3 Dreiecke

3.1 Grundlegende Sätze

(zum Teil bewiesen in den Übungen)

3.1.1 Satz: (sws) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in zwei Seiten und dem dazwischenliegenden Winkel.

3.1.2 Satz: (wsw) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln.

3.1.3 Satz: (pons asinorum) In jedem ΔABC gilt:

$$\overline{AC} = \overline{BC} \Leftrightarrow \angle CAB = \angle CBA.$$

3.1.4 Def.: Ein Dreieck heißt **gleichschenklig**, wenn zwei seiner Seiten gleich lang sind. Die beiden gleich langen Seiten heißen **Schenkel** des Dreiecks, die dritte Seite heißt **Basis**, die Innenwinkel an den Endpunkten der Basis heißen **Basiswinkel** des Dreiecks. Ein Dreieck heißt **gleichseitig**, wenn alle drei Seiten gleich lang sind.

3.1.5 Bem.: Jedes gleichseitige Dreieck ist gleichschenklig.

3.1.6 Satz: Ein Dreieck ist gleichseitig $\Leftrightarrow$ Alle drei Innenwinkel des Dreiecks sind gleich.

Bew.: zweimalige Anwendung von 3.1.3

3.1.7 Satz: (sss) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in den drei Seiten.

3.1.8 Bez.: ΔABC kongruent zu $\Delta A'B'C' \Leftrightarrow: \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

3.2 Strecken- und Winkelhalbierung

3.2.1 Def.: $M \in \overline{AB}$ heißt **Mittelpunkt** von $\overline{AB}$, wenn gilt: $d(A, M) = d(M, B)$.

3.2.2 Satz: Jede Strecke $\overline{AB}$ besitzt einen Mittelpunkt M.

Bew.: Sei $\overline{AB}$ eine Strecke. Dann ist $A \neq B$.
Die Eindeutigkeit von M folgt aus Axiom III/2.
Es genügt, die Existenz von M zu zeigen.
1. Versuch: In A und in B auf beiden Seiten von AB die gleichen Winkel $\angle BAC$, $\angle BAD$ und $\angle ABE$, $\angle ABF$ antragen, so dass C, E auf derselben Seite von AB liegen. Dann sei $AC \cap BE =: \{S_1\}$, $AD \cap BF =: \{S_2\}$. Dann sieht man mit 3.1 leicht, dass $S_1S_2 \cap AB = \{M\}$.

Der Haken ist: Ist $AC \cap BE \neq \emptyset$? Ist $AD \cap BF \neq \emptyset$? Ist $S_1S_2 \cap AB \neq \emptyset$?

2. Versuch: In A auf beiden Seiten an AB den gleichen Winkel $\angle BAC$, $\angle BAD$ antragen, so dass $d(A,C) = d(A,D)$. (Das geht nach Axiom III/2.). Dann ist $\Delta BAC \cong \Delta BAD$ (sws), also $\overline{BC} = \overline{BD}$, und die Dreiecke ΔACD, ΔBCD sind gleichschenklig mit der gemeinsamen Basis $\overline{CD}$.

1. Fall: $\angle BAC = \angle ABC$. Dann klappt der 1. Versuch.

2. Fall: $\angle BAC < \angle ABC$. Dann tragen wir $\angle BAC$ in $B = A'$ an AB so an, dass ein Schenkel $A'B'^+$ auf BA^+ fällt und der andere $A'C'^+$ auf derselben Seite von AB liegt wie AC^+. Dann liegt $A'C'^+$ im Innern von $\angle ABC$ und schneidet nach 2.3.4 $\overline{AC}$ in einem Punkt S_1. Analog erhält man S_2. Nach wsw ist $\Delta S_1BA \cong \Delta S_2BA$, also nach sss $\Delta S_1S_2B \cong \Delta S_1S_2A$. Damit ist $\angle AS_1S_2 = \angle BS_1S_2$, und nach IV/2 liegen A, B auf verschiedenen Seiten von S_1S_2.

Folglich schneidet $\overline{AB}$ nach IV/1 die Gerade S_1S_2 in einem Punkt M. Damit klappt der 1. Versuch.

3. Fall: $\angle BAC < \angle ABC$. Das ist mit anderen Bezeichnungen wieder der 2. Fall.

3.2.3 Korollar: Jede Strecke enthält unendlich viele Punkte.

Bew.: 3.2.2

3.2.4 Def.: Liegt C im Innern von $\angle ASB$ und ist $\angle ASC = \angle CSB$, so heißt SC^+ die **Winkelhalbierende** von $\angle ASB$.

3.2.5 Satz: Jeder Winkel besitzt genau eine Winkelhalbierende.

Bew.: Seien auf den beiden Schenkeln eines Winkels mit Scheitel S die Strecken $\overline{SA} = \overline{SB}$ angetragen.

Die Strecke $\overline{AB}$ besitzt nach 3.2.2 einen Mittelpunkt M, und SM^+ ist nach 3.1 Winkelhalbierende von $\angle ASB$. Umgekehrt schneidet jede Winkelhalbierende von $\angle ASB$ die Strecke $\overline{AB}$ in M.

