6 Flächeninhalt

6.1 Vierecke

6.1.1 Def.: Seien A, B, C, D vier verschiedene Punkte in $\mathbb{E}$, keine drei auf einer Geraden, so dass $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ einander höchstens in Endpunkten treffen. Dann bilden diese Strecken ein **Viereck** $\square ABCD$ mit den **Seiten** $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ und den **Ecken** A, B, C, D.
Endpunkte einer Seite . . . **benachbarte** Ecken.
$\overline{AC}, \overline{BD}$ . . . **Diagonalen**
gegenüberliegend . . . Seiten ohne gemeinsame Ecke, Ecken ohne gemeinsame Seite
Vieleck . . . analoge Vereinigung von Strecken

6.1.2 Bem.: Für Vierecke ist der Begriff Innenwinkel im allgemeinen nicht sinnvoll. Skizze.

6.1.3 Def.: Ein Viereck heißt **konvex**, wenn für jede Seite $\overline{PQ}$ gilt: Alle vier Ecken liegen auf derselben Seite von PQ.

6.1.4 Bem.: Jedes konvexe Viereck besitzt vier **Innenwinkel** und ein **Inneres**.

6.1.5 Satz: Ein Viereck ist konvex $\Leftrightarrow$ Seine Diagonalen schneiden einander.

Bew.: "$\Leftarrow$": Sei $\overline{AD}$ eine beliebige Seite von $\square ABCD$. Sei $\overline{AC} \cap \overline{BD} =: \{S\}$. Dann ist $B \in DS^+$ und $C \in AS^+$. Nach 2.1.14 liegen dann B, C, S auf derselben Seite von AD.
"$\Rightarrow$": B liegt im Inneren des Winkels $\angle ADC$. Daher ist nach 2.3.4 $\overline{AC} \cap DB^+ \neq \emptyset$. Analog ist $\overline{BD} \cap AC^+ \neq \emptyset$.

6.1.6 Satz: Ein Viereck ist konvex $\Leftrightarrow$ Keine Ecke liegt im Inneren des Dreiecks der anderen drei Ecken.

Bew.: "$\Rightarrow$": Annahme: D liegt im Inneren von $\triangle ABC \Rightarrow B$ und D liegen auf derselben Seite von AC. Daher schneidet $\overline{BD}$ die andere Diagonale $\overline{AC}$ höchstens in B. Aber A, B, C liegen nicht auf einer Geraden. Daher ist $\overline{BD} \cap \overline{AC} = \emptyset$ und das Viereck nach 6.1.5 konvex.

"$\Leftarrow$": Annahme: Das $\Box ABCD$ ist nicht konvex. Dann liegen o.E. die Ecken A und B auf verschiedenen Seiten von CD. Dann ist $\overline{AB} \cap CD =: \{S\}$. Dabei ist $S \notin \overline{CD}$, da $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \emptyset$. Wieder o.E. liegt D zwischen C und S. Damit liegt D im Innern der beiden Winkel $\angle CBS = \angle CBA$ und $\angle CAS = \angle CAB$, also im Innern des $\triangle ABC$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

6.1.7 Bem.: Nach 6.1.5 (Die Diagonalen schneiden einander.) und Axiom IV/1 (Zerlegung einer Ebene durch eine Gerade) zerlegt jede Diagonale $\overline{AC}$ eines konvexe Vierecks $\Box ABCD$ in zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und CBD. Da die Winkelsumme in jedem Dreieck zwei Rechte beträgt und A bzw. C im Inneren des Winkel $\angle BCD$ bzw. $\angle BAD$ liegt, gilt

6.1.8 Satz: Die Summe der Innenwinkel beträgt in jedem konvexen Vierecke vier Rechte.

6.1.9 Def.: Ein $\Box ABCD$ mit $AB \parallel CD$ heißt ein **Trapez**.

6.1.10 Satz: Jedes Trapez ist ein konvexes Viereck.

Bew.: Sei $\Box ABCD$ mit $AB \parallel CD$. Dann liegen C, D auf derselben Seite von AB. Zu zeigen bleibt: A, D liegen auf derselben Seite von BC.
Annahme: A, D auf verschiedenen Seiten von BC. Dann ist $\overline{AD} \cap BC =: \{S\}$. Da C, D auf derselben Seite von AB, liegen auch $\overline{AD}$ und damit S auf derselben Seite von AB wie C. Folglich ist $S \in BC^+$. Da auch A, B auf derselben Seite von CD, liegen auch $\overline{AD}$ und damit S auf derselben Seite von CD wie B. Folglich ist $S \in CB^+$, also $S \in \overline{BC}$, im Widerspruch zur Definition des Vierecks.

