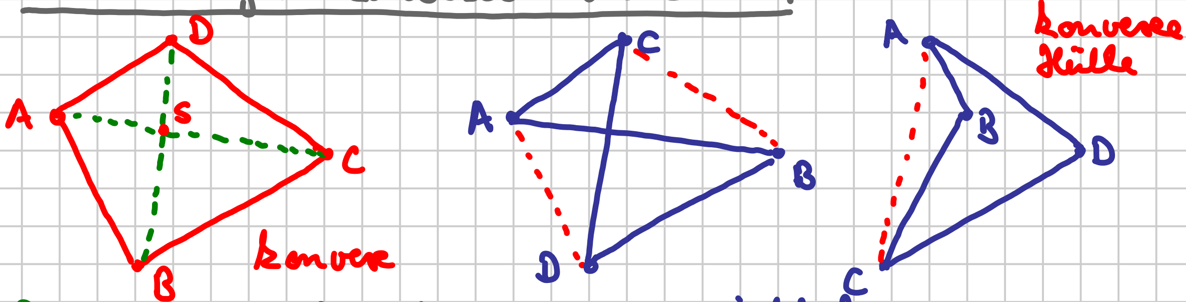
$\Rightarrow \delta_1=\delta_2=\delta_3=0$, d.h. $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=15^\circ$ sind maximal.

Ein Dreieck mit den Winkeln 45°, 60°, 75° nennt man allgemeines spitzwinkliges Dreieck (Bernhard Tergan)



allgem. spitzwinklig   optimal für Tafel mit Raster

Anmerkung zu konvexen Vierecken:

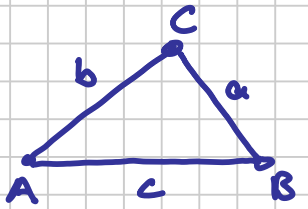


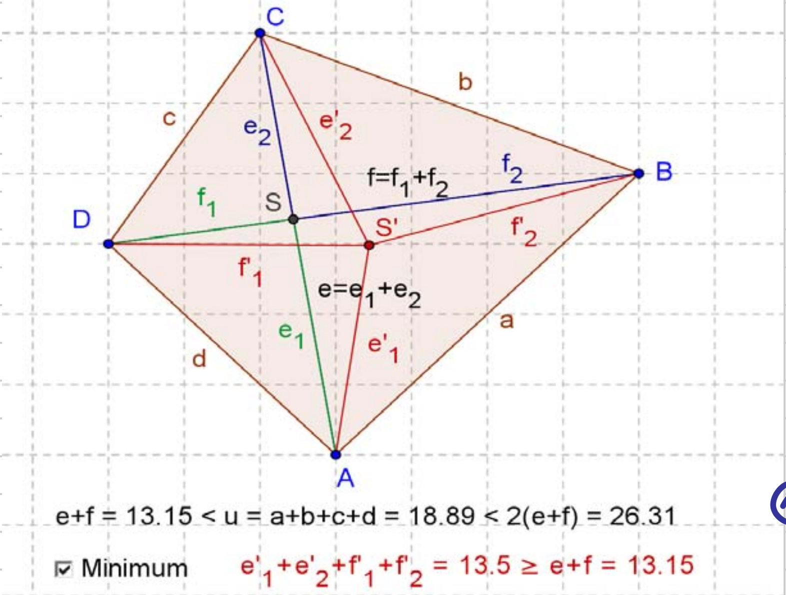
Diagonalen schneiden sich im Viereck.   nicht konvex

I3 a) Dreiecksungleichung

$a \leq b + c$ (zyklisch)

Gleichheit genau dann wenn die 3 Punkte auf einer Geraden liegen.





Es gilt:

$e = e_1 + e_2$

$f = f_1 + f_2$

$u = a + b + c + d$

und in den Dreiecken

(1)
ABC: $e < a + b$
BCD: $f < b + c$
CDA: $e < c + d$
DAB: $f < d + a$

Summieren

$\Rightarrow 2(e+f) < (a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a) = 2(a+b+c+d) = 2u$

$\Rightarrow e + f < u$

(2) ABS BCS CDS DAS

$a < e_1 + f_2$, $b < f_2 + e_2$, $c < e_2 + f_1$, $d < f_1 + e_1$

$\Rightarrow u = a+b+c+d \leq (e_1+f_2)+(f_2+e_2)+(e_2+f_1)+(f_1+e_1) =$

$= 2(e_1+e_2) + 2(f_1+f_2) = 2(e+f)$

b) Sei S' ein beliebiger Punkt $\Rightarrow \underset{AS'C}{e'_1 + e'_2 \geq e}$, $\underset{BS'D}{f'_1 + f'_2 \geq f}$

Gleichheit $\Leftrightarrow S' \in AC$ bzw $S' \in BD$

Summe der Abstände von S aus: $e_1 + e_2 + f_1 + f_2 = e + f$

Summe der Abstände von S' aus: $e'_1 + e'_2 + f'_1 + f'_2 \geq e + f$

$\Rightarrow$ Behauptung   Gleichheit $\Leftrightarrow S' = AC \cap BD$

Zusatz: Welche der beiden Ungleichungen gilt auch für nicht konvexe Vierecke? Die erste $e + f < u$.