3.3 Ein Satz über Außenwinkel und Folgerungen

3.3.1 Bez.: Bei jedem ΔABC heißt $\angle BAC$ ein **Innenwinkel**, seine Nebenwinkel heißen **Außenwinkel**.

3.3.2 Satz: Bei jedem Dreieck ist jeder Außenwinkel größer als jeder nicht anliegende Innenwinkel.

kürzer wäre: In ΔABC ist $\angle(AB^-, AC^+) > \angle ABC, \angle ACB$. (aber schwerer zu deuten)

Bew.: Sei E Mittelpunkt von $\overline{AC}$ (nach 3.2.2) und von $\overline{BF}$ (nach 1.5.16).

F liegt auf derselben Seite von AB wie C und nicht auf derselben Seite von AC wie B, also im Inneren von $\angle(AB^-, AC^+)$. Folglich ist $\angle(AB^-, AC^+) > \angle CAF = \angle ACB$. (Letztes "$=$" wegen sws.)

Der Rest folgt, weil $\angle(AC^-, AB^+) = \angle(AB^-, AC^+)$.

3.3.3 Satz: (**Kongruenzsatz sww**
Wenn zwei Dreiecke in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen, sind sie kongruent.

(Warum sww? Weil wir wsw schon haben: 3.1.2.)

Seien ΔABC, ΔDEF Dreiecke mit $d(A,B) = d(D,E)$, $\angle ABC = \angle DEF$ und $\angle BCA = \angle EFD$. Ist $d(B,C) = d(E,F)$, so ist $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (sws, 3.1.1). Sei o.E. $d(E,F) < d(B,C)$.

Sei $P \in \overline{BC}$ mit $d(B,P) = d(E,F)$. Dann ist $\Delta ABP \cong \Delta DEF$ (sws, 3.1.1) und folglich $\angle BPA = \angle EFD = \angle BCA$. Aber $\angle BPA$ ist ein Außenwinkel von ΔAPC und $\angle BCA$ ein nicht anliegender Innenwinkel. Widerspruch zu 3.3.2.

3.3.4 Frage: Warum haben wir nicht geschlossen: Der dritte Winkel ist 180° - Summe der beiden anderen. Damit folgt sww aus wsw.

3.3.5 Satz: In jedem Dreieck liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber (und umgekehrt).

Bew.: (i) Sei ΔABC ein Dreieck mit $d(A,B) < d(A,C)$. Sei $D \in \overline{AC}$ mit $d(A,B) = d(A,D)$ (nach 1.5.16). Dann ist $\angle ADB = \angle ABD$ (pons asinorum, 3.1.3), und $\angle ADB$ ist Außenwinkel im ΔBDC. Nach 3.3.2 ist $\angle ADB > \angle ACB$, also $\angle ABC > \angle ABD = \angle ADB > \angle ACB$, w.z.b.w.

(ii) Sei ΔABC ein Dreieck mit $\angle ABC > \angle ACB$. Dann ist $d(A,B) \neq d(A,C)$ (wegen 3.1.3, pons asinorum). Wäre $d(A,B) > d(A,C)$, so folgte nach (i): $\angle ABC < \angle ACB$. Widerspruch. w.z.z.w.

3.3.6 Satz: Dreiecksungleichung
In jedem Dreieck sind zwei Seiten zusammen länger als die dritte.

kürzer: In ΔABC ist $d(A,B) + d(A,C) > d(B,C)$.

Sei $D \in AB^-$ mit $d(A,D) = d(A,C)$. Dann ist $\angle ADC = \angle DCA < \angle DCB$ ("$<$", weil A zwischen D und B), also im ΔDBC nach 3.3.5 $d(B,C) < d(D,B) = d(D,A) + d(A,B) = d(A,C) + d(A,B)$.

3.3.7 Satz: Ist D ein Punkt im Inneren von ΔABC, so ist $d(A,D)+d(B,D) < d(A,C)+d(B,C)$ und $\angle ADB > \angle ACB$.

Bew.: Weil D im Innern von $\angle BAC$ liegt, ist $\emptyset \neq AD^+ \cap \overline{BC} =: \{E\}$.
(Außenwinkel) $\angle ADB > \angle AEB$ (Innenwinkel) (1)
(Außenwinkel) $\angle AEB > \angle ACB$ (Innenwinkel) (2)
(1), (2) $\Rightarrow \angle ADB > \angle ACB$

$$d(D,B) < d(D,E) + d(E,B) \qquad (3)$$

(Dreiecksungleichung)

$$d(A,E) < d(A,C) + d(C,E) \qquad (4)$$

(Dreiecksungleichung)

$$d(A,D) + d(D,B) \overset{(3)}{<}$$

$$d(A,D) + d(D,E) + d(E,B) =$$

$$d(A,E) + d(E,B) \overset{(4)}{<}$$

$$d(A,C) + d(C,E) + d(E,B) =$$

$$d(A,C) + d(C,B)$$