6.1.11 Def.: Ein $\Box ABCD$ heißt **Parallelogramm** $:\Leftrightarrow AB \parallel CD$ und $BC \parallel AD$.

6.1.12 Satz: In einem Parallelogramm sind gegenüberliegende Seiten gleich lang.

Bew.: Im Parallelogramm $\square ABCD$ sind die Wechselwinkel $\angle ACB$ und $\angle CAD$ kongruent, ebenso die Wechselwinkel $\angle ACD$ und $\angle CAB$. Da $\overline{AC} \cong \overline{AC}$, ist $\triangle ABC \cong \triangle CDA$, also $d(A,B) = d(C,D)$ und $d(B,C) = d(D,A)$.

6.1.13 Satz: Sind in einem konvexen Viereck je zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang, so ist es ein Parallelogramm.

Bew.: Seien in $\square ABCD$ die Abstände $d(A,B) = d(C,D)$ und $d(B,C) = d(D,A)$. Dann ist $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (nach sss). Aufgrund gleicher Wechselwinkel sind also $AB \parallel CD$ und $BC \parallel AD$.

6.1.14 Satz: Sind in einem konvexen Viereck $\square ABCD$ zwei gegenüberliegende Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ parallel und gleich lang, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

Bew.: Die Diagonale $\overline{AC}$ teilt $\square ABCD$ in zwei kongruente Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle CDA$, nach dem Kongruenzsatz sws, da Wechselwinkel bei A und C gleich sind. Daher sind auch die anderen Wechselwinkel bei A und C gleich, und $AD \parallel BC$.

6.1.15 Satz:

(i) Jedes Parallelogramm ist ein konvexes Viereck.

(ii) Jede Diagonale teilt jedes Parallelogramm in zwei kongruente Dreiecke.

(iii) In jedem Parallelogramm sind gegenüberliegende Winkel kongruent.

(iv) In jedem Parallelogramm ist die Summe benachbarter Winkel gleich zwei Rechten.

Bew.:

(i) 6.1.10

(ii) Wie in 6.1.12

(iii) Wie in 6.1.12

(iv) 5.2.2 ((Wechselwinkel und) Stufenwinkel an Parallelen sind kongruent.)

6.1.16 Bem.: Ein Parallelogramm mit einem rechten Innenwinkel hat vier rechte Innenwinkel.

6.1.17 Def.: Ein Parallelogramm mit einem rechten Innenwinkel heißt ein **Rechteck**. Ein Rechteck mit vier gleich langen Seiten heißt ein **Quadrat**.

6.1.18 Satz: Seien g eine Gerade und $A, B \notin g$, $A \neq B$, A und B auf derselben Seite von g. Dann gilt: $AB \parallel g \Leftrightarrow A$ und B haben von g denselben Abstand.

Bew.: Sei C Lotfußpunkt aus B auf g, D Lotfußpunkt aus A auf g.
"$\Rightarrow$": Dann ist $AD \parallel BC$ (nach 5.2.2 (Wechselwinkel bzw. Stufenwinkel bei C und D gleich groß)). Folglich ist $\square ABCD$ ein Parallelogramm, und sogar ein Rechteck, in dem die Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ gleich lang sind.
"$\Leftarrow$": Da $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$ parallel und gleich lang sind, ist $\square ABCD$ nach 6.1.14 ein Parallelogramm.

6.1.19 Def.: Die **Höhe** eines Parallelogramms $\square ABCD$ zur **Grundlinie** $\overline{AB}$ ist der Abstand der Parallelen AB und CD.

6.1.20 Bem.: Beim Rechteck $\square ABCD$ ist die Höhe zur Grundlinie $\overline{AB}$ die Länge der Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$.

6.2. Flächengleichheit

6.2.1 Def.: Zwei Flächen F_1 und F_2, die sich in gleich viele kongruente Teilflächen $F_{11}, F_{12}, \ldots, F_{1n}$ bzw. $F_{21}, F_{22}, \ldots, F_{2n}$ zerlegen lassen ($n \in \mathbb{N}$), so dass $F_{1k} \cong F_{2k}$ für $k = 1, 2, \ldots, n$, heißen **zerlegungsgleich**.

Tafelskizzen! Rechteck mit angesetzten gleichseitigen Dreiecken
Rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck und Quadrat

6.2.2 Def.: Zwei Flächen F_1 und F_2 heißen **ergänzungsgleich**, wenn sie sich durch jeweils gleich viele Teilflächen $F_{11}, F_{12}, \ldots, F_{1n}$ bzw. $F_{21}, F_{22}, \ldots, F_{2n}$ mit $F_{1k} \cong F_{2k}$ für $k = 1, 2, \ldots, n$ zu kongruenten Flächen $G_1 := F_1 \cup F_{11} \cup F_{12} \cup \ldots \cup F_{1n}$ bzw. $G_2 := F_2 \cup F_{21} \cup F_{22} \cup \ldots \cup F_{2n}$ ergänzen lassen.

