7 Koordinaten

7.1 Koordinatensystem in der Ebene

Aufgrund des Parallelenaxioms gibt es Rechtecke. Man kann daher ein kartesisches xy-**Koordinatensystem (**xy**-KS)** einführen wie üblich:

Zwei Geraden, die einen rechten Winkel einschließen,
die x-**Achse** und die y-**Achse** oder
die x_1-**Achse** und die x_2-**Achse**,
die einander im **(Koordinaten-)Ursprung** O schneiden,
ein **Einheitspunkt** E_x bzw. E_1 auf der x- bzw. auf der x_1-Achse,
ein **Einheitspunkt** E_y bzw. E_2 auf der y- bzw. auf der y_1-Achse.

Über **Rechts**- bzw. **Linkskoordinatensysteme** reden wir hier noch nicht!

Das können wir auf einfache Weise erst mit analytischer Geometrie.

7.1.1 Geradendarstellung

In einem kartesischen xy-Koordinatensystem hat eine Gerade eine **Gleichung**

$$g: ax + by + d = 0$$

mit reellen Konstanten a, b, d mit $(a, b) \neq (0, 0)$ und eine **Parameterdarstellung** der Gestalt

$$g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{v}.$$

Dabei ist $\vec{v} \neq \vec{o}$, und der Parameter t durchläuft die reellen Zahlen.

Das beweisen wir hier nicht.

7.1.2 Kreisgleichung

In einem kart. xy-KS hat ein Kreis mit Mittelpunkt $M(p, q)$ und Radius $r > 0$ die **Gleichung**

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

Begründung: Lehrsatz des Pythagoras

7.2 Konstruierbare Punkte

7.2.1 Mit dem Lineal konstruierbare Punkte

Gegeben sei eine Menge von Punkten.

Vorüberlegung 1:

Alle Verbindungsgeraden von gegebenen Punkten haben die Eigenschaft:

Die Koeffizienten einer Gleichung der Verbindungsgeraden lassen sich
(bis auf einen gemeinsamen Faktor)
aus den Koordinaten der gegebenen Punkte durch Lösung eines linearen Gleichungssystems
(mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten)
berechnen,
also mit den vier Grundrechnungsarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division.

Vorüberlegung 2:

Alle Schnittpunkte von gegebenen Geraden haben die Eigenschaft:

Die Koordinaten der Punkte lassen sich aus den Koeffizienten von Gleichungen der gegebenen Geraden durch Lösung eines linearen Gleichungssystems
(mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten)
berechnen,
also mit den vier Grundrechnungsarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division.

Alle Punkte, die sich aus einer Menge von gegebenen Punkten mit dem Lineal konstruieren lassen, haben Koordinaten, die man aus den Koordinaten der gegebenen Punkte berechnen kann durch $+$, -, $\cdot$ und $/$.

7.2.2 Mit Lineal und Zirkel konstruierbare Punkte

Mit dem Zirkel als zusätzlichem Konstruktionshilfsmittel kann man über 7.2.1 hinaus Punkte erhalten, deren Koordinaten **Quadratwurzeln** aus schon konstruierten Zahlen enthalten.

7.2.3 Bem.: Nicht mit Zirkel und Lineal lösen kann man

a) das **Delische Problem** (**Würfelverdoppelung**):

$$x^3 = 2a^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2} \cdot a,$$

weil $\sqrt[3]{2}$ nicht durch Quadratwurzeln darstellbar ist;

b) die **Quadratur des Kreises**,
weil π eine **transzendente Zahl** ist (Ferdinand von Lindemann 1882);

c) die **Winkeldreiteilung**, da z.B. gilt

$$\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$$

und da

$$4x^3 - 3x = c$$

nicht auf Quadratwurzeln führt.