Tafelskizze! Rechteck mit weggenommenen gleichseitigen Dreiecken Rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck und Quadrat

6.2.3 Def.: Zwei Flächen heißen **flächengleich**, wenn sie ergänzungsgleich oder zerlegungsgleich sind.

6.2.4 Def.: Wird eine Fläche F in Teilflächen $F_1, F_2, \ldots, F_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ zerlegt, und ist $F = G \cup F_k$, so heißt G **kleiner** als F und F **größer** als G.

6.2.5 Def.: Sind m gleiche Flächen F zusammen größer als n gleiche Flächen G, so heißt F **größer** als $\frac{n}{m}G$ und G **kleiner** als $\frac{m}{n}F$.

6.2.6 Def.: Ist $r \in \mathbb{R}$ und F größer als $\frac{m}{n}G$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{m}{n} < r$ und kleiner als $\frac{p}{q}G$ für alle $p, q \in \mathbb{N}$ mit $\frac{p}{q} > r$, so ist r das **Verhältnis** der Flächen F und G.

6.2.7 Satz: Haben zwei Rechtecke $\Box ABCD$, $ABEF$ eine Seite $\overline{AB}$ gemeinsam, so verhalten sich ihre Flächen wie die Längen der beiden anderen Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{BE}$.

Bew.: ohne, plausibel

6.2.8 Satz: Haben zwei Rechtecke $\Box ABDC$ und $\Box EFGH$ die Seitenlängen $a = d(A, B)$ und $b = d(B, C)$ bzw. $c = d(E, F)$ und $d = d(F, G)$, und ist $ab = cd$, so sind die beiden Rechtecke flächengleich.

Bew.: Legt man beide Rechtecke an ein Rechteck mit den Seitenlängen a und d an wie in der Skizze, so verhält sich die Fläche von $\Box ABDC$ zu der von $\Box KEHA$ wie b zu d, die von $\Box EFGH$ zu der von $\Box KEHA$ wie c zu a. Aus $ab = cd$ folgt aber $\frac{b}{d} = \frac{c}{a}$.

6.2.9 Bem.: Legt man eine Flächeneinheit fest, indem man einem Quadrat der Seitenlänge 1 die Fläche 1 zuordnet, so kann man nach 6.2.7 und 6.2.8 Rechtecksflächen berechnen: Länge mal Breite.

6.2.10 Bem.: Jetzt lässt sich der Lehrsatz des Pythagoras beweisen wie bei Euklid (und in der Übung):

6.2.11 Satz: (**Lehrsatz des Pythagoras**)
Vor.: ΔABC ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei C, $a := d(B, C)$, $b := d(C, A)$, $c := d(A, B)$.
Beh.: Die Flächen der Quadrate über den Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$ sind zusammen so groß wie die Fläche des Quadrats über der Seite $\overline{AB}$:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Tafelskizze, **Bew.:** Übungen

6.2.12 Def.: In einem rechtwinkligen Dreieck heißt die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, **Hypotenuse**. Die dem rechten Winkel anliegenden Seiten heißen **Katheten** des rechtwinkligen Dreiecks.

6.2.13 Bem.: Mit Def. 6.2.12 lautet der Lehrsatz des Pythagoras: In jedem rechtwinkligen Dreieck sind die Quadrate über den Katheten zusammen so groß wie das Quadrat über der Hypotenuse.

6.2.14 Satz: (**Höhensatz**)
Vor.: ΔABC ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei C, F Höhenfußpunkt auf $\overline{AB}$ der Höhe durch C, $h := d(C, F)$, $p := d(A, F)$, $q := d(F, B)$.
Beh.: Die Fläche des Quadrats über der Höhe durch C ist so groß wie die Fläche des Rechtecks aus den beiden Hypotenusenabschnitten $\overline{AF}$ und $\overline{FB}$:

$$h^2 = pq.$$

Bew.: Beide Flächen ergänzen zu einem rechtwinkligen Dreieck der Kathetenlängen $h+q$ und $h+p$ (Tafelskizze)
oder
kurze Rechnung mit Pythagoras.

6.2.15 Satz (**Kathetensatz**)
Vor.: ΔABC ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei C, F Höhenfußpunkt auf $\overline{AB}$ der Höhe durch C, $a := d(B,C)$, $b := d(C,A)$, $c := d(A,B)$, $p := d(A,F)$, $q := d(F,B)$.
Beh.: Die Fläche des Quadrats über einer Kathete ist so groß wie die Fläche des Rechtecks aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt:

$$b^2 = pc, a^2 = qc.$$

Bew.: Beide Flächen ergänzen zu einem Rechteck mit dem Seitenlängen $h+c$ und $h+q$ oder einfacher:
Kurze Rechnung mit Pythagoras und Höhensatz.

Wie in der Schule oder in den Übungen zeigt man:

6.2.16 Satz: Ist in einem Dreieck h die Länge der Höhe zu einer Grundlinie der Länge g, so gilt für die Fläche F des Dreiecks:

$$F = \frac{1}{2} gh